сона, предлагаемый алгоритм будет сходиться со скоростью, не зависящей от числа узлов сетки.

4. Численные эксперименты по решению разностных граничных задач с помощью предлагаемого алгоритма на ЭВМ проводились аналогично численным экспериментам по алгоритму из [5]. Некоторые результаты приводятся в табл. 1 и 2.

Список литературы

1. Самарский А. А. Теория разностных схем. М., 1983.
2. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М., 1978.
3. Ильин В. П. Численные методы решения задач электрофизики. М., 1985.
4. Ильин В. П. // Сиб. матем. журн. 1985. Т. 26. № 1. С. 83.
5. Басик В. А. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1989. № 3. С. 38.

Поступила в редакцию 03.12.87.

УДК 539.3

Ю. В. ВАСИЛЕВИЧ

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ОРТОТРОПНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

В работе [1] изложен метод решения термоупругой задачи для ортотропного полупространства, на граничной плоскости которого задано неравномерное распределение стационарного температурного поля. Настоящая статья посвящена решению контактной задачи термоупругости. В основу его положено новое представление общих формул для компонентов напряжений и перемещений, полученных в [1].

Пусть на ортотропное полупространство $D^+ (z > 0)$, обладающее прямолинейной тепловой и упругой анизотропией, действует абсолютно жесткий, произвольной формы в плане плоский штамп. Трение между штампом и полупространством по области контакта S_1 отсутствует. Положим, что поверхность штампа имеет температуру $T = T_0(x, y)$; тепловой контакт штампа и полупространства в S_1, а также полупространства и среды $(T_{\text{ср}} = 0)$ в $S_2 = S - S_1$ совершенный, т. е. температурный скачок на поверхности соприкасающихся тел и среды не возникает. Граничная плоскость полупространства S перпендикулярна к одному из трех главных направлений упругости тела, параллельных осям декартовых координат x, y, z, которые образуют правую тройку.

Граничные условия для стационарного температурного поля в S имеют вид $T = T_0(x, y)$ в S_1, $T = 0$ в S_2.

Как известно, в области D^+ квазигармоническая функция температуры $T(x, \bar{y}, \bar{z})$ определяется по формуле

$$T(x, \bar{y}, \bar{z}) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{S_1} \frac{\bar{z}\, T(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta}{[(x-\alpha)^2 + (\bar{y}-\beta)^2 + \bar{z}^2]^{3/2}}, \tag{1}$$

где $\bar{y} = \bar{\mu} y$, $\bar{z} = \bar{\lambda} z$, $\bar{\mu} = \sqrt{k_1/k_2}$, $\bar{\lambda} = \sqrt{k_1/k_3}$, $k_i\ (i = 1, 2, 3)$ — коэффициенты теплопроводности в главных направлениях упругости тела.

Запишем граничные условия для контактной задачи:

$$\begin{gathered} \tau_{xz1} + \tau_{xz2} = 0,\ \ \tau_{yz1} + \tau_{yz2} = 0 \ \text{ в } \ S, \\ \sigma_{z1} + \sigma_{z2} = 0 \text{ в } S_2,\ w_1 + w_2 = w_0(x, y) \text{ в } S_1. \end{gathered} \tag{2}$$

Здесь индекс 2 относится к компонентам напряжения и осадке, вызванным температурным полем; индекс 1 — к компонентам упругого состояния; $w_0(x, y)$ — заданное перемещение.

Сохраняя обозначения работы [1] для составляющих термоупругого состояния, приведем выражения для σ_{z2}, τ_{xz2}, τ_{yz2}, w_2:

$$\sigma_{z2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\xi_1 K\widetilde{\Phi}_1 + \xi_3\widetilde{\Phi}_3) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\eta_1 K\widetilde{\Phi}_1 + \eta_3\widetilde{\Phi}_3),$$

$$\tau_{xz2} = -\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial z}(\xi_1 K\widetilde{\Phi}_1 + \xi_3\widetilde{\Phi}_3), \quad \tau_{yz2} = -\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}(\eta_1 K\widetilde{\Phi}_1 + \eta_3\widetilde{\Phi}_3), \qquad (3)$$

$$w_2 = C_1 K\partial\widetilde{\Phi}_1/\partial z + C_3\partial\widetilde{\Phi}_3/\partial z,$$

