

# Математика и механика



УДК 519.624

И. Ф. КУЛЕШОВА, П. И. МОНАСТЫРНЫЙ

## ВАРИАНТ МЕТОДА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ОРТОГОНАЛЬНОЙ ПРОГОНКИ ДЛЯ ЗАДАЧ С ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ

Значительное число прикладных граничных задач с малым параметром при старшей производной, описывающих диффузионно-конвективные процессы или родственные явления в физике, механике и других областях науки, являются такими математическими моделями, численное решение которых сопряжено с преодолением существенных трудностей, обусловленных неустойчивостью процесса [1]. До сих пор многие методы решения задач с пограничным слоем нельзя считать строго обоснованными, и успех их применения часто бывает связан с использованием эвристических приемов, а также глубоким и неформальным проникновением в суть задачи. Поэтому проблема создания вычислительных методов для упомянутого класса задач с такими свойствами, как универсальность, высокая степень общности, устойчивость и удобная реализуемость на ЭВМ, по-прежнему актуальна.

Рассмотрим два примера типичных граничных задач с пограничным слоем [1] и фиксированным малым параметром ( $\epsilon \geq \epsilon_0 > 0$ ) при старшей производной:

$$Ly(x) \equiv \epsilon y''(x) + a(x)y'(x) - b(x)y(x) = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad (1)$$

$$B_0 y(0) \equiv y(0) = A, \quad B_1 y(1) \equiv y(1) = B, \quad a(x) \geq \alpha > 0, \quad b(x) \geq 0, \quad (2)$$

$$Ly(x) \equiv -\epsilon y''(x) + b(x)y(x) = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad (3)$$

$$B_0 y(0) \equiv y(0) = A, \quad B_1 y(1) \equiv y(1) = B, \quad b(x) \geq \beta > 0. \quad (4)$$

Для решения задач вида (1)–(4) использовались различные численные методы [1]. Во всех случаях вводились постоянные и переменные подгонные параметры  $\sigma(\rho)$ , чтобы придать методу желаемые свойства. Можно, например, потребовать, чтобы асимптотическое разложение решения дискретной задачи давало хорошее представление асимптотического разложения решения непрерывной задачи. Однако уже при наличии двух пограничных слоев возникают трудности, и на задачу необходимо накладывать довольно обременительные условия. Возникает вопрос о построении универсальных методов для задач с более естественными предположениями относительно данных. Эта цель может быть в известной мере достигнута с помощью модификаций метода прогонки [2–5].

Рассмотрим граничную задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (о. д. у.):

$$y_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + f_1(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (5)$$

$$y_2' = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + f_2(x), \quad a \leq x \leq b \quad (6)$$

с условиями вида

$$\alpha_1 y_1(a) + \beta_1 y_2(a) = \gamma_1, \quad \alpha_1^2 + \beta_1^2 = 1, \quad (7)$$

$$\alpha_2 y_1(b) + \beta_2 y_2(b) = \gamma_2, \quad \alpha_2^2 + \beta_2^2 = 1. \quad (8)$$

Зависимость  $a_{ik}(x)$  и  $f_i(x)$  от  $\varepsilon \geq \varepsilon_0 > 0$  здесь и далее не помечается. Будем считать, что  $a_{ik}(x)$ , ( $i, k=1, 2$ ),  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$  непрерывны на  $[a, b]$  и существует единственное решение задачи. Суть предлагаемого метода в следующем. Пусть  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  — искомое решение рассматриваемой граничной задачи. Введем вспомогательную функцию  $\Theta(x)$  и новые неизвестные функции  $u(x)$  и  $v(x)$  по формулам [2, 3]:

$$u = m_1(x, \varepsilon) y_1(x) \sin \Theta(x) + m_2(x, \varepsilon) y_2(x) \cos \Theta(x), \quad (9)$$

$$v = m_1(x, \varepsilon) y_1(x) \cos \Theta(x) - m_2(x, \varepsilon) y_2(x) \sin \Theta(x), \quad (10)$$

