УДК 519:633

В. А. БАСИК

О МОДИФИКАЦИИ МЕТОДА ПОЛНОЙ РЕДУКЦИИ ДЛЯ РАЗНОСТНЫХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

1. Пусть V_k — векторы размерности N, удовлетворяющие системе уравнений:

$$A_iV_{i-1} - B_iV_i + C_iV_{i+1} = F_i, \tag{1}$$

$$i = 1,\ 2,\ \ldots,\ M-1,$$

$$V_0 = F_0, \quad V_M = F_M, \tag{2}$$

где B_i — квадратные трехдиагональные матрицы; A_i, C_i — диагональные матрицы; F_i — известные векторы. В дальнейшем будем ориентироваться на свойства систем вида (1), (2), возникающих при применении метода сеток к решению задачи Дирихле для дифференциальных уравнений второго порядка эллиптического типа [1, 2]. Будем полагать $M = 2^m$, где m — положительное целое число.

Ниже для решения разностной граничной задачи (1), (2) строится итерационный алгоритм, в основу которого положены идеи неявных итерационных методов [3—5] и метода полной редукции [2]. По аналогии с [4] этот алгоритм можно назвать методом неявной полной редукции. В построении алгоритма, как и в [5], используется плавность изменения коэффициентов разностных граничных задач. При выполнении этого предположения метод неявной полной редукции имеет высокую скорость сходимости, не зависящую от числа узлов сетки, но по сравнению с алгоритмом из [5] требует меньшего объема вычислений.

2. Решая задачу (1), (2), исключим неизвестные V_i в такой же последовательности, что и в методе полной редукции. При этом в правую часть уравнений включим V_i с небольшими коэффициентами. После проведения k этапов исключения неизвестных из (1) получаем систему:

$$A_{j-2^k+1} V_{j-2^k} - B_j^{(k)} V_j + C_{j+2^k-1} V_{j+2^k} = B_j^{(k)} p_j^{(k)}(V) + q_j^{(k)}(V), \qquad j = 2^k \cdot i,$$
$$i = 1,\ 2,\ \ldots,\ 2^{m-k}-1. \tag{3}$$

Из (1) и (3) имеем $p_j^{(0)}(V) = 0$, $q_j^{(0)}(V) = F_j$, $B_j^{(0)} = B_j$. Получим рекуррентные формулы для вычисления $p_j^{(k)}(V)$, $q_j^{(k)}(V)$. С этой целью умножим (3) слева на B_j:

$$B_j^{(k)} A_{j-2^k+1} V_{j-2^k} - B_j^{(k)} B_j^{(k)} V_j + B_j^{(k)} C_{j+2^k-1} V_{j+2^k} = B_j^{(k)} B_j^{(k)} p_j^{(k)}(V) +$$
$$+ B_j^{(k)} q_j^{(k)}(V).$$

Предполагая $B_j^{(k)} \approx B_{j-2^k}^{(k)}$, $B_j^{(k)} \approx B_{j+2^k}^{(k)}$, $A_j \approx E$, $C_j \approx E$ и используя (3) при $j-2^k$ и $j+2^k$, преобразуем последнее уравнение к виду:

$$A_{j-2^{k+1}+1} V_{j-2^{k+1}} - B_j^{(k+1)} V_j + C_{j+2^{k+1}-1} V_{j+2^{k+1}} = B_j^{(k)} \Omega_j^{(k)}(V) +$$
$$+ B_j^{(k+1)} p_j^{(k)}(V) + 2p_j^{(k)}(V) + A_{j-2^{k+1}+1} V_{j-2^{k+1}} + 2V_j +$$
$$+ C_{j+2^{k+1}-1} V_{j+2^{k+1}}, \tag{4}$$

где $B_j^{(k+1)} = B_j^{(k)} \cdot B_j^{(k)} - 2E$;

$$\Omega_j^{(k)}(V) = A_{j-2^k+1}\left(p_{j-2^k}^{(k)}(V) - W_{j-2^k}^{(k)}(V)\right) + C_{j+2^k-1}\left(p_{j+2^k}^{(k)}(V) -\right.$$
$$\left.- W_{j+2^k}^{(k)}(V)\right) + q_j^{(k)}(V);$$

$$W_j^{(k)}(V) = [B_j^{(k)}]^{-1}\left(A_{j-2^k+1} V_{j-2^k} + C_{j+2^k-1} V_{j+2^k} - q_j^{(k)}(V)\right).$$

Так как $B_j^{(k)} = [B_j^{(k)}]^{-1}(B_j^{(k+1)} + 2E)$, то (4) можно переписать:

$$A_{j-2^{k+1}+1} V_{j-2^{k+1}} - B_j^{(k+1)} V_j + C_{j+2^{k+1}-1} V_{j+2^{k+1}} = B_j^{(k+1)} p_j^{(k+1)}(V) + q_j^{(k+1)}(V), \; j = 2^{k+1} i, \; i = 1, 2, \ldots, 2^{m-k-1} - 1,$$

