

**БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**  
**ХИМИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ**  
**Кафедра физической химии**

**А. В. Блохин**

# **ТЕОРИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА**

**Курс лекций**

**В двух частях**

**Часть 1**

**МИНСК**  
**2002**

***Автор-составитель Блохин А.В.***, кандидат химических наук.

***Рецензенты:***

кандидат химических наук ***Н.Н. Горошко;***  
***Л.М. Володкович.***

Утверждено на заседании  
Ученого совета химического факультета  
29 марта 2002 г., протокол № 5.

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие представляет собой лекции по курсу «Теория эксперимента» для студентов IV курса химического факультета, специализирующихся на кафедре физической химии, и содержит основы современных методологических подходов к постановке и обработке результатов физико-химических исследований и математических методов, применяемых при планировании и оптимизации эксперимента.

В первой части пособия введено понятие о результатах эксперимента как случайных величинах, информация о которых содержится в законах распределения. Рассмотрен нормальный закон распределения вероятностей для непрерывных величин. Во многих прикладных задачах нет необходимости использовать законы распределения в полном виде, вместо них можно воспользоваться числовыми характеристиками случайной величины, в сжатой форме выражающими наиболее существенные особенности ее распределения. Введено понятие и рассмотрены свойства наиболее часто применяемых моментов распределения — математического ожидания и дисперсии. Рассмотрены основные понятия математической статистики: генеральная совокупность и случайная выборка, оценки генеральных параметров и их свойства, методы проверки статистических гипотез и построение доверительных интервалов для генерального среднего и дисперсии. Для получения оценок генеральных параметров используется метод максимального правдоподобия. Указаны способы оценки случайной и суммарной погрешности косвенных измерений. Представлены методы проверки однородности двух и более выборочных дисперсий, сравнения средних и расчета средневзвешенного значения величины.

Во второй части пособия рассмотрены основные методы корреляционного и регрессионного анализов, широко применяемых при обработке результатов физико-химических измерений. Введено понятие о стохастической связи между случайными величинами и коэффициенте корреляции, характеризующем тесноту линейной зависимости между ними. Коэффициенты полиномиальных зависимостей определяются методом наименьших квадратов, который обосновывается как частный случай метода максимального правдоподобия при нормальном распределении случайных величин. Использование полиномиальных моделей позволяет улучшать аппроксимацию экспериментальных данных, повышая порядок полиномов. Представлены основы дисперсионного анализа, использующего свойство аддитивности дисперсии изучаемой случайной величины, что дает возможность разло-

жить ее на отдельные составляющие, обусловленные влиянием независимых факторов или их взаимодействий. Рассмотрены основные положения и методы обработки результатов для однофакторного и двухфакторного дисперсионного анализов; метод планирования эксперимента по схеме латинского квадрата для трехфакторного анализа.

Изложены методы планирования эксперимента с использованием полиномиальных моделей, направленные на поиск оптимальных условий при неизвестном механизме протекания процессов. Показано, что выбор плана эксперимента определяется задачей исследования. Линейные модели используются в методе крутого восхождения по поверхности отклика. Для достижения экстремума может быть также использован метод симплекс-планирования. Для описания области, близкой к экстремуму, применяются композиционные планы второго порядка.

Лекции основаны на материале, представленном в следующих учебных пособиях:

1. *Ахназарова С.Л., Кафаров В.В.* Методы оптимизации эксперимента в химической технологии. М.: Высш. шк., 1985. 327 с.
2. *Спиридонов В.В., Лопаткин А.А.* Математическая обработка физико-химических данных. М.: МГУ, 1970. 221 с.
3. *Тейлор Дж.* Введение в теорию ошибок. М.: Мир, 1985. 272 с.

Изложенный в пособии материал условно систематизирован по разделам-лекциям и представляет собой *теоретическую основу* для рассмотрения практических вопросов и задач, возникающих при постановке, планировании и обработке физико-химических экспериментов. Многие положения и правила даны без математических доказательств, рассмотрение которых не является целью курса. Проведение с помощью этого пособия лекций-консультаций позволит, во-первых, высвободить дополнительное время для решения практических заданий в рамках отведенных на курс учебных часов (традиционно 24 лекционных часа и 10 часов семинарских занятий) и, во-вторых, активизировать самостоятельную работу студентов. На каждом занятии после обсуждения теоретических вопросов студентам будут предложены практические задачи, основанные на экспериментальных исследованиях, выполненных сотрудниками кафедры физической химии. Последние, после их апробации, составят в будущем третью часть данного пособия.

## ВВЕДЕНИЕ

Задачей большинства физико-химических экспериментов является количественное изучение каких-либо свойств вещества. Для этого проводятся измерения одной или нескольких физических величин с последующей обработкой полученных данных. Экспериментальные результаты всегда содержат погрешности, связанные с тем, что любые измерения сопровождаются действием и взаимодействием большого числа разнообразных и трудноучитываемых факторов. Конечной целью любого исследования является не только представление наилучшей, по мнению экспериментатора, оценки измеряемой величины, но и максимально достоверной оценки погрешности измерений.