где  $\varepsilon \geq \varepsilon_0 > 0$ ;  $m_1(x, \varepsilon) > 0$  и  $m_2(x, \varepsilon) > 0$  — функции, выбор которых в зонах пограничных слоев должен быть согласован с поведением функций  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  и должен быть таким, чтобы произведения  $m_1(x, \varepsilon) y_1(x)$  и  $m_2(x, \varepsilon) y_2(x)$  были в необходимой мере стабилизированы. Можно, например, подобрать их таким образом, чтобы выполнялись условия  $m_1(x, \varepsilon) y_1(x) \approx \text{const}$ ,  $m_2(x, \varepsilon) y_2(x) \approx \text{const}$ . Из соотношений (9), (10) получим выражения для  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$ :

$$m_1(x, \varepsilon) y_1(x) = \sin \Theta(x) u(x) + \cos \Theta(x) v(x), \quad (11)$$

$$m_2(x, \varepsilon) y_2(x) = \cos \Theta(x) u(x) - \sin \Theta(x) v(x). \quad (12)$$

Продифференцировав (9), (10) и заменив в полученных выражениях  $y_1'(x)$ ,  $y_2'(x)$  по формулам (5), (6), а  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  — (11), (12), можно получить следующие уравнения для  $u(x)$  и  $v(x)$ :

$$u' = b_{11}(x) u + b_{12}(x) v + c_1(x), \quad (13)$$

$$v' = b_{21}(x) u + b_{22}(x) v + c_2(x). \quad (14)$$

Здесь введены обозначения:

$$b_{11} = \left( \frac{m_1'}{m_1} + a_{11} \right) \sin^2 \theta + \left( \frac{m_1}{m_2} a_{12} + \frac{m_2}{m_1} a_{21} \right) \sin \theta \cdot \cos \theta + \left( \frac{m_2'}{m_2} + a_{22} \right) \cos^2 \theta,$$

$$b_{12} = \theta' + \left[ a_{11} - a_{22} + \frac{m_1'}{m_1} - \frac{m_2'}{m_2} \right] \sin \theta \cdot \cos \theta + \frac{m_2}{m_1} a_{21} \cos^2 \theta - \\ - \frac{m_1}{m_2} a_{12} \sin^2 \theta,$$

$$b_{21} = \left[ a_{11} - a_{22} + \frac{m_1'}{m_1} - \frac{m_2'}{m_2} \right] \sin \theta \cdot \cos \theta - \frac{m_2}{m_1} a_{21} \sin^2 \theta + \frac{m_1}{m_2} a_{12} \cos^2 \theta - \theta',$$

$$b_{22} = \left( a_{11} + \frac{m_1'}{m_1} \right) \cos^2 \theta + \left( a_{22} + \frac{m_2'}{m_2} \right) \sin^2 \theta - \left[ \frac{m_1}{m_2} a_{12} + \frac{m_2}{m_1} a_{21} \right] \cos \theta \cdot \sin \theta,$$

$$c_1 = m_1 \cdot f_1 \cdot \sin \theta + m_2 \cdot f_2 \cdot \cos \theta,$$

$$c_2 = m_1 \cdot f_1 \cdot \cos \theta - m_2 \cdot f_2 \cdot \sin \theta,$$

где аргументы у всех функций опущены для простоты записи.

Метод осуществим, если систему уравнений (13), (14) удастся разделить. Предполагаем, что функция  $\Theta(x)$  известна на  $[a, b]$ . Эти уравнения можно разделить, положив, например,  $b_{12}(x) = 0$ . Тогда для  $\Theta(x)$ :

$$\theta' + \left[ a_{11} - a_{12} + \frac{m_1'}{m_1} - \frac{m_2'}{m_2} \right] \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta + \frac{m_2}{m_1} a_{21} \cos^2 \theta - \\ - \frac{m_1}{m_2} a_{12} \sin^2 \theta = 0. \quad (15)$$

Таким образом, дифференциальные уравнения для функций  $\Theta(x)$ ,  $u(x)$ ,  $v(x)$  таковы, что их можно численно решать последовательно, вначале уравнение (15), затем (13) и, наконец, (14). Формулы вычисления начальных условий для (15) и (13) даны в [2]. Обратная прогонка для (14) будет осуществляться следующим образом. Начальное условие для функции  $v(x)$  определим в точке  $x=b$ . Потребуем, чтобы значения  $y_1(b)$

и  $y_2(b)$ , определяемые по формулам (11), (12), удовлетворяли граничному условию (8). Это будет иметь место при

$$v(b) = \frac{1}{\Delta} \left[ \gamma_2 - \left( \frac{\alpha_2}{m_1(b, \varepsilon)} \sin \theta(b) + \frac{\beta_2}{m_2(b, \varepsilon)} \cos \theta(b) \right) u(b) \right] \quad (16)$$

в предположении, что  $\Delta = \frac{\alpha_2}{m_1(b, \varepsilon)} \cos \theta(b) - \frac{\beta_2}{m_2(b, \varepsilon)} \sin \theta(b) \neq 0$ . Теперь функцию  $v(x)$  можно найти на  $[a, b]$  как решение задачи Коши для д. у. (14) с начальным условием (16) в точке  $x = b$ . Это и будет обратная прогонка. После определения функций  $\Theta(x)$ ,  $u(x)$ ,  $v(x)$  искомым решением — функции  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  — находится по (11), (12). Проверкой легко устанавливается, что найденные таким образом функции  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  являются искомым решением. Исследование устойчивости рассмотренного алгоритма проводится обычным путем [2, 3].

Для демонстрации достоинств изложенного метода приведем численное решение на ЭВМ трех задач [1]:

$$-\varepsilon y''(x) + (1+x)^2 y(x) = 4(3x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 1), \quad x \in [0, 1], \quad (17)$$

$$y(0) = -1, \quad y(1) = 0, \quad \varepsilon = 0,0078125, \quad h = 1/16, \quad (18)$$

$$\varepsilon y''(x) + (1+x^2) y'(x) - (x-1/2)^2 y(x) = -(e^x + x^2), \quad (19)$$

$$y(0) = -1, \quad y(1) = 0, \quad \varepsilon = 0,03125, \quad h = 1/16, \quad (20)$$

$$\varepsilon y''(x) + (1+x^2) y'(x) - (x-1/2)^2 y(x) = 4(3x^2 - 3x + 1)(x+1)^2, \quad (21)$$

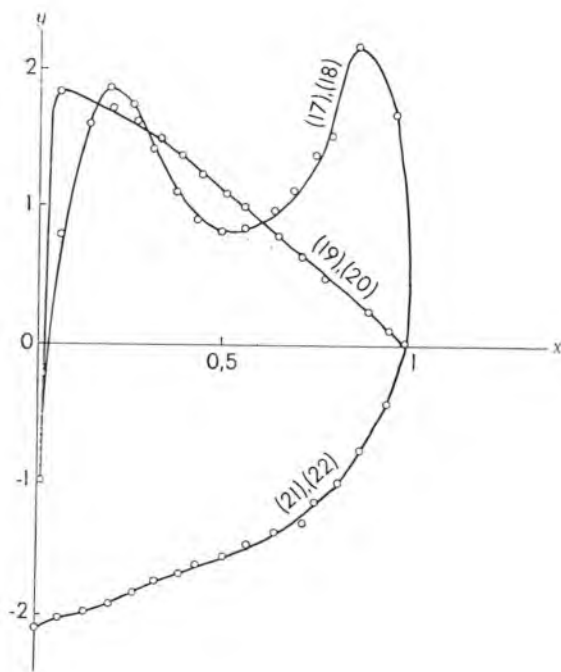
$$y(0) - y'(0) = 0, \quad y(1) = 0, \quad \varepsilon = 0,0625, \quad h = 1/16. \quad (22)$$

Значения функций  $\Theta(x)$ ,  $u(x)$ ,  $v(x)$ ,  $y(x)$  для граничных задач (17) — (22)

№ п.п.	$x_i$	$\Theta(x)$	$u(x)$	$v(x)$	$y(x)$
(17), (18)	2/16	1,64174	1,37888	-4,68451	1,70751
	3/16	1,64638	1,93038	1,07378	1,84378
	4/16	1,64411	1,92147	2,97650	1,69829
	13/16	1,62064	1,85969	-3,91031	2,05224
	14/16	1,61892	2,31192	-2,24281	2,30937
	15/16	1,61732	2,86214	1,64229	2,09522
(19), (20)	0	$\pi/2$	-1	-104,285	-1
	1/16	1,76364	-0,828229	-13,8776	1,84670
	2/16	2,51363	0,355856	-1,33407	1,68864
(21), (22)	0	$-\pi/4$	0	-4,06801	-2,87653
	1/16	-0,451854	2,15522	-1,97181	-2,71496
	2/16	-0,266897	2,95240	-1,90015	-2,61156

Наиболее интересные моменты численного решения этих задач (см. таблицу) получены с точностью  $\delta = 1/2 \cdot 10^{-5}$ ; полностью решения схематично изображены на рисунке, где кружочками помечены численные значения решений в соответствующих точках сетки.

Во всех известных методиках, предназначенных для решения граничных задач с пограничным слоем вида (1), (2), (3), (4), используются подгоночные коэффициенты, содержащие экспоненты [1, 4, 6, 7]. В изложенном методе роль подобных коэффициентов принадлежит функциям  $m_1(x, \varepsilon) > 0$  и  $m_2(x, \varepsilon) > 0$ , которые, хотя и моделируют профили пограничных слоев, но могут быть в достаточной мере произвольными. Численные результаты решения задач (17) — (22) получены при  $m_1(x, \varepsilon) \equiv m_2(x, \varepsilon) \equiv 1$ . Здесь не было необходимости вводить моделирующие



Графики решений задач (17)—(22)

множители. Сравнение аналогичных результатов [1] с полученными говорит о существенном преимуществе варианта метода ортогональной прогонки. Эти результаты значительно лучше даже при  $m_1 = m_2 = 1$ , чем аналогичные в [1, ч. III, § 2].

Итак, традиционный подход к решению граничных задач с пограничным слоем [1], основанный на использовании трехточечных разностных схем с введением подгоночных коэффициентов, предлагается заменить универсальной и достаточно гибкой процедурой, основным этапом которой является численное решение ряда задач Коши с вполне определенными начальными значениями [9]. Для этих целей может быть эффективно использован широкий арсенал численных методов, обладающих высокой гибкостью, в том числе и равномерной сходимостью [8, 9], возможностью применения переменного шага интегрирования, а также выбора практически любого порядка точности метода, реализуемого на ЭВМ.

### Список литературы

1. Дулан Э., Миллер Ж., Шилдс У. Равномерные численные методы решения задач с пограничным слоем. М., 1983.
2. Монастырный П. И. // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1967. Т. 7. № 2. С. 284.
3. Монастырный П. И. Там же. 1971. Т. 11. № 4. С. 925.
4. Самарский А. А. Теория разностных схем. М., 1983.
5. Абрамов А. А. Вариант метода прогонки // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1961. Т. 1. № 2. С. 349.
6. Ильин А. М. // Матем. заметки. 1969. Т. 6. № 2. С. 237.
7. Шишкин Г. И. // Докл. АН СССР. 1979. Т. 245. № 4. С. 804.
8. Деккер К., Вервер Я. Устойчивость методов Рунге—Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений. М., 1988.
9. Кулешова И. Ф. Устойчивость и оценки погрешности метода дифференциальной ортогональной прогонки в случае задач с пограничным слоем / Редкол. журн. «Вестн АН БССР. Сер. физ.-мат. наук». Минск, 1987. 13 с. Деп. в ВИНТИ 24.07.87. № 5354-В-87.

Поступила в редакцию 24.04.86.