где $\widetilde{\Phi}_1(x,\ y_1,\ z_1) = \frac{K_1}{4\pi}\iiint\limits_{D^+}\frac{T(\gamma,\ \beta_1,\ \Theta_1)\,d\gamma\,d\beta_1\,d\Theta_1}{\sqrt{(x-\gamma)^2+(y_1-\beta_1)^2+(z_1-\Theta_1)^2}},$

$$\widetilde{\Phi}_3(x,\ y_3,\ z_3) = \frac{K_3}{4\pi}\iiint\limits_{D^+}\frac{T(\gamma,\ \beta_3,\ \Theta_3)\,d\gamma\,d\beta_3\,d\Theta_3}{\sqrt{(x-\gamma)^2+(y_3-\beta_3)^2+(z_3-\Theta_3)^2}},$$

$$y_k = \mu_k y,\ z_k = \lambda_k z,\ \beta_k = \bar{\mu} y_k/\mu_k,\ \Theta_k = \bar{\lambda} z_k/\lambda_k,\ k = 1,\ 3;$$

остальные обозначения приведены в [1, 2].

С целью удовлетворения условиям (2) решим упругую задачу со следующими граничными условиями:

$$\tau_{xz1} = -\tau_{xz2},\quad \tau_{yz1} = -\tau_{yz2}\ \text{в}\ S,$$
$$\sigma_{z1} = -\sigma_{z2}\ \text{в}\ S_2,\quad w_1 = w_0 - w_2\ \text{в}\ S_1. \qquad (4)$$

Воспользуемся общими формулами, описывающими упругое состояние ортотропного полупространства [1]. В частности, выпишем выражения для σ_{z1}, τ_{xz1}, τ_{yz1}, w_1:

$$\sigma_{z1} = \frac{\alpha_3\,\xi_1}{\lambda_1^3}\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial z^2} + \xi_3\frac{\partial^2\Phi_3}{\partial x^2} + \eta_3\frac{\partial^2\Phi_3}{\partial y^2} + n_3\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial x\,\partial y},$$
$$\tau_{xz1} = -\xi_3\frac{\partial^2\Phi_3}{\partial x\,\partial z} - n_6\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial y\,\partial z},\quad \tau_{yz1} = -\eta_3\frac{\partial^2\Phi_3}{\partial y\,\partial z} + n_7\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial x\,\partial z}, \qquad (5)$$

$$w_1 = \frac{1}{2}\left\{\frac{\alpha_3}{\lambda_1}\left[a_{66} - \left(1 + \frac{\lambda_1}{\xi_1}\frac{\partial\xi_1}{\partial\lambda_1}\right)(a_{44}\,\eta_1 + a_{55}\,\xi_1)\right] + 4\alpha_2 C_1\right\}\partial\Phi_1/\partial z +$$
$$+ \frac{z\alpha_3}{\lambda_1}C_1\,\partial^2\Phi_1/\partial z^2 + C_3\,\partial\Phi_3/\partial z, \qquad (6)$$

где функции $\Phi_1(x,\ \mu_1 y,\ \lambda_1 z)$, $\Phi_3(x,\ \mu_3 y,\ \lambda_3 z)$, $\Phi_0(x,\ \mu_0 y,\ \lambda_0 z)$ удовлетворяют квазигармоническому уравнению

$$\frac{\partial^2\Phi_i}{\partial x^2} + \frac{1}{\mu_i^2}\frac{\partial^2\Phi_i}{\partial y^2} + \frac{1}{\lambda_i^2}\frac{\partial^2\Phi_i}{\partial z^2} = 0,\quad i = 0,\ 1,\ 3.$$

Представим функцию $\Phi_0(x,\ \mu_0 y,\ \lambda_0 z)$ в виде:

$$\Phi_0(x,\ \mu_0 y,\ \lambda_0 z) = \Phi_0(x,\ \mu_3 y,\ \lambda_3 z) + \psi(x,\ y,\ z), \qquad (7)$$

где $\psi = \Phi_0(x,\ \mu_0 y,\ \lambda_0 z) - \Phi_0(x,\ \mu_3 y,\ \lambda_3 z)$.

