$$w_0 - w_2 = -0{,}5\,\lambda_1 \left\{ \frac{\alpha_3}{\lambda_1} \left[ a_{66} - \left( 1 + \frac{\lambda_1}{\xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial \lambda_1} \right) (a_{44}\,\eta_1 + a_{55}\,\xi_1) \right] + \right.$$
$$\left. + 2\alpha_2\,(a_{66} - a_{44}\,\eta_1 - a_{55}\,\xi_1) \right\} (f_3 + f_4) - 0{,}5\lambda_3\,(a_{66} - \eta_3\,a_{44} - \xi_3\,a_{55})\,f_6.$$

Напряженно-деформированное состояние ортотропного полупространства находится по формулам [1], описывающим упругое состояние, с учетом найденных потенциалов $T(x, y, z)$, $\Phi_1(x, \mu_1 y, \lambda_1 z)$, $\Phi_3(x, \mu_3 y, \lambda_3 z)$, $\Phi_0(x, \mu_0 y, \lambda_0 z)$.

## Список литературы


1. Василевич Ю. В. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1989. № 3. С. 61.
2. Прусов И. А., Василевич Ю. В. Там же. 1981. № 3. С. 39.


Поступила в редакцию 07.04.88.

*УДК 519.21*

*В. П. КУРЕНОК*

# СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ БЕЗ СНОСА ПРИ ЛОКАЛЬНОЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ КОЭФФИЦИЕНТА $a^{-2}$

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение

$$dX_t = a(t, X_t)\,dW_t, \quad t \geqslant 0 \tag{1}$$

с начальным значением $x \in R$ и измеримой функцией $a$: $R_+ \times R \to R$, где процесс $W = (W_t)_{t \geqslant 0}$ является винеровским. Пусть $(\Omega, F, P;\ \mathbf{F})$ — стохастический базис, где $\mathbf{F} = (F_t)_{t \geqslant 0}$ — возрастающий поток $\sigma$-алгебр, удовлетворяющий естественным условиям [1, гл. 1, § 1]. Под $(X, \mathbf{F})$ будем понимать случайный процесс $X = (X_t)_{t \geqslant 0}$, согласованный с потоком $\mathbf{F}$, а под $(W, \mathbf{F})$ — винеровский процесс $W = (W_t)_{t \geqslant 0}$, который согласован с $\mathbf{F}$ и для которого при любых $t, \tau \geqslant 0$ приращения $W_{t+\tau} - W_t$ не зависят от $F_t$.

*Определение 1* [2, гл. 4, § 1]. Решением уравнения (1) на стохастическом базисе $(\Omega, F, P;\ \mathbf{F})$ называется пара процессов $(X;\ W)$ таких, что

1) процесс $X = (X_t)_{t \geqslant 0}$ является $\mathbf{F}$-согласованным;
2) процесс $W = (W_t)_{t \geqslant 0}$ является $(W, \mathbf{F})$-винеровским;
3) для каждого $t \geqslant 0$ почти наверное (п. н.) имеет место соотношение

$$X_t = x + \int_0^t a(s, X_s)\,dW_s.$$

В данной работе мы доказываем теорему существования решения уравнения (1), которая обобщает результаты Ершова [3] и Ватанабэ [4], где для существования решения предполагается либо липшицевость функции $a^{-2}$, ее ограниченность и невырожденность, либо ее непрерывность [4] по совокупности переменных.

Все встречающиеся далее соотношения между случайными величинами будем считать, если не оговорено противное, выполненными почти наверное.

*Определение 2.* Под случайной заменой времени (заменой времени) на стохастическом базисе $(\Omega, F, P;\ \mathbf{F})$ будем понимать такой процесс $\varphi = (\varphi_t)_{t \geqslant 0}$, что

1) $\varphi_0 = 0$;
2) $\varphi_t$ является непрерывной функцией;

3) $\lim\limits_{t\uparrow\infty}\varphi_t=\infty$;

4) процесс $\varphi$ является $\mathbf{F}$-согласованным.