где

$$p_j^{(k+1)}(V) = p_j^{(k)}(V) + [B_j^{(k)}]^{-1} \Omega_j^{(k)}(V), \tag{5}$$

$$q_j^{(k+1)}(V) = G_j^{(k+1)}(V) + 2(V_j + p_j^{(k+1)}(V)), \tag{6}$$

$$G_j^{(k)}(V) = A_{j-2^k+1} V_{j-2^k} + C_{j+2^k-1} V_{j+2^k}.$$

Формулы (3), (5), (6) дают возможность построить итерационный алгоритм, в котором вычисление $V_j^{(s+1)}$ — $s+1$-го приближения к V_j^* — решению задачи (1), (2) происходит по следующей схеме.

1). Задаем $p_j^{(0)}(V^{(s)}) = 0$, $q_j^{(0)}(V^{(s)}) = F_j$, $j = 1, 2, \ldots, M-1$.

2). Последовательно при $k = 0, 1, \ldots, m-2$ для $j = 2^{k+1} i$, $i = 1, 2, \ldots, 2^{m-k-1} - 1$ находим:

$$T_j^{(k)}(V^{(s)}) = [B_j^{(k)}]^{-1} \Omega_j^{(k)}(V^{(s)}), \tag{7}$$

$$p_j^{(k+1)}(V^{(s)}) = p_j^{(k)}(V^{(s)}) + T_j^{(k)}(V^{(s)}), \tag{8}$$

$$q_j^{(k+1)}(V^{(s)}) = G_j^{(k+1)}(V^{(s)}) + 2(V_j^{(s)} + p_j^{(k+1)}(V^{(s)})). \tag{9}$$

3). Задаем $V_0^{(s+1)} = F_0$, $V_M^{(s+1)} = F_M$ и последовательно при $k = m-1$, $m-2, \ldots, 0$ по формулам:

$$V_j^{(s+1)} = -p_j^{(k)}(V^{(s)}) - [B_j^{(k)}]^{-1} (q_j^{(k)}(V^{(s)}) - G_j^{(k)}(V^{(s+1)})) \tag{10}$$

находим $V_j^{(s+1)}$, $j = 2^k \cdot i$, $i = 1, 3, \ldots, 2^{m-k} - 1$.

В (7) — (10) под $p_j^{(k)}(V^{(s)})$, $q_j^{(k)}(V^{(s)})$, $\Omega_j^{(k)}(V^{(s)})$, $W_j^{(k)}(V^{(s)})$, $G_j^{(k)}(V^{(s)})$ понимаются векторы $p_j^{(k)}(V)$, $q_j^{(k)}(V)$, $\Omega_j^{(k)}(V)$, $W_j^{(k)}(V)$, $G_j^{(k)}(V)$, в которых V_j заменены на $V_j^{(s)}$. При вычислении $W_j^{(k)}(V^{(s)})$, $T_j^{(k)}(V^{(s)})$, $V_j^{(s+1)}$ требуется находить $X = [B_j^{(k)}]^{-1} L$, где L — некоторый вектор. Для этой цели можно использовать алгоритмы из [2], согласно которым вычисление вектора X сводится к решению систем линейных алгебраических уравнений с матрицами такой же структуры, что и B_j. Поэтому для вычисления $V_j^{(s+1)}$, $j = 0, 1, \ldots, M$ требуется выполнить $O(M \cdot N \cdot \log_2 M)$ арифметических операций.

Отметим, что, как и в методе полной редукции, векторы $p_j^{(k+1)}(V^{(s)})$, $q_j^{(k+1)}(V^{(s)})$ можно запоминать в ячейках памяти, в которые ранее заносились $p_j^{(k)}(V^{(s)})$, $q_j^{(k)}(V^{(s)})$. Следовательно, для запоминания этих величин при всех k достаточно $2(M-1) \cdot N$ ячеек памяти.