Любой прибор или устройство для измерения физических величин можно рассматривать в виде объекта (рис. 1), для которого  $x_1, \dots, x_k$  — входные измеряемые и регулируемые параметры;  $w_1, \dots, w_l$  — неконтролируемые, случайным образом изменяющиеся параметры («шум» объекта);  $y_1, \dots, y_m$  — выходные параметры. Комплекс параметров  $x_1, \dots, x_k$  называют *основным*, поскольку он определяет условия эксперимента. Результат опыта зависит не только от основных параметров, но и от «шума» объекта, влияние которого носит случайный характер. Поэтому естественно рассматривать и результат эксперимента, и ошибку измерения как случайные величины, управляемые вероятностными законами, и применять для учета действия случайных факторов теорию вероятностей. Тогда влияние случайных ошибок на результат измерения можно количественно оценить при помощи математической статистики — науки, занимающейся применением вероятностных методов к решению задач в различных областях наук, в частности в задаче обработки результатов наблюдений.

Современная химическая промышленность выпускает несколько десятков тысяч наименований продуктов, в лабораториях разрабатываются сотни новых технологических процессов. Экспериментальное изучение механизмов протекания всех этих процессов нереально, между тем задачи оптимизации и управления этими процессами необходимо решать. Для этих целей успешно применяются экспериментально-статистические методы, с помощью которых составляется *математическая модель* объекта и при неизвестном механизме протекающих в объекте процессов изучается зависимость *отклика* системы на изменения основных параметров.

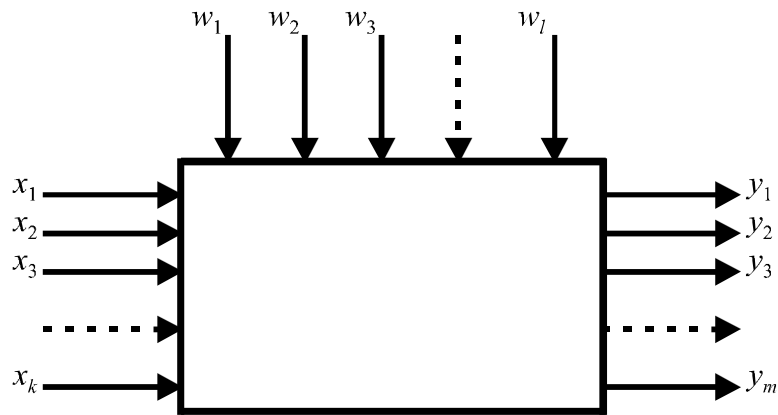


Рис. 1. Схема объекта.

Математической моделью объекта служит *функция отклика*, связывающая выходной параметр, характеризующий результаты эксперимента, с переменными, которые варьируют при проведении опытов:

$$y = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_k).$$

Независимые переменные  $x_1, x_2, \dots, x_k$  называют *факторами*, пространство с координатами  $x_1, x_2, \dots, x_k$  — *факторным пространством*, а геометрическое изображение функции отклика в факторном пространстве — *поверхностью отклика*.

Эффективность экспериментов в большой степени зависит от методов их проведения. *Пассивный* эксперимент является традиционным методом, когда ставится большая серия опытов с поочередным варьированием каждой из переменных. Обработка опытных данных проводится статистическими методами, позволяющими оптимизировать процедуру обработки и анализа эксперимента. Используя *активный* (спланированный) эксперимент, можно достичь существенно большего — оптимизировать и стадию постановки эксперимента. Под *планированием эксперимента* понимают оптимальное управление экспериментом в условиях неполной информации о механизме процесса. Развитие этой концепции связано с работами Р. Фишера, главная идея которых состоит в раздельной оценке эффектов в многофакторной ситуации. Широко применяемое планирование эксперимента при поиске оптимальных условий процесса связано с работами Бокса и Уилсона. В настоящее время методы планирования и оптимизации эксперимента широко применяются при изучении процессов в лабораторных и полужаводских условиях и несколько реже в промышленности.

## ЛЕКЦИЯ 1

**Случайные величины. Классификация ошибок измерений. Абсолютная и относительная погрешность. Прямые и косвенные измерения. Оценка погрешностей функций приближенных аргументов. Распределение случайных величин. Функция распределения и плотность распределения.**

### 1.1. Случайные величины.

#### Классификация ошибок измерений.

#### Абсолютная и относительная погрешность.

Под *случайной величиной* понимают величину, принимающую в результате испытания значение, которое принципиально нельзя предсказать, исходя из условий опыта. Случайная величина обладает целым набором допустимых значений, но в результате каждого отдельного опыта принимает лишь какое-то одно из них. В отличие от неслучайных величин, изменяющих свое значение только при изменении условий опыта, случайная величина может принимать различные значения даже при неизменном комплексе основных факторов.

Различают *дискретные* и *непрерывные* случайные величины. Возможные значения дискретных величин можно заранее перечислить. Значения непрерывной случайной величины не могут быть заранее перечислены, они заполняют собой некоторый интервал. Набор допустимых значений сам по себе слабо характеризует случайную величину. Чтобы ее полностью охарактеризовать, необходимо не только указать, какие значения она может принимать, но и как часто.

Каждый результат измерения — случайная величина. Отклонение результата реального измерения от истинного значения величины называется *ошибкой измерения*. («Ошибка» в научном смысле означает неизбежную погрешность, которая сопутствует всем измерениям). Ни одну физическую величину (длину, время, температуру и т.д.) невозможно измерить с полной определенностью. Лучшее, на что можно рассчитывать, — это свести ошибки к возможному минимуму и надежно рассчитать их величины.

Различают ошибки измерений трех видов:

1. *Грубые ошибки* возникают вследствие нарушения основных условий измерения. Результат, содержащий грубую ошибку, резко отличается по величине от остальных измерений, на чем основаны некоторые критерии исключения грубых ошибок.