Для нахождения решения уравнения (1) применим метод замены времени. Известно [2, гл. 4, § 4] что, если на стохастическом базисе $(\Omega, F, P; \mathbf{F})$ с винеровским процессом $(W, \mathbf{F})$ существует решение уравнения

$$\varphi_t=\int\limits_0^t a^{-2}(\varphi_s,\ W_s+x)\,ds,\ t\geqslant 0, \tag{2}$$

являющееся заменой времени, то уравнение (1) тогда тоже имеет решение.

Приведем без доказательства один результат о слабой сходимости мер, соответствующих случайным процессам, который будем использовать при доказательстве теоремы.

**Лемма** [2, Гл. 1, Т. 4.2]. Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, F, P)$ задана последовательность $d$-мерных процессов $(Y^n_t)_{t\geqslant 0}$, $n=1, 2, \dots, d\geqslant 1$, удовлетворяющих следующим двум условиям:

1) для любого $T>0\ \lim\limits_{C\uparrow\infty}\sup\limits_n P(\max\limits_{t\leqslant T}|Y^n_t|>C)=0$;

2) для любых $T,\varepsilon>0$ и $t_1, t_2\in[0, T]\ \lim\limits_{h\downarrow 0}\sup\limits_n P(\max\limits_{|t_1-t_2|\leqslant h}|Y^n_{t_1}-Y^n_{t_2}|>\varepsilon)=0$ (для векторов $z, y\in R^d$ $(z, y)$ обозначает их скалярное произведение, а $|z|=\sqrt{(z, z)}$ — длину вектора $z$).

Тогда последовательность $(Y^n)$ является слабо компактной, т. е. из любой подпоследовательности мер, соответствующих процессам $(Y^n)$, можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

**Теорема.** Если выполнены условия:

1) функция $a^{-2}(t, x)$ является непрерывной по $t$ при любом $x$, $(t, x)\in R_+\times R$;

2) существуют функции $g\in L^{loc}$ и $z$ с $l(\{x: z(x)>0\})>0$, где $l$ — мера Лебега, такие, что $z(x)\leqslant a^{-2}(t, x)\leqslant g(x)$, $(t, x)\in R_+\times R$, то уравнение (1) имеет решение.

Доказательство. По сделанному выше замечанию нам достаточно доказать, что существует замена времени $\varphi=(\varphi_t)_{t\geqslant 0}$, удовлетворяющая уравнению (2) для некоторого винеровского процесса $W$.

Пусть $W^0=(W^0_t)_{t\geqslant 0}$ — винеровский процесс на стохастическом базисе $(\Omega^0, F^0, P^0, \mathbf{F}^0)$, где $F^0_t=\sigma(W^0_s,\ 0\leqslant s\leqslant t)$, $t\geqslant 0$ — пополненные $\sigma$-алгебры. Очевидно, что процесс $W^0$ является $(W^0, \mathbf{F}^0)$-винеровским. Для $n=1, 2\dots$ определим далее процессы:

$$\varphi^n_t=\begin{cases}0,\ t\in\left[0,\ \frac{1}{n}\right);\\ \int\limits_0^{t-\frac{1}{n}} a^{-2}(\varphi^n_s,\ W^0_s+x)\,ds,\ t\geqslant\frac{1}{n}.\end{cases} \tag{3}$$

Из условия 2) теоремы следует, что определение (3) корректно и процессы $(\varphi^n_t)_{t\geqslant 0}$, $n=1, 2, \dots$ являются $\mathbf{F}^0$-согласованными. Проверим далее, что последовательность трехмерных процессов

$$\left(\varphi^n_t;\ \int\limits_0^t a^{-2}(\varphi^n_s,\ W^0_s+x)\,ds;\ W^0_t\right),\ n=1, 2, \dots, t\geqslant 0 \tag{4}$$