Обозначим $\zeta = \lambda_k z$. Тогда при $\zeta = 0$ формулы (5) с учетом (4), (7) преобразуются к виду:

$$\frac{\alpha_3\,\xi_1}{\lambda_1}\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial\zeta^2} + \xi_3\frac{\partial^2\Phi_3}{\partial x^2} + \eta_3\frac{\partial^2\Phi_3}{\partial y^2} + n_3\frac{\partial^2\Phi_0(x,\ \mu_3 y)}{\partial x\,\partial y} =$$
$$= \begin{cases} -M(x,\ y) - p(x,\ y)\ \text{в}\ S_1, \\ -M(x,\ y)\ \text{в}\ S_2, \end{cases} \qquad (8)$$

$$\lambda_3\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\xi_3\frac{\partial\Phi_3}{\partial x} + n_6\frac{\partial\Phi_0(x,\ \mu_3 y)}{\partial y}\right) = N(x,\ y)\ \text{в}\ S, \qquad (9)$$

$$\lambda_3\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\eta_3\frac{\partial\Phi_3}{\partial y} - n_7\frac{\partial\Phi_0(x,\ \mu_3 y)}{\partial x}\right) = L(x,\ y)\ \text{в}\ S, \qquad (10)$$

где $M = \sigma_{z2} + n_3\Psi_3$, $N = \tau_{xz2} - n_6\Psi_1$, $L = \tau_{yz2} + n_7\Psi_2$, $n_3 = n_6 - n_7$, $\Psi_1 = \partial^2\psi/\partial y\partial z$, $\Psi_2 = \partial^2\psi/\partial x\partial z$, $\Psi_3 = \partial^2\psi/\partial x\partial y$; $p(x,\ y)$ — неизвестная плотность распределения нормальных усилий в области контакта S_1.

Решение граничных задач (9), (10) запишем в форме

$$\xi_3 \frac{\partial \Phi_3}{\partial x} + n_6 \frac{\partial \Phi_0 (x, \ \mu_3 y)}{\partial y} = \lambda_3^{-1} g_1 (x, \ \mu_3 y, \ \zeta), \tag{11}$$

$$\eta_3 \frac{\partial \Phi_3}{\partial y} - n_7 \frac{\partial \Phi_0 (x, \ \mu_3 y)}{\partial x} = \lambda_3^{-1} g_2 (x, \ \mu_3 y, \ \zeta), \tag{12}$$

где $g_1 = \frac{-1}{2\pi} \iint\limits_S \frac{N (\alpha, \ \beta) \, d\alpha \, d\beta}{\sqrt{(x-\alpha)^2 + (\mu_3 y - \beta)^2 + \zeta^2}}$, $g_2 = \frac{-1}{2\pi} \iint\limits_S \frac{L (\alpha, \ \beta) \, d\alpha \, d\beta}{\sqrt{(x-\alpha)^2 + (\mu_3 y - \beta)^2 + \zeta^2}}$.

Продифференцируем равенства (11), (12) соответственно по x и y. С учетом полученных выражений на основании (8) имеем граничную задачу для определения $\Phi_1(x, \mu_1 y, \lambda_1 z)$:

$$\frac{\partial^2 \Phi_1 (x, \ \mu_1 y)}{\partial \zeta^2} = \begin{cases} -f_1 (x, \ y) \ \text{в} \ S_1, \\ -f_2 (x, \ y) \ \text{в} \ S_2, \end{cases} \tag{13}$$

где $f_1 (x, \ y) = \lambda_1 \alpha_3^{-1} \xi_1^{-1} (M (x, \ y) + p (x, \ y) + \lambda_3^{-1} J_1 + \lambda_3^{-1} \mu_3^{-1} J_2)$,

$f_2 (x, \ y) = \lambda_1 \alpha_3^{-1} \xi_1^{-1} (M (x, \ y) + \lambda_3^{-1} J_1 + \lambda_3^{-1} \mu_3^{-1} J_2)$,

$J_1 = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_S \frac{(x-\alpha) N (\alpha, \ \beta) \, d\alpha \, d\beta}{[(x-\alpha)^2 + (\mu_3 y - \beta)^2 + \zeta^2]^{3/2}}$, $J_2 = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_S \frac{(\mu_3 y - \beta) L (\alpha, \ \beta) \, d\alpha \, d\beta}{[(x-\alpha)^2 + (\mu_3 y - \beta)^2 + \zeta^2]^{3/2}}$.