2. *Систематические ошибки* постоянны во всей серии измерений или изменяются по определенному закону. Выявление их требует специальных исследований, их всегда стремятся свести к минимуму, а при необходимости они обычно учитываются введением соответствующих поправок в результаты измерения.
3. *Случайные ошибки* — ошибки измерения, остающиеся после устранения всех выявленных грубых и систематических ошибок. Они вызываются большим количеством таких факторов, эффекты действия которых столь незначительны, что их нельзя выделить в отдельности (при данном уровне техники измерения). При этом распределение случайных ошибок обычно симметрично относительно нуля: ошибки, противоположные по знаку, но равные по абсолютной величине, встречаются довольно часто.

Корректный способ представления результатов любого измерения состоит в том, что экспериментатор указывает свою наилучшую оценку измеряемой величины и интервал, в котором, как он уверен, она лежит. Чтобы охарактеризовать отклонение приближенного значения некоторой величины от ее истинного значения, вводят понятия абсолютной и относительной погрешностей, отвлекаясь от конкретного источника погрешностей.

Пусть  $A$  — точное значение исследуемой величины,  $a$  — ее наилучшая экспериментальная оценка (обычно среднее арифметическое серии измерений). Под *абсолютной ошибкой* (или *погрешностью*) величины  $a$  понимают абсолютное значение разности между этими значениями:

$$\varepsilon = |A - a| = |\Delta a|, \quad (1.1)$$

или

$$A = a \pm \varepsilon. \quad (1.2)$$

*Предельная абсолютная погрешность* определяется как

$$\varepsilon_{\text{пр.}} \geq |A - a|, \quad (1.3)$$

или

$$\varepsilon_{\text{пр.}} \geq \varepsilon, \quad (1.4)$$

при этом

$$(a + \varepsilon_{\text{пр.}}) \geq A \text{ и } A \geq (a - \varepsilon_{\text{пр.}}), \quad (1.5)$$

т. е. истинное значение искомой величины заведомо лежит в пределах

$$a - \varepsilon_{\text{пр.}} \leq A \leq a + \varepsilon_{\text{пр.}}. \quad (1.6)$$



Для характеристики относительной точности измерений, зависящей от значения измеряемой величины, вводится *относительная погрешность*:

$$\delta = \frac{\varepsilon}{|A|}, \quad (1.7)$$

$$\delta |A| = \varepsilon. \quad (1.8)$$

По аналогии с абсолютной погрешностью вводится также понятие *предельной относительной погрешности*:

$$\delta_{\text{пр.}} \geq \frac{\varepsilon}{|A|}, \quad (1.9)$$

или

$$\delta_{\text{пр.}} |A| \geq \varepsilon. \quad (1.10)$$

Тогда

$$\delta_{\text{пр.}} = \frac{\varepsilon_{\text{пр.}}}{|A|}, \quad (1.11)$$

или

$$\delta_{\text{пр.}} |A| = \varepsilon_{\text{пр.}}. \quad (1.12)$$

В вышеприведенные формулы входит неизвестная величина  $A$ , что делает невозможным численное определение погрешности. Практически поступают следующим образом: так как в большинстве случаев абсолютная погрешность много меньше самой измеряемой величины, т. е.  $\varepsilon \ll |A|$ ,  $\varepsilon \ll |a|$  или  $A \approx a$ , то для таких достаточно точных измерений можно записать:

$$\delta |a| \approx \varepsilon \text{ и } \delta_{\text{пр.}} |a| \approx \varepsilon_{\text{пр.}}.$$

Тогда с учетом определений абсолютной и относительной погрешностей получаем

$$A = a \pm \varepsilon = a \left( 1 \pm \frac{\varepsilon}{a} \right) \approx a(1 \pm \delta) \text{ или } A \approx a(1 \pm \delta_{\text{пр.}}). \quad (1.13)$$

Относительная погрешность в отличие от абсолютной является величиной безразмерной и для большинства измерений представляет собой малое число, поэтому ее часто умножают на 100 и приводят в процентах.

## 1.2. Оценка погрешностей функций приближенных аргументов.

Измерения делят на *прямые* и *косвенные*. В первом случае непосредственно измеряется определяемая величина, при косвенных измерениях она задается некоторой функцией от непосредственно измеряемых величин. Подавляющее большинство физико-химических свойств веществ и параметров процессов определяются в результате косвенных измерений, погрешность которых зависит от погрешностей непосредственно измеряемых величин, использованных в расчетах.

Предположим, что некоторые величины  $X_1, X_2, \dots, X_n$  измерены с абсолютными погрешностями  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$  и что измеренные значения используются для вычисления функции

$$Z = f(X_1, X_2, \dots, X_n). \quad (1.14)$$

Очевидно, что погрешности приближенных аргументов должны привести к погрешности в значении искомой функции, что можно записать в следующем виде:

$$Z + \Delta z = f(X_1 + \Delta x_1, X_2 + \Delta x_2, \dots, X_n + \Delta x_n), \quad (1.15)$$

где  $\Delta z$  — абсолютная погрешность функции  $Z$ .

Разложим правую часть равенства (1.15) в ряд Тейлора:

$$Z + \Delta z = f(X_1, X_2, \dots, X_n) + \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial X_i} \right) \Delta x_i + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial X_i^2} \right) \Delta x_i^2 + \dots \quad (1.16)$$

Если предположить, что измерения достаточно точны, так что величины  $\Delta x_i$  малы по сравнению со значениями аргументов  $X_i$ , то в выражении (1.16) можно отбросить все члены, содержащие абсолютные погрешности аргументов во второй и высшей степенях. Тогда

$$Z + \Delta z \approx f(X_1, X_2, \dots, X_n) + \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial X_i} \right) \Delta x_i, \quad (1.17)$$

откуда с учетом (1.14) получаем

$$\Delta z \approx \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial X_i} \right) \Delta x_i. \quad (1.18)$$

Выражение для предельной абсолютной погрешности функции  $n$  переменных запишется в следующем виде:

$$\varepsilon_{\text{пр}} \approx \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial X_i} \right| |\Delta x_i| = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial X_i} \right| \varepsilon_i, \quad (1.19)$$

т.е. предельная абсолютная погрешность функции независимых переменных равна сумме частных производных этой функции, умноженных на соответствующие абсолютные погрешности аргументов. В практических расчетах значения частных производных берутся в точках, соответствующих измеренным значениям  $x_i$  или средним арифметическим  $\bar{x}_i$ , если проводились серии измерений.

В математической статистике также доказывается, что если абсолютные погрешности аргументов независимы и случайны, то наилучшей оценкой погрешности функции (1.14) будет *квадратичная сумма* ее частных производных, умноженных на соответствующие погрешности аргументов:

$$\Delta z \approx \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial X_i} \Delta x_i \right)^2}. \quad (1.20)$$

Формулы (1.19) и (1.20) являются основными при практических расчетах. Из них можно вывести формулы для расчетов погрешностей косвенных измерений для некоторых частных случаев, использование которых на практике бывает более удобным:

1. *Измеренная величина умножается на точное число.* Если величина  $X$  измерена с погрешностью  $\Delta x$  и используется для вычисления

$$Z = BX,$$

в котором  $B$  — точное число, то абсолютная погрешность в  $Z$  равна

$$|\Delta z| = |B| \cdot |\Delta x|. \quad (1.21)$$

2. *Погрешность в суммах и разностях.* Если величины  $X_1, X_2, \dots, X_n$  измерены с малыми погрешностями  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$  и измеренные значения используются для вычисления функции

$$Z = (X_1 + \dots + X_m) - (X_k + \dots + X_n),$$

а погрешности аргументов независимы и случайны, то погрешность в  $Z$  равна квадратичной сумме исходных погрешностей:

$$|\Delta z| = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + \dots + (\Delta x_m)^2 + (\Delta x_k)^2 + \dots + (\Delta x_n)^2}; \quad (1.22)$$

в любом случае она никогда не больше, чем их обычная сумма

$$|\Delta z| \leq |\Delta x_1| + \dots + |\Delta x_m| + |\Delta x_k| + \dots + |\Delta x_n|. \quad (1.23)$$

3. *Погрешности в произведениях и частных.* Если величины  $X_1, X_2, \dots, X_n$  измерены с малыми погрешностями  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$  и измеренные значения используются для вычисления функции

$$Z = \frac{X_1 \times \dots \times X_m}{X_k \times \dots \times X_n},$$

а погрешности аргументов независимы и случайны, то относительная погрешность в  $Z$  равна квадратичной сумме исходных относительных погрешностей:

$$\frac{|\Delta z|}{|Z|} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x_1}{|X_1|}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\Delta x_m}{|X_m|}\right)^2 + \left(\frac{\Delta x_k}{|X_k|}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\Delta x_n}{|X_n|}\right)^2}; \quad (1.24)$$

в любом случае она никогда не больше, чем их обычная сумма

$$\frac{|\Delta z|}{|Z|} \leq \frac{|\Delta x_1|}{|X_1|} + \dots + \frac{|\Delta x_m|}{|X_m|} + \frac{|\Delta x_k|}{|X_k|} + \dots + \frac{|\Delta x_n|}{|X_n|}. \quad (1.25)$$

4. *Погрешность в произвольной функции одной переменной.* Если величина  $X$  измерена с погрешностью  $\Delta x$  и используется для вычисления функции  $Z = f(X)$ , то абсолютная погрешность в  $Z$  равна

$$|\Delta z| = \left| \frac{\partial Z}{\partial X} \right| |\Delta x|. \quad (1.26)$$

5. *Погрешность в степенной функции.* Если величина  $X$  измерена с погрешностью  $\Delta x$  и используется для вычисления степенной функции  $Z = X^m$  (где  $m$  — фиксированное известное число), относительная погрешность в  $Z$  в  $|m|$  раз больше, чем в  $X$ :

$$\frac{|\Delta z|}{|Z|} = |m| \cdot \frac{\Delta x}{|X|}. \quad (1.27)$$

Пользуясь формулами (1.21) - (1.27), можно справиться практически с любой задачей вычисления ошибок в случае косвенных измерений. Любой расчет может быть представлен как последовательность определенных шагов, каждый из которых включает один из следующих видов операций: 1) нахождение сумм и разностей, 2) расчет произведений и частных, 3) вычисление функции одного переменного

(данный метод называют «шаг за шагом»). Однако в случае когда выражение для вычисления функции  $Z$  включает одну и ту же величину более чем один раз (например, дважды  $X_1$ ), то некоторые из ошибок могут взаимно компенсироваться и в результате расчет ошибки методом «шаг за шагом» может привести к переоценке конечной погрешности. Поэтому в подобных случаях рекомендуется пользоваться общими формулами (1.19) и (1.20).

### 1.3. Распределение случайных величин. Функция распределения и плотность распределения случайной величины.

Пусть дискретная физическая величина  $X$  может принимать в результате опыта значения  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Отношение числа опытов  $m_i$ , в результате которых величина  $X$  принимает значение  $x_i$ , к общему числу проведенных опытов  $n$  называется *частотой появления события*  $X = x_i$ . Частота ( $m_i/n$ ) является случайной величиной и меняется в зависимости от количества проведенных опытов. Однако при большом количестве опытов (в пределе  $n \rightarrow \infty$ ) она стабилизируется около некоторого значения  $p_i$ , называемого *вероятностью события*  $X = x_i$  (статистическое определение):

$$p_i = P(X = x_i) \approx (m_i/n). \quad (1.28)$$

Очевидно, что сумма вероятностей реализации всех возможных значений случайной величины равна единице:

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1. \quad (1.29)$$

Дискретную случайную величину можно полностью задать *вероятностным рядом*, указав вероятность  $p_i$  для каждого значения  $x_i$ :

$x_1$	$x_2$	$x_3$	...	$x_n$
$p_1$	$p_2$	$p_3$	...	$p_n$

*Законом распределения* случайной величины называют любое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями. Вероятностный ряд является одним из видов законов распределения случайной величины.

Распределение непрерывной случайной величины нельзя задать вероятностным рядом, поскольку число значений, которое она может принимать, так велико, что для большинства из них вероятность при-

нять эти значения равна нулю. Поэтому для непрерывных физических величин изучается вероятность того, что в результате опыта значение случайной величины попадет в некоторый интервал. Удобно пользоваться вероятностью события  $X \leq x$ , где  $x$  — произвольное действительное число. Эта вероятность

$$P(X \leq x) = F(x) \quad (1.30)$$

является функцией от  $x$  и называется *функцией распределения* (*предельной функцией распределения*, *функцией распределения генеральной совокупности*) случайной величины. В виде функции распределения можно задать распределение как непрерывной, так и дискретной случайной величины (рис. 2 и 3).  $F(x)$  является неубывающей функцией, т.е. если  $x_1 \leq x_2$ , то  $F(x_1) \leq F(x_2)$  (рис. 3).

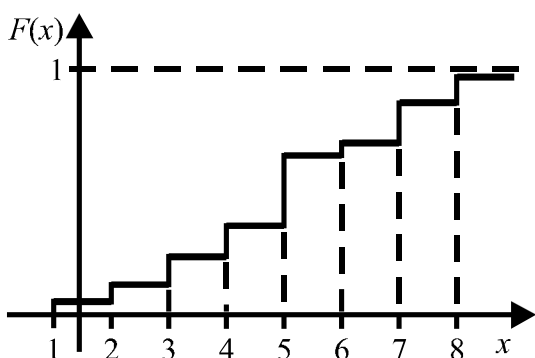


Рис. 2. Функция распределения дискретной случайной величины.

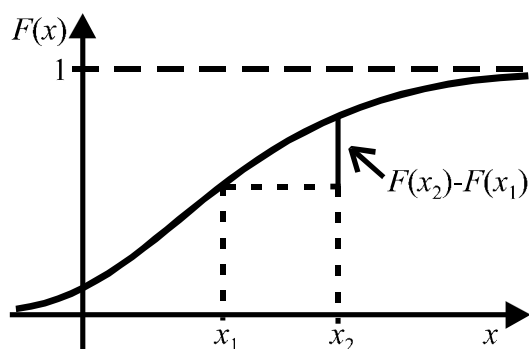


Рис. 3. Функция распределения непрерывной случайной величины.

Ордината кривой  $F(x)$ , соответствующая точке  $x_i$ , представляет собой вероятность того, что случайная величина  $X$  при испытании окажется  $\leq x_i$ . Тогда вероятность того, что значения случайной величины будут лежать в интервале от  $x_1$  до  $x_2$ , равна

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1). \quad (1.31)$$

Значения  $F(x)$  при предельных значениях аргумента равны:  $F(-\infty) = 0$ ,  $F(+\infty) = 1$ . Следует отметить, что функция распределения дискретной случайной величины всегда есть разрывная функция. Скачки происходят в точках, соответствующих возможным значениям этой величины, и равны вероятностям этих значений (рис. 2).

Для непрерывной случайной величины наиболее часто используется производная функции распределения — *плотность распределения* случайной величины  $X$ .

Если  $F(x)$  непрерывна и дифференцируема, то

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}. \quad (1.32)$$

Задание  $f(x)$  также полностью определяет случайную величину. Плотность распределения является неотрицательной функцией (рис. 4).

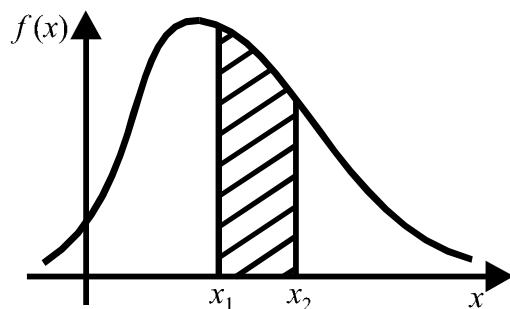


Рис. 4. Плотность распределения непрерывной случайной величины.

Площадь, ограниченная осью  $x$ , прямыми  $x = x_1$  и  $x = x_2$  и кривой плотности распределения, равна вероятности того, что случайная величина примет значения из интервала  $x_1 \div x_2$ :

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = F(x_2) - F(x_1). \quad (1.33)$$

Тогда

$$F(x) = P(-\infty \leq X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx. \quad (1.34)$$

Поскольку попадание случайной величины в интервал  $-\infty < X < +\infty$  есть достоверное событие, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1. \quad (1.35)$$

## ЛЕКЦИЯ 2

**Числовые характеристики случайной величины. Свойства математического ожидания и дисперсии. Нормированная случайная величина. Квантили. Нормальное и стандартное распределения случайной величины. Функция Лапласа. Задача об абсолютном отклонении.**

### **2.1. Числовые характеристики случайной величины. Свойства математического ожидания и дисперсии. Нормированная случайная величина.**

Вместо полного определения случайной величины в виде законов распределения вероятностей в прикладных задачах ее часто определяют при помощи *числовых характеристик* — чисел (вещественных), выражающих характерные особенности случайной величины, называемых *моментами случайной величины*.

Наиболее часто в приложениях математической статистики используют *математическое ожидание* (характеристику положения значений случайной величины на числовой оси) и *дисперсию* (или *среднее квадратичное отклонение*), определяющую характер разброса значений случайной величины.

*Математическое ожидание (генеральное среднее)* случайной величины (*начальный момент первого порядка*) принято обозначать  $M[X]$ ,  $m_x$  или  $m$ . Оно определяется для дискретной и непрерывной случайной величины соответственно как

$$m = M[X] = \sum_{i=1}^n x_i p_i, \quad (2.1)$$

$$m_x = M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx. \quad (2.2)$$

Для случайных величин математическое ожидание является теоретической величиной, к которой приближается среднее значение  $\bar{x}$  случайной величины  $X$  при большом количестве испытаний.

Свойства математического ожидания:

1. Если  $c$  — постоянное число (неслучайная величина), то

$$M[c] = c, \quad (2.3)$$

$$M[cX] = c M[X]. \quad (2.4)$$



2. Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий этих случайных величин:

$$M[X_1 + X_2 + \dots + X_n] = M[X_1] + M[X_2] + \dots + M[X_n]. \quad (2.5)$$

3. Математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий сомножителей:

$$M[X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot \dots \cdot X_n] = M[X_1] \cdot M[X_2] \cdot M[X_3] \cdot \dots \cdot M[X_n]. \quad (2.6)$$

Случайные величины называются *независимыми*, если каждая из них имеет самостоятельное распределение, не зависящее от возможных значений других величин.

4. Если случайная величина  $Z$  является некоторой нелинейной функцией  $n$  независимых случайных величин

$$Z = f(X_1, X_2, \dots, X_n),$$

которая мало меняется в небольших интервалах изменения аргументов, то

$$M[Z] = f(M[X_1], M[X_2], \dots, M[X_n]). \quad (2.7)$$

*Дисперсией (вторым центральным моментом)* случайной величины называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания, т. е.

$$D[X] = M[(X - m_x)^2]. \quad (2.8)$$

Для дискретной и непрерывной случайных величин дисперсия определяется следующим образом соответственно:

$$D[X] = \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)^2 p_i, \quad (2.9)$$

$$D[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 f(x) dx. \quad (2.10)$$

Другие обозначения для дисперсии:  $D_x$ ,  $\sigma_x^2$ ,  $\sigma^2(X)$ .

Дисперсия играет важную роль при статистических расчетах и является мерой рассеяния значений  $x$  около их математического ожидания. Корень квадратный из второго центрального момента называется *средним квадратичным отклонением (стандартным отклонением, или стандартом)*:

$$\sigma_x = \sigma = \sqrt{D[X]}. \quad (2.11)$$

Свойства дисперсии:

1. Если  $c$  — постоянное число (неслучайная величина), то

$$\sigma^2(c) = 0, \quad (2.12)$$

$$\sigma^2(cX) = c^2 \sigma^2(X). \quad (2.13)$$

2. Дисперсия случайной величины равна математическому ожиданию квадрата случайной величины минус квадрат ее математического ожидания:

$$\sigma^2(X) = M[X^2] - m_x^2. \quad (2.14)$$

3. Дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин:

$$\sigma^2(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \sigma^2(X_1) + \sigma^2(X_2) + \dots + \sigma^2(X_n). \quad (2.15)$$

Выражение (2.15) называют *законом сложения дисперсий*. Следует отметить, что закон сложения справедлив для дисперсий случайных величин ( $\sigma^2$ ), а не среднеквадратичных отклонений ( $\sigma$ ).

4. Если случайная величина  $Z$  является нелинейной функцией  $n$  независимых случайных величин

$$Z = f(X_1, X_2, \dots, X_n),$$

которая мало меняется в небольших интервалах изменения аргументов, то ее дисперсия приближенно равна

$$\begin{aligned} \sigma^2(Z) = & \left( \frac{\partial f}{\partial X_1} \right)^2 \sigma^2(X_1) + \left( \frac{\partial f}{\partial X_2} \right)^2 \sigma^2(X_2) + \\ & + \dots + \left( \frac{\partial f}{\partial X_n} \right)^2 \sigma^2(X_n). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Выражение (2.16) называют *законом накопления ошибок*, и он часто используется в теории ошибок для определения случайной ошибки функции по значениям случайных ошибок аргументов.

Третий центральный момент, разделенный на  $\sigma_x^3$ , называется *коэффициентом асимметрии* плотности распределения:

$$\gamma = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^3 f(x) dx \right) / \sigma_x^3. \quad (2.17)$$

На рис. 5 приведены примеры плотностей распределения с одинаковыми математическим ожиданием и дисперсией, но с разными коэффициентами асимметрии.

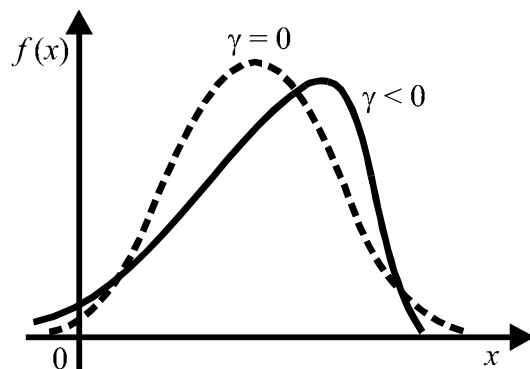


Рис. 5. Плотности распределения с нулевым и ненулевым коэффициентами асимметрии.

Если у случайной величины  $X$  существуют первый и второй моменты, то можно построить *нормированную случайную величину*

$$X_0 = \frac{X - m_x}{\sigma_x}, \quad (2.18)$$

для которой

$$M[X_0] = 0, D[X_0] = 1. \quad (2.19)$$

Докажем, что для нормированной случайной величины справедливы утверждения (2.19):

$$M[X_0] = M\left[\frac{X - m_x}{\sigma_x}\right] = \frac{1}{\sigma_x} M[X - m_x] = \frac{1}{\sigma_x} [M(X) - m_x] = 0,$$

$$D[X_0] = D\left[\frac{X - m_x}{\sigma_x}\right] = \frac{1}{\sigma_x^2} D(X - m_x) = \frac{1}{\sigma_x^2} [D(X) - 0] = \frac{D[X]}{\sigma_x^2} = 1.$$

Существуют следующие соотношения между функциями распределения, соответствующими нормированной  $X_0$  и ненормированной  $X$  величинам:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x} f_1(x_0) = \frac{1}{\sigma_x} f_1\left(\frac{x - m_x}{\sigma_x}\right), \quad (2.20)$$

$$f_1(x_0) = \sigma_x f(x) = \sigma_x f(m_x + \sigma_x x_0), \quad (2.21)$$

$$F(x) = F_1(x_0) = F_1\left(\frac{x - m_x}{\sigma_x}\right), \quad (2.22)$$

$$F_1(x_0) = F(x) = F(m_x + \sigma_x x_0). \quad (2.23)$$

Рассмотренные выше моменты являются общими (интегральными) характеристиками распределения случайной величины. Вторая группа параметров характеризует отдельные значения функции распределения. К ним относятся *квантили*. *Квантилем*  $x_\beta$  распределения случайной величины  $X$  с функцией распределения  $F(x)$  называется решение уравнения  $F(x_\beta) = \beta$ , т. е. такое значение случайной величины, что  $P(X \leq x_\beta) = \beta$ . Наиболее важное значение имеет квантиль  $x_{1/2}$ , называемый *медианой распределения* (рис. 6).

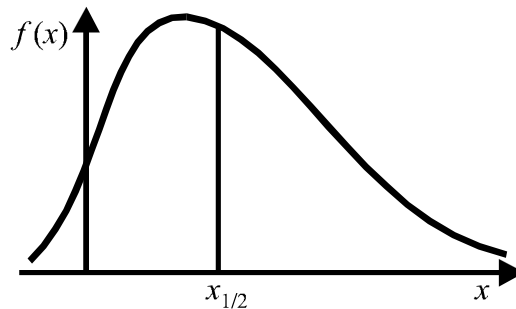


Рис. 6. Медиана распределения.

Ордината медианы пополам рассекает площадь между кривой плотности вероятности и осью абсцисс. Если распределение симметрично, то  $x_{1/2} = m_x$ .

## 2.2. Нормальное и стандартное распределения случайной величины. Функция Лапласа. Задача об абсолютном отклонении.

Непрерывная случайная величина  $X$  называется распределенной по *нормальному закону*, если ее плотность распределения имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_x} \exp\left(-\frac{(x - m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right), \quad (-\infty < x < +\infty), \quad (2.24)$$

где  $m_x$  и  $\sigma_x^2$  — математическое ожидание и дисперсия случайной величины  $X$ .

Функция распределения равна

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right) dx. \quad (2.25)$$

Нормальное распределение наиболее часто встречается на практике и теоретически наиболее полно разработано. Множество событий происходит случайно вследствие воздействия на них большого числа независимых (или слабо зависимых) возмущений, и у таких явлений закон распределения близок к нормальному. Установлено, что *нормальное распределение содержит минимум информации о случайной величине* по сравнению с любыми распределениями с той же дисперсией. Следовательно, замена некоторого распределения эквивалентным нормальным не может привести к переоценке точности наблюдений, что широко используется на практике.

График плотности нормального распределения называется *нормальной кривой*, или *кривой Гаусса* (рис. 7).

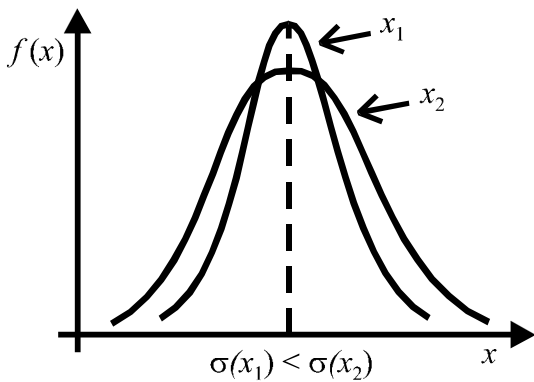


Рис. 7. Кривая Гаусса.