является слабо компактной. С учетом условия 2) теоремы имеем для любых $T, C>0$:

$$P\left(\sup_{t\leqslant T}\sqrt{(\varphi^n_t)^2+\left(\int\limits_0^t a^{-2}(\varphi^n_s,\ W^0_s+x)\,ds\right)^2+(W^0_t)^2}\geqslant C\right)\leqslant$$

$$\leqslant P\left(\sup_{t<T}\left[(\varphi_t^n)^2+\left(\int_0^t a^{-2}(\varphi_s^n,\ W_s^0+x)ds\right)^2+(W_t^0)^2\right]\geqslant C^2\right)\leqslant$$

$$\leqslant P\left(\left[2\left(\int_0^T g(W_s^0+x)\,ds\right)^2+\sup_{t<T}(W_t^0)^2\right]\geqslant C^2\right). \qquad (5)$$

Аналогично для $T$, $h$, $\varepsilon>0$ и $t_1$, $t_2\in[0,\ T]$ получаем:

$$P\left(\max_{|t_1-t_2|<h}\sqrt{(\varphi_{t_1}^n-\varphi_{t_2}^n)^2+\left(\int_{t_1}^{t_2} a^{-2}(\varphi_s^n, W_s^0+x)\,ds\right)^2+(W_{t_1}^0-W_{t_2}^0)^2}>\varepsilon\right)\leqslant$$

$$\leqslant P\left(\max_{|t_1-t_2|<h}\left[2\left(\int_{t_1}^{t_2} g(W_s^0+x)\,ds\right)^2+(W_{t_1}^0-W_{t_2}^0)^2\right]>\varepsilon\right). \qquad (6)$$

Из неравенств (5) и (6) следует непосредственно, что последовательность процессов (4) удовлетворяет условиям леммы, т. е. существует подпоследовательность $\{n_k\}$, $k=1,\ 2,\ \ldots$ и предельный процесс $(\varphi_t';\ \psi_t';\ W_t')$, к которому слабо сходятся при $k\to\infty$ процессы $\left(\varphi_t^{n_k};\ \int_0^t a^{-2}(\varphi_s^{n_k},\ W_s^0+x)ds;\ W_t^0\right)$. Для простоты будем полагать, что подпоследовательность $\{n_k\}$, $k=1,\ 2,\ \ldots$ совпадает с последовательностью $\{1,\ 2,\ \ldots\}$.

Так как функционал $\int_0^t a^{-2}(\cdot,\ \ y(s))\,ds$ является непрерывным на $C_{[0,\,T]}(R)$ для любого $T>0$, то совместное распределение процессов $\psi_t'$ и $\int_0^t a^{-2}(\varphi_s',\ W_s'+x)\,ds$ совпадает с пределом совместного распределения процессов

$$\left(\int_0^t a^{-2}(\varphi_s^n,\ W_s^0+x)\,ds;\quad \int_0^t a^{-2}(\varphi_s^n,\ W_s^0+x)\,ds\right).$$

Отсюда следует, что для любого $T>0$ $\psi_t'=\int_0^t a^{-2}(\varphi_s',\ W_s'+x)\,ds$, $t\in[0,\ T]$, т. е. последовательность процессов (4) слабо сходится к процессу $\left(\varphi_t';\ \int_0^t a^{-2}(\varphi_s',\ W_s'+x)\,ds,\ W_t'\right)$, $t\geqslant 0$. Кроме того, $W'=(W_t')_{t\geqslant 0}$ является винеровским процессом.

Покажем, что процесс $(\varphi_t',\ W_t')_{t\geqslant 0}$ удовлетворяет уравнению (2). Для $t=0$ имеем $\varphi_0^n=0$, $n=1,\ 2,\ \ldots$ и, следовательно, $\varphi_0'=0$. Пусть $t>0$. Тогда существует номер $n_0$, что для всех $n\geqslant n_0$ выполнено $t-\frac{1}{n}>0$. Для таких $n$ получаем, что

$$\varphi_t^n-\int_0^{t-\frac{1}{n}} a^{-2}(\varphi_s^n,\ W_s^0+x)\,ds=\varphi_t^n-\int_0^t a^{-2}(\varphi_s^n, W_s^0+x)\,ds+$$

$$+\int_{t-\frac{1}{n}}^{t} a^{-2}(\varphi_s^n, W_s^0+x)\,ds$$

стремится к нулю по вероятности при $n\to\infty$, т. е.

$$\varphi_t'=\int_0^t a^{-2}(\varphi_s',\ W_s'+x)ds \qquad (7)$$

с вероятностью единица.