Решение граничной задачи (13) запишем в виде:

$$\Phi_1 = g_3 (x, \ \mu_1 y, \ \zeta), \tag{14}$$

где $g_3 = \frac{-1}{2\pi} \iint\limits_{S_1} \frac{f_3 (\sigma, \ t) \, d\sigma \, dt}{\sqrt{(x-\sigma)^2 + (\mu_3 y - t)^2 + \zeta^2}} - \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{S_2} \frac{f_4 (\sigma, \ t) \, d\sigma \, dt}{\sqrt{(x-\sigma)^2 + (\mu_1 y - t)^2 + \zeta^2}}$,

$f_3 = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{S_1} \frac{f_1 (\delta, \ \omega) \, d\delta \, d\omega}{\sqrt{(\sigma-\delta)^2 + (t-\omega)^2}}$, $f_4 = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{S_2} \frac{f_2 (\delta, \ \omega) \, d\delta \, d\omega}{\sqrt{(\sigma-\delta)^2 + (t-\omega)^2}}$.

Для определения функций $\Phi_3(x, \mu_3 y, \lambda_3 z)$ и $\Phi_0(x, \mu_3 y, \lambda_3 z)$ воспользуемся равенствами (11), (12). Продифференцируем указанные уравнения в первом случае по x и y соответственно, во втором — (11) продифференцируем по y, а (12) — по x. Поскольку $\eta_3 n_6 / \xi_3 n_7 = \mu_3^{-2}$ и Φ_3, Φ_0 удовлетворяют приведенным квазигармоническим уравнениям, то на основании преобразованных выражений получим граничные задачи для Φ_3 и Φ_0:

$$\frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial \zeta^2} = -f_5 (x, \ y), \quad \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \zeta^2} = f_7 (x, \ y), \tag{15}$$

где $f_5 = \lambda_3 \xi_3^{-1} (J_1 + \mu_3^{-1} n_7^{-1} n_6 J_2)$, $f_7 = \lambda_3 n_7^{-1} (J_4 - \eta_3 \mu_3^{-1} \xi_3^{-1} J_3)$,

$J_3 = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_S \frac{(\mu_3 y - \beta) N (\alpha, \ \beta) \, d\alpha \, d\beta}{[(x-\alpha)^2 + (\mu_3 y - \beta)^2 + \zeta^2]^{3/2}}$,

$J_4 = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_S \frac{(x-\alpha) L (\alpha, \ \beta) \, d\alpha \, d\beta}{[(x-\alpha)^2 + (\mu_3 y - \beta)^2 + \zeta^2]^{3/2}}$.

Решение граничных задач (15) имеет вид:

$$\Phi_3 = g_4(x, \mu_3 y, \zeta), \ \Phi_0 = g_5(x, \mu_3 y, \zeta), \tag{16}$$

где $g_4 = \frac{-1}{2\pi} \iint\limits_S \frac{f_6 (\sigma, \ t) \, d\sigma \, dt}{\sqrt{(x-\sigma)^2 + (\mu_3 y - t)^2 + \zeta^2}}$, $f_6 = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_S \frac{f_5 (\delta, \ \omega) \, d\delta \, d\omega}{\sqrt{(\sigma-\delta)^2 + (t-\omega)^2}}$,

$g_5 = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_S \frac{f_8 (\sigma, \ t) \, d\sigma \, dt}{\sqrt{(x-\sigma)^2 + (\mu_3 y - t)^2 + \zeta^2}}$, $f_8 = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_S \frac{f_7 (\delta, \ \omega) \, d\delta \, d\omega}{\sqrt{(\sigma-\delta)^2 + (t-\omega)^2}}$.

Функцию $\Phi_0(x, \mu_0 y, \lambda_0 z)$ определим на основании второго равенства (16) путем замены μ_3 на μ_0, λ_3 на λ_0. Для определения $\psi(x, y)$ имеем следующее интегродифференциальное уравнение: $\psi(x, \ y) = g_5(x, \ \mu_0 y) - g_5(x, \mu_3 y)$.