3. Изучим сходимость предлагаемого алгоритма. Будем полагать выполненным условие

$$\| B_j^{-1} \| \leqslant 1/2, \; j = 1, 2, \ldots, M-1, \tag{11}$$

из которого следуют неравенства:

$$\| [B_j^{(k)}]^{-1} \| \leqslant 1/2, \; \| [B_j^{(k+1)}]^{-1} B_j^{(k)} \| \leqslant 1, \; \| [B_j^{(k+1)}]^{-1} (B_j^{(k)})^2 \| \leqslant 2. \tag{12}$$

Если при этом $\| B_j - B_{j-1} \| \leqslant \tau$, $j = 2, 3, \ldots, M-1$, то

$$\| [B_j^{(k)}]^{-1} - [B_{j-1}^{(k)}]^{-1} \| \leqslant 4^{k-1} \tau. \tag{13}$$

Обозначим $\varepsilon_j^{(s)} = V_j^* - V_j^{(s)}$, $A = \max\{\| A_j \|, \| C_j \|, 1\}$, $\omega = \max\{\| E - A_j \|, \| E - C_j \|\}$. Вычитая (10) из (3), получаем уравнение для $\varepsilon_j^{(s+1)}$: $\varepsilon_j^{(s+1)} = [B_j^{(k)}]^{-1} (A_{j-2^k+1} \varepsilon_{j-2^k}^{(s+1)} + C_{j+2^k-1} \varepsilon_{j+2^k}^{(s+1)}) - Q_j^{(k)}(\varepsilon^{(s)})$, $Q_j^{(k)}(\varepsilon^{(s)}) = p_j^{(k)}(\varepsilon^{(s)}) + [B_j^{(k)}]^{-1} q_j^{(k)}(\varepsilon^{(s)})$. Отсюда

$$\max_j \| \varepsilon_j^{(s+1)} \| \leqslant A \cdot \max_j \{ \| \varepsilon_{j-2^k}^{(s+1)} \|, \; \| \varepsilon_{j+2^k}^{(s+1)} \| \} + \max_j \| Q_j^{(k)} (\varepsilon^{(s)}) \|, \qquad (14)$$

$$j = 2^k \cdot i, \quad i = 1, 3, \dots, 2^{m-k} - 1.$$

Так как $\varepsilon_0^{(s+1)} = \varepsilon_M^{(s+1)} = 0$, то, рассматривая (14) последовательно при $k = m-1, m-2, \dots, 0$, приходим к неравенству:

$$\max_{0 \leqslant j \leqslant M} \| \varepsilon_j^{(s+1)} \| \leqslant A^{m-1} \sum_{k=0}^{m-1} (\max_j \| Q_j^{(k)} (\varepsilon^{(s)}) \|). \qquad (15)$$

Оценим $\| Q_j^{(k)} (\varepsilon^{(s)}) \|$. Из (8) и (9) имеем:

$$Q_j^{(k+1)} (\varepsilon^{(s)}) = [B_j^{(k+1)}]^{-1} B_j^{(k)} \{ S_j^{(k)} \varepsilon_{j-2^{k+1}}^{(s)} + L_j^{(k)} \varepsilon_j^{(s)} + P_j^{(k)} \varepsilon_{j+2^{k+1}}^{(s)} +$$
$$+ B_j^{(k)} Q_j^{(k)} (\varepsilon^{(s)}) + A_{j-2^k+1} Q_{j-2^k}^{(k)} (\varepsilon^{(s)}) + C_{j+2^k-1} Q_{j+2^k}^{(k)} (\varepsilon^{(s)}) \}, \qquad (16)$$

где $S_j^{(k)} = ([B_j^{(k)}]^{-1} - A_{j-2^k+1} [B_{j-2^k}^{(k)}]^{-1}) A_{j-2^{k+1}+1}$,

$L_j^{(k)} = 2 [B_j^{(k)}]^{-1} - A_{j-2^k+1} [B_{j-2^k}^{(k)}]^{-1} C_{j-1} - C_{j+2^k-1} [B_{j+2^k}^{(k)}]^{-1} A_{j+1}$,

$P_j^{(k)} = ([B_j^{(k)}]^{-1} - C_{j+2^k-1} [B_{j+2^k}^{(k)}]^{-1}) C_{j+2^{k+1}-1}$.

Из (13) следует: $\| S_j^{(k)} \| \leqslant A (8^k \tau/4 + \omega/2)$, $\| L_j^{(k)} \| \leqslant A (8^k \tau/2 + 2\omega)$, $\| P_j^{(k)} \| \leqslant A (8^k \tau/4 + \omega/2)$. Учитывая (12), из (16) получаем: $\| Q_j^{k+1} (\varepsilon^{(s)}) \| \leqslant$ $\leqslant A (8^k + 3\omega) \max_j \| \varepsilon_j^{(s)} \| + 4A \max_j \| Q_j^{(k)} (\varepsilon^{(s)}) \|$. Поскольку $Q_j^{(0)} (\varepsilon^{(s)}) = 0$, то

$$\max_j \| Q_j^{(l)} (\varepsilon^{(s)}) \| \leqslant A^l \sum_{\nu=0}^{l-1} 4^{l-\nu-1} (8^\nu \tau + 3\omega) \max_j \| \varepsilon_j^{(s)} \|. \qquad (17)$$