Правая часть равенства (7) является непрерывной, поэтому процесс $(\varphi_t')$ является также непрерывным при $t \geqslant 0$.

Для любого фиксированного $T > 0$ процессы $(\varphi_t^n, W_t^0)$ $(t \leqslant T)$ являются измеримыми относительно $\sigma$-алгебры $F_T^0$, а приращения процесса $(W_s^0)$ после момента времени $T$ не зависят от $F_T^0$. Следовательно, процессы $(\varphi_t^n, W_t^0)$ $(t \leqslant T)$ не зависят от приращений процесса $(W_s^0)$ после момента $T$. В силу того, что процессы $(\varphi_t^n, W_t^0)$ $n = 1, 2, \ldots$ сходятся при $n \to \infty$ слабо к процессу $(\varphi_t', W_t')$, последнее имеет место и для предельного процесса, т. е. процесс $(\varphi_t', W_t')$ $(t \leqslant T)$ не зависит от приращений процесса $(W_s')$ после момента времени $T$. Таким образом, процесс $W'$ является винеровским относительно пополненного потока $\sigma$-алгебр $F_t' = \sigma(\varphi_s', W_s'; 0 \leqslant s \leqslant t)$, $t \geqslant 0$, а процесс $\varphi'$ согласован с этим потоком. Кроме того, решение $(\varphi', \mathrm{F}')$ удовлетворяет и условию 3) определения 2, так как (см. [5, теорема 3])

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t a^{-2}(\varphi_s', W_{s_1}' + x)\, ds \geqslant \lim_{t\to\infty} \int_0^t z(W_s' + x)\, ds = \infty.$$

Таким образом, процесс $\varphi' = (\varphi_t')_{t \geqslant 0}$ является заменой времени.

Теорема доказана.

## Список литературы


1. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Теория мартингалов. М., 1986.
2. Ватанабэ С., Икэда Н. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М., 1986.
3. Yershov M. P. // Lecture Notes in Mathematics. 1973. V. 330. P. 527.
4. Watanabe S. // Appl. Math. Optim. 1975. V. 2. № 1. P. 90.
5. Engelbert H.-J., Schmidt W. // Lecture Notes in Control and Information Sciences. 1981. V. 36. P. 47.


Поступила в редакцию 08.10.87.

*УДК 519.1*

*М. М. КОВАЛЕВ, НГУЕН НГИА*

# ПОРЯДКОВО-ВЫПУКЛЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ НА ЦЕЛОЧИСЛЕННОЙ РЕШЕТКЕ

В последнее время в теории дискретной оптимизации интенсивно разрабатываются аналоги выпуклости, которые служат удобным инструментом для построения алгоритмов решения задач дискретной оптимизации и анализа их эффективности (библиографию см. в [1]). В [2] введено понятие порядково-выпуклой функции на частично упорядоченном множестве, удовлетворяющем условию Жордана — Дедекинда, исследованы общие свойства таких функций. Настоящая заметка, являясь продолжением указанной работы, содержит изложение свойства порядково-выпуклых функций на целочисленной решетке $Z^n$.

Напомним, что функция $f$: $Z^n \to R$ называется порядково-выпуклой, если

$$f(x + e_i) \geqslant \frac{1}{2}[f(x) + f(x + e_i + e_j)]\ \forall i,\ j = 1, \ldots, n;\ \forall x \in Z^n,$$

где $e_i$ — $i$-й единичный вектор.

Приведем примеры порядково-выпуклых функций на $Z^n$:

1) $p(x) = -(x_1 + \ldots + x_n)^2$ на $Z^n$;

2) $q(x) = \dfrac{-1}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + 1}$ на $Z_+^n$.