Зная $\psi(x, y)$, функции Φ_1, Φ_3 и Φ_0 найдем по формулам (14), (16).

Для отыскания неизвестной функции $p(x, y)$ получим интегральное уравнение, удовлетворяя граничному условию для осадки w_1 при $z=0$:

$$w_0 - w_2 = -0{,}5\,\lambda_1 \left\{ \frac{\alpha_3}{\lambda_1} \left[a_{66} - \left(1 + \frac{\lambda_1}{\xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial \lambda_1} \right) (a_{44}\,\eta_1 + a_{55}\,\xi_1) \right] + \right.$$

$$\left. + 2\alpha_2 (a_{66} - a_{44}\,\eta_1 - a_{55}\,\xi_1) \right\} (f_3 + f_4) - 0{,}5\lambda_3 (a_{66} - \eta_3\,a_{44} - \xi_3\,a_{55})\,f_6.$$

Напряженно-деформированное состояние ортотропного полупространства находится по формулам [1], описывающим упругое состояние, с учетом найденных потенциалов $T(x, \bar{y}, \bar{z})$, $\Phi_1(x, \mu_1 y, \lambda_1 z)$, $\Phi_3(x, \mu_3 y, \lambda_3 z)$, $\Phi_0(x, \mu_0 y, \lambda_0 z)$.

Список литературы

1. Василевич Ю. В. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1989. № 3. С. 61.
2. Прусов И. А., Василевич Ю. В. Там же. 1981. № 3. С. 39.

Поступила в редакцию 07.04.88.

УДК 519.21

В. П. КУРЕНОК

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ БЕЗ СНОСА ПРИ ЛОКАЛЬНОЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ КОЭФФИЦИЕНТА a^{-2}

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение

$$dX_t = a(t, X_t)\,dW_t, \quad t \geqslant 0 \tag{1}$$

с начальным значением $x \in R$ и измеримой функцией a: $R_+ \times R \to R$, где процесс $W = (W_t)_{t \geqslant 0}$ является винеровским. Пусть $(\Omega, F, P; \mathbf{F})$ — стохастический базис, где $\mathbf{F} = (F_t)_{t \geqslant 0}$ — возрастающий поток σ-алгебр, удовлетворяющий естественным условиям [1, гл. 1, § 1]. Под $(X, \mathbf{F})$ будем понимать случайный процесс $X = (X_t)_{t \geqslant 0}$, согласованный с потоком $\mathbf{F}$, а под $(W, \mathbf{F})$ — винеровский процесс $W = (W_t)_{t \geqslant 0}$, который согласован с $\mathbf{F}$ и для которого при любых $t, \tau \geqslant 0$ приращения $W_{t+\tau} - W_t$ не зависят от F_t.

Определение 1 [2, гл. 4, § 1]. Решением уравнения (1) на стохастическом базисе $(\Omega, F, P; \mathbf{F})$ называется пара процессов $(X; W)$ таких, что

1) процесс $X = (X_t)_{t \geqslant 0}$ является $\mathbf{F}$-согласованным;
2) процесс $W = (W_t)_{t \geqslant 0}$ является $(W, \mathbf{F})$-винеровским;
3) для каждого $t \geqslant 0$ почти наверное (п. н.) имеет место соотношение

$$X_t = x + \int_0^t a(s, X_s)\,dW_s.$$

В данной работе мы доказываем теорему существования решения уравнения (1), которая обобщает результаты Ершова [3] и Ватанабэ [4], где для существования решения предполагается либо липшицевость функции a^{-2}, ее ограниченность и невырожденность, либо ее непрерывность [4] по совокупности переменных.

Все встречающиеся далее соотношения между случайными величинами будем считать, если не оговорено противное, выполненными почти наверное.

Определение 2. Под случайной заменой времени (заменой времени) на стохастическом базисе $(\Omega, F, P; \mathbf{F})$ будем понимать такой процесс $\varphi = (\varphi_t)_{t \geqslant 0}$, что

1) $\varphi_0 = 0$;
2) φ_t является непрерывной функцией;