Таблица 1

Погрешность решения задачи (20) из [5] на s-й итерации

N	4	8	16	32	64
$\varepsilon^{(1)}$	$1{,}8 \cdot 10^{-5}$	$4{,}1 \cdot 10^{-4}$	$4{,}7 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-4}$	$5{,}3 \cdot 10^{-4}$
$\varepsilon^{(2)}$	$3{,}6 \cdot 10^{-7}$	$2 \cdot 10^{-6}$	$7{,}5 \cdot 10^{-6}$	$3{,}7 \cdot 10^{-5}$	$1{,}1 \cdot 10^{-4}$

Таблица 2

Число итераций для решения задачи (21) из [5] с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$

c_2/c_1	$N=4$	$N=8$	$N=16$	$N=32$	$N=64$
2	3	3	4	4	4
8	3	4	4	5	5
32	3	3	5	5	6
128	3	3	5	5	6
512	3	3	4	5	6

Неравенства (15) и (17) дают возможность получить окончательную оценку:

$$\max_j \| \varepsilon_j^{(s+1)} \| \leqslant A^{2(m-1)} \left(\frac{\tau}{28} M^3 + \frac{\omega}{3} M^2 \right) \max_j \| \varepsilon_j^{(s)} \|,$$

которая показывает, что в случае решения по методу сеток задачи Дирихле для дифференциальных уравнений, близких к уравнению Пуассона, предлагаемый алгоритм будет сходиться со скоростью, не зависящей от числа узлов сетки.

4. Численные эксперименты по решению разностных граничных задач с помощью предлагаемого алгоритма на ЭВМ проводились аналогично численным экспериментам по алгоритму из [5]. Некоторые результаты приводятся в табл. 1 и 2.

Список литературы

1. Самарский А. А. Теория разностных схем. М., 1983.
2. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М., 1978.
3. Ильин В. П. Численные методы решения задач электрофизики. М., 1985.
4. Ильин В. П. // Сиб. матем. журн. 1985. Т. 26. № 1. С. 83.
5. Басик В. А. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1989. № 3. С. 38.

Поступила в редакцию 03.12.87.

УДК 539.3

Ю. В. ВАСИЛЕВИЧ

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ОРТОТРОПНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

В работе [1] изложен метод решения термоупругой задачи для ортотропного полупространства, на граничной плоскости которого задано неравномерное распределение стационарного температурного поля. Настоящая статья посвящена решению контактной задачи термоупругости. В основу его положено новое представление общих формул для компонентов напряжений и перемещений, полученных в [1].

Пусть на ортотропное полупространство $D^+(z>0)$, обладающее прямолинейной тепловой и упругой анизотропией, действует абсолютно жесткий, произвольной формы в плане плоский штамп. Трение между штампом и полупространством по области контакта S_1 отсутствует. Положим, что поверхность штампа имеет температуру $T=T_0(x, y)$; тепловой контакт штампа и полупространства в S_1, а также полупространства и среды ($T_{\text{ср}}=0$) в $S_2=S-S_1$ совершенный, т. е. температурный скачок на поверхности соприкасающихся тел и среды не возникает. Граничная плоскость полупространства S перпендикулярна к одному из трех главных направлений упругости тела, параллельных осям декартовых координат x, y, z, которые образуют правую тройку.

Граничные условия для стационарного температурного поля в S имеют вид $T=T_0(x, y)$ в S_1, $T=0$ в S_2.

Как известно, в области D^+ квазигармоническая функция температуры $T(x, \bar{y}, \bar{z})$ определяется по формуле

$$T(x, \bar{y}, \bar{z}) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{S_1} \frac{\bar{z}\, T(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta}{[(x-\alpha)^2+(\bar{y}-\beta)^2+\bar{z}^2]^{3/2}}, \tag{1}$$

где $\bar{y}=\bar{\mu}y$, $\bar{z}=\bar{\lambda}z$, $\bar{\mu}=\sqrt{k_1/k_2}$, $\bar{\lambda}=\sqrt{k_1/k_3}$, k_i $(i=1, 2, 3)$ — коэффициенты теплопроводности в главных направлениях упругости тела.

Запишем граничные условия для контактной задачи:

$$\begin{gathered}\tau_{xz1}+\tau_{xz2}=0,\ \tau_{yz1}+\tau_{yz2}=0 \text{ в } S,\\ \sigma_{z1}+\sigma_{z2}=0 \text{ в } S_2,\ w_1+w_2=w_0(x, y) \text{ в } S_1.\end{gathered} \tag{2}$$

Здесь индекс 2 относится к компонентам напряжения и осадке, вызванным температурным полем; индекс 1 — к компонентам упругого состояния; $w_0(x, y)$ — заданное перемещение.

Сохраняя обозначения работы [1] для составляющих термоупругого состояния, приведем выражения для σ_{z2}, τ_{xz2}, τ_{yz2}, w_2: