

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе
и образовательным инновациям



О.Н. Здрок

«12»

2020 г.

Регистрационный № УД- 9163 /уч.

Методы численного анализа

**Учебная программа учреждения высшего образования
по учебной дисциплине для специальности:**

1-31 80 03 Математика и компьютерные науки

Профилизации: Математика;
Математика и дидактика математики

2020 г.

Учебная программа составлена на основе Образовательного стандарта высшего образования ОСВО 1-31 80 03-2019 и учебных планов G31-017/уч., G31з-018/уч., G31-088/уч., G31з-089/уч. от 11.04.2019

СОСТАВИТЕЛЬ:

В.М.Волков, зав. кафедрой веб-технологий и компьютерного моделирования Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук

РЕЦЕНЗЕНТ:

Громыко Г.Ф., заведующая отделом Вычислительной математики Института математики НАН Беларуси, кандидат физико-математических наук,

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой веб-технологий и компьютерного моделирования

(протокол № 9 от 20.05.2020);

Научно-методическим советом Белорусского государственного университета (протокол № 5 от 17.06.2020).

Заведующий кафедрой



В.М.Волков

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Цели и задачи учебной дисциплины

Цель учебной дисциплины является изучение современных методов численного анализа дифференциальных краевых задач и задач математической физики.

Задачи учебной дисциплины:

- ознакомление с основными классами численных методов для решения дифференциальных задач (методы конечных элементов, конечных разностей и спектральные методы);
- развитие навыков численного анализа математических моделей на основе краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными;
- развитие способностей эффективной реализации алгоритмов численного анализа дифференциальных моделей и выбора наиболее рационального метода для решения конкретных прикладных задач.

Место учебной дисциплины в системе подготовки специалиста с высшим образованием (магистра).

Учебная дисциплина является дисциплиной компонента учреждения высшего образования и входит в состав модуля «Численные методы и анализ данных» для профилизации «Математика» и в состав Дисциплин по выбору для профилизации «Математика и дидактика математики»

Её преподавание тесно связано с дисциплинами «Приложения компьютерного моделирования», «Уравнения математической физики», «Численные методы», «Математический анализ».

Требования к компетенциям

Учебная дисциплина «Методы численного анализа» направлена на формирование следующей специализированной компетенции:

СК-2. Быть способным использовать методы компьютерного моделирования на основе современных методик численного анализа прикладных дифференциальных задач

В результате изучения учебной дисциплины студент магистратуры должен:

знать:

- основные подходы к аппроксимации дифференциальных задач на основе спектральных и конечноразностных методов, а также методов конечных элементов;
- способы построения численных алгоритмов оптимальной вычислительной сложности;

уметь:

- реализовать численные алгоритмы в среде Matlab используя стандартные функций матричных операций, обеспечивающие векторизацию алгоритма.

- оценивать корректность результатов численного решения задачи

владеть:

- методами эффективного программирования в среде Matlab;
- методами визуализации решений задач.

Структура учебной дисциплины

Форма получения высшего образования очная (дневная) и заочная.

Дисциплина изучается в 3 семестре. Всего на изучение учебной дисциплины «Методы численного анализа» отведено:

для профилизации «Математика» очной формы обучения – 108 часов, в том числе 36 аудиторных часов, из них: лекции – 18 часов, лабораторные занятия – 18 часов.

для заочной формы получения высшего образования – 8 аудиторных часов, из них 4 часа лекции, 4 часа лабораторные занятия.

для профилизации «Математика и дидактика математики» очной формы обучения – 108 часов, в том числе 36 аудиторных часов, из них: лекции – 12 часов (в том числе 6 часов дистанционной формы обучения), лабораторные занятия – 12 часов (в том числе 6 часов дистанционной формы обучения), управляемая самостоятельная работа - 12 часов (внеаудиторный контроль).

для заочной формы получения высшего образования – 8 аудиторных часов, из них 4 часа лекции, 4 часа лабораторные занятия.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 3 зачетные единицы.

Формой текущей аттестации по учебной дисциплине является зачет.

ТЕМА 1. Особенности дискретизации дифференциальных задач.

Ряды Фурье и дискретное преобразование Фурье. Свойства дискретного преобразования Фурье. Теорема Найквиста-Котельникова. Алгоритм быстрого дискретного преобразования Фурье (БДПФ).

ТЕМА 2. Решение краевых задач с использованием дискретного преобразования Фурье.

Непрерывное и дискретное преобразование Фурье. Дифференцирование функций с использованием преобразования Фурье. Решение многомерного уравнения Пуассона в прямоугольной области с использованием БДПФ.

ТЕМА 3. Разностные методы решения задач математической физики

Разностный аналог оператора Лапласа и его свойства. Спектр собственных значений. Понятие спектральной согласованности. Разностный метод решения задачи Дирихле в прямоугольной области.

ТЕМА 4. Спектральные методы на основе матриц спектрального дифференцирования Чебышева.

Понятие матрицы спектрального дифференцирования. Свойства полиномов Чебышева. Спектральный метод решения задачи Дирихле в прямоугольной области. Экспоненциальная сходимость спектрального метода.

ТЕМА 5. Численный анализ дифференциальных краевых задач с использованием метода конечных элементов.

Понятие конечных элементов. Слабая постановка краевой задачи. Метод Галеркина. Сходства и отличия методов конечных разностей и конечных элементов.

ТЕМА 6. Численные методы решения нестационарных задач математической физики.

Разностные схемы для нестационарного уравнения теплопроводности. Условия устойчивости, консервативность, монотонность.

ТЕМА 7. Решение многомерных задач. Метод переменных направлений и методы расщепления.

Схема переменных направлений для двумерных уравнений теплопроводности. Понятие экономичных численных методов. Итерационный метод переменных направлений. Анализ методов расщепления на основе понятия матричной экспоненты.

ТЕМА 8. Решение нелинейных задач математической физики.

Линейное и Нелинейное уравнение переноса. Метод дробных шагов для решения нелинейного уравнения Шредингера

ТЕМА 9. Многосеточные итерационные методы реализации больших систем сеточных уравнений.

Число обусловленности матрицы и скорость сходимости итерационных методов решения СЛАУ. Неявные итерационные методы. Спектрально оптимальный переобуславливатель. Вычислительные качества и схема простейшего многосеточного метода.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ профилизации «Математика» и «Математика и дидактика математики»

заочная форма получения образования

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов						Литература	Формы контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное	Количество часов УСР		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	Особенности дискретизации дифференциальных задач.	0.5			0.5			[1,2,4]	Экспресс-опрос
2	Решение краевых задач с использованием дискретного преобразования Фурье.	0.5			0.5			[1,2]	Отчет по лабораторной работе
3	Разностные методы решения задач математической физики.	0.5			0.5			[1,6]	Экспресс-опрос
4	Спектральные методы на основе матриц спектрального дифференцирования Чебышева.	0.5			0.5			[1,4]	Экспресс-опрос
5	Численный анализ дифференциальных краевых задач с использованием метода конечных элементов.	0.5			0.5			[1,2,6]	Отчет по лабораторной работе
6	Численные методы решения нестационарных задач математической физики.	0.5			0.5			[1,6]	Отчет по лабораторной работе
7	Решение многомерных задач. Метод переменных направлений и методы расщепления.	0.5			0.5			[1,6]	Отчет по лабораторной работе
8	Решение нелинейных задач математической физики.	0.5			0.5			[1,2]	Экспресс-опрос
9	Многосеточные итерационные методы реализации больших систем сеточных уравнений.							[1,5, 7]	Экспресс-опрос
	ВСЕГО ЧАСОВ	4			4				

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

специализация «Математика»

дневная форма получения образования

Формы контроля знаний										
Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов VCP	Литература		
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное				
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1	Особенности дискретизации дифференциальных задач.	2			2			[1,2,4]	Экспресс-опрос	
2	Решение краевых задач с использованием дискретного преобразования Фурье.	2			2			[1,2]	Отчет по лабораторной работе	
3	Разностные методы решения задач математической физики.	2			2			[1,6]	Экспресс-опрос	
4	Спектральные методы на основе матриц спектрального дифференцирования Чебышева.	2			2			[1,4]	Отчет по лабораторной работе	
5	Численный анализ дифференциальных краевых задач с использованием метода конечных элементов.	2			2			[1,2,6]	Отчет по лабораторной работе	
6	Численные методы решения нестационарных задач математической физики.	2			2			[1,6]	Отчет по лабораторной работе	
7	Решение многомерных задач. Метод переменных направлений и методы расщепления.	2			2			[1,6]	Отчет по лабораторной работе	
8	Решение нелинейных задач математической физики.	2			2			[1,2]	Отчет по лабораторной работе	
9	Многосеточные итерационные методы реализации больших систем сеточных уравнений.	2			2			[1,5, 7]	Отчет по лабораторной работе	
	ВСЕГО ЧАСОВ	18			18					

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

профилизация «Математика дидактика математики»

дневная форма получения образования с применением дистанционных образовательных технологий (ДО)

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов VCP	Литература	Формы контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	Особенности дискретизации дифференциальных задач.	1						[1,2,4]	Экспресс-опрос
2	Решение краевых задач с использованием дискретного преобразования Фурье.	2			2		2 вне-аудит.	[1,2]	Отчет по лабораторной работе
3	Разностные методы решения задач математической физики.	1			2		2 вне-аудит.	[1,6]	Экспресс-опрос
4	Спектральные методы на основе матриц спектрально-го дифференцирования Чебышева.	1			1		2 вне-аудит.	[1,4]	Отчет по лабораторной работе
5	Численный анализ дифференциальных краевых задач с использованием метода конечных элементов.	2(ДО)			2(ДО)		2 вне-аудит.	[1,2,6]	Отчет по лабораторной работе
6	Численные методы решения нестационарных задач математической физики.	1			1			[1,6]	Отчет по лабораторной работе
7	Решение многомерных задач. Метод переменных направлений и методы расщепления.	1(ДО)			1(ДО)		2 вне-аудит.	[1,6]	Отчет по лабораторной работе
8	Решение нелинейных задач математической физики.	1(ДО)			1(ДО)		2 вне-аудит.	[1,2]	Отчет по лабораторной работе
9	Многосеточные итерационные методы реализации больших систем сеточных уравнений.	2 (ДО)			2(ДО)			[1,5, 7]	Отчет по лабораторной работе
	ВСЕГО ЧАСОВ	12			12		12		

ЛИТЕРАТУРА

Основная:

1. Волков В.М. и др. Численный анализ и оптимизация. Минск. Белгослес. 2017. 207 с.
2. Калиткин, Н. Н. Численные методы / Н. Н. Калиткин. – М.: Academia, 2018. – 96 с.
3. Самарский, А. А. Численные методы / А. А. Самарский, А. В. Гулин. – М.: Наука, 1989. 432 с.
4. Trefethen L. N. Spectral methods in MATLAB. – Society for industrial and applied mathematics, 2000.

Дополнительная литература

5. Бахвалов, Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – М.: Наука, 1987. 632 с.
6. Самарский, А.А. Численные методы математической физики / А.А. Самарский, А.В. Гулин. – М.: Альянс, 2016. – 432 с.
7. Ольшанский М. А. Лекции и упражнения по многосеточным методам – М.: Физматлит, 2005. 168 с.

Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой оценки

Контроль работы учащихся проходит в форме опроса на лекциях, а также во время устной защиты отчета по лабораторным работам. Оценка за ответы на лекциях и лабораторных занятиях включает в себя полноту ответа, наличие аргументации, глубину понимания основных идей и концепций, положенных в основу построения численных методов и эффективных алгоритмов их реализации (аппроксимация, устойчивость, сходимость, вычислительная сложность). При защите лабораторных работ ценится самостоятельность выполнения, умение критически оценивать полученные результаты.

Формой текущей аттестации по дисциплине «Методы численного анализа» учебным планом предусмотрен зачет. Зачет по дисциплине проходит в устной форме.

При формировании итоговой оценки используется рейтинговая оценка знаний магистранта, дающая возможность проследить и оценить динамику процесса достижения целей обучения. Рейтинговая оценка предусматривает использование весовых коэффициентов для текущего контроля знаний и текущей аттестации студентов по дисциплине.

Формирование оценки за текущую успеваемость:

- отчеты по лабораторным работам – 60 %;
- выполнение домашних заданий и результаты опроса на лекциях – 40 %.

Рейтинговая оценка по дисциплине рассчитывается на основе оценки текущей успеваемости и экзаменационной оценки с учетом их весовых коэффициентов. Вес оценки по текущей успеваемости составляет 40 %, экзаменационной оценки – 60 %.

Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы студентов

1. Изучить функцию дискретного преобразования Фурье (fft). Вычислить и построить графики преобразования Фурье для прямоугольной и треугольной функций, тригонометрической и Гауссовой функций.
2. Построить матрицу оператора разностной производной второго порядка. Оценить точность разностного дифференцирования на примере вычисления производных элементарных функций.
3. Построить матрицу спектрального дифференцирования Чебышева. Оценить точность спектрального дифференцирования на примере вычисления производных элементарных функций.
4. Построить матрицу жесткости краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка на основе линейных конечных элементов.
5. Сравнить эффективность неявной схемы Кранка-Николсон и схемы дробных шагов для решения уравнения теплопроводности в прямоугольной области, по аналогии с примером 3.8 [1, стр. 95-97].
6. Выполнить упражнение 3.5(6) [1, стр. 93].

Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины

При организации образовательного процесса используется **эвристический подход**, который предполагает демонстрацию многообразия решений большинства практических задач, среди которых необходимо выбрать наиболее рациональный подход. Например, всегда ли более высокий порядок точности метода обеспечивает более высокую его эффективность?

При организации образовательного процесса используется **практико-ориентированный подход**, который предполагает освоение численных алгоритмов посредством изучения типичных примеров их реализации и выработки навыков адаптации типовых примеров к решению более сложных задач.

При организации образовательного процесса используются **методы и приемы развития критического мышления**, которые предполагают оценку не только корректности полученного решения, но и рациональность подхода, использованного при этом.

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы учащихся

Для организации самостоятельной работы студентов по учебной дисциплине рекомендуется использовать упражнения из ученых пособий [1],[2]. Для углубленного изучения темы предлагается в виде домашнего задания реализовать численный алгоритм для решения конкретной задачи, сравнить эффективность различных численных методик на заданных примерах.

Для успешного выполнения самостоятельной работы следует использовать аналогию заданий для самостоятельной работы и примеров, разобранных, например в учебном пособии [1]. Данные примеры носят преимущественно практический характер. При этом важно обращать внимание на умение учащихся объяснить результаты численных экспериментов. Например, как изменяется точность численного дифференцирования при уменьшении шага сетки? Как может повлиять случайный шум, добавленный к «гладкой» сеточной функции на точность вычисления ее производных и т.п.

Примерный перечень вопросов к зачету

1. Ряды Фурье и дискретное преобразование Фурье.
2. Свойства дискретного преобразования Фурье.
3. Алгоритм быстрого дискретного преобразования Фурье (БДПФ).
4. Дифференцирование функций с использованием преобразования Фурье.
5. Решение многомерного уравнения Пуассона в прямоугольной области с использованием БДПФ.
6. Разностный аналог оператора Лапласа и его свойства.

7. Спектр собственных значений оператора Лапласа, понятие спектральной согласованности.
8. Разностный метод решения задачи Дирихле в прямоугольной области.
9. Понятие матрицы спектрального дифференцирования. Спектральный метод решения задачи Дирихле в прямоугольной области.
10. Экспоненциальная сходимость спектрального метода.
11. Понятие конечных элементов (слабая постановка краевой задачи метод Галеркина).
12. Разностные схемы для нестационарного уравнения теплопроводности. Условия устойчивости,
13. Консервативность и монотонность разностных схем.
14. Схема переменных направлений для двумерных уравнений теплопроводности.
15. Понятие экономичных численных методов. Итерационный метод переменных направлений.
16. Анализ погрешности методов расщепления на основе понятия матричной экспоненты.
17. Метод дробных шагов для решения нелинейного уравнения Шредингера
18. Число обусловленности матрицы и скорость сходимости итерационных методов решения СЛАУ.
19. Неявные итерационные методы.
20. Спектрально оптимальный переобусловливатель.
21. Вычислительные качества и схема простейшего многосеточного метода.

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УВО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменении в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)

ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ

на ____ / ____ учебный год

№п/ п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования (протокол № ____ от _____.)

Заведующий кафедрой
доктор. физ.-мат. наук, доцент

В.М.Волков

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета
доктор физ.-мат. наук, доцент

С.М.Босяков