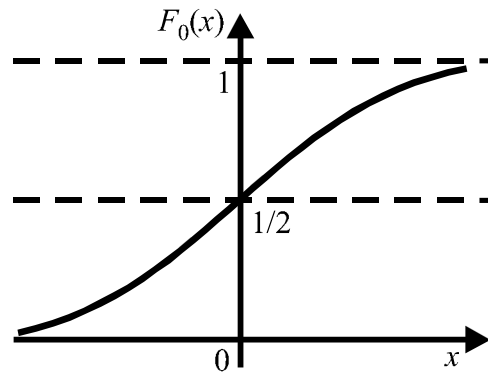


Рис. 8. График функции  $F_0(x)$  стандартного распределения.

Нормальное распределение нормированной случайной величины называется *стандартным*. Его функция распределения имеет вид

$$F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp(-x^2/2) dx, \quad (2.26)$$

а график этой функции представлен на рис. 8.

Вероятность того, что значения нормированной случайной величины будут лежать в интервале от  $x_{01}$  до  $x_{02}$ , равна

$$P(x_{01} \leq X_0 \leq x_{02}) = F_0(x_{02}) - F_0(x_{01}). \quad (2.27)$$

Функция

$$\Phi(X) = F_0(x) - 1/2 \quad (2.28)$$

называется *функцией Лапласа*

$$\Phi(X) = F_0(x) - 1/2 = F_0(x) - F_0(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \exp(-x^2/2) dx. \quad (2.29)$$

Значения функции Лапласа табулированы (приложение 1). Так как она является нечетной функцией, т. е.  $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ , то таблицы значений  $\Phi(x)$  составлены лишь для  $x > 0$ .

Для нормированной случайной величины с учетом (2.27) и (2.28) имеем:

$$\begin{aligned} P(x_{01} \leq X \leq x_{02}) &= F_0(x_{02}) - F_0(x_{01}) = \\ &= \Phi(x_{02}) + 1/2 - \Phi(x_{01}) - 1/2 = \Phi(x_{02}) - \Phi(x_{01}). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Тогда в общем случае

$$\begin{aligned} P(x_1 \leq X \leq x_2) &= P\left(\frac{x_1 - m_x}{\sigma_x} \leq X_0 \leq \frac{x_2 - m_x}{\sigma_x}\right) = \\ &= \Phi\left(\frac{x_2 - m_x}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - m_x}{\sigma_x}\right). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Во многих практических задачах  $x_1$  и  $x_2$  симметричны относительно математического ожидания, в частности *в задаче об абсолютном отклонении*. Абсолютным отклонением является величина

$$|\Delta x| = |X - m_x|. \quad (2.32)$$

Требуется найти вероятность того, что абсолютное отклонение случайной величины не превзойдет некоторого заданного числа  $\varepsilon$ :

$$P(|\Delta x| \leq \varepsilon) = P(m_x - \varepsilon \leq X \leq m_x + \varepsilon). \quad (2.33)$$

В частности, для нормированной случайной величины

$$P(|\Delta x_0| \leq \varepsilon) = P(-\varepsilon \leq X_0 \leq +\varepsilon) = \Phi(\varepsilon) - \Phi(-\varepsilon) = 2\Phi(\varepsilon). \quad (2.34)$$

Тогда для нормально распределенной случайной величины с параметрами  $m_x$  и  $\sigma_x$  справедливо

$$P(|\Delta x| \leq \varepsilon) = P\left(|\Delta x_0| \leq \frac{\varepsilon}{\sigma_x}\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma_x}\right). \quad (2.35)$$

Обозначив  $\varepsilon/\sigma_x = k$ , из (2.35) получаем

$$P(|\Delta x| \leq k\sigma_x) = 2\Phi(k), \quad (2.36)$$

откуда

$$P(|\Delta x| \leq \sigma_x) = 2\Phi(1) = 0.6826,$$

$$P(|\Delta x| \leq 2\sigma_x) = 2\Phi(2) = 0.9544,$$

$$P(|\Delta x| \leq 3\sigma_x) = 2\Phi(3) = 0.9973.$$

Таким образом, отклонения больше, чем утроенный стандарт (утроенное стандартное отклонение), практически невозможны. На практике часто величины  $2\sigma_x$  (или  $3\sigma_x$ ) считают максимально допустимой ошибкой и отбрасывают результаты измерений, для которых величина отклонения превышает это значение, как содержащие грубые ошибки.

Нормальное распределение обладает также свойством *линейности*: если независимые случайные величины  $X_1$  и  $X_2$  имеют нормальные распределения, то для произвольных чисел  $\alpha$  и  $\beta$  величина

$$Y = \alpha X_1 + \beta X_2$$

также имеет нормальное распределение, причем из свойств математического ожидания и дисперсии следует, что

$$M[Y] = \alpha M[X_1] + \beta M[X_2], \quad (2.37)$$

$$\sigma[Y] = \sqrt{\alpha^2 \sigma^2[X_1] + \beta^2 \sigma^2[X_2]}. \quad (2.38)$$

## ЛЕКЦИЯ 3

**Генеральная совокупность и случайная выборка. Выборочная функция распределения. Гистограммы. Понятие об оценках параметров генерального распределения. Метод максимального правдоподобия. Оценка математического ожидания и дисперсии нормально распределенной случайной величины. Дисперсия среднего серии измерений.**

### **3.1. Генеральная совокупность и случайная выборка.**

#### **Выборочная функция распределения. Гистограммы.**

#### **Понятие об оценках параметров генерального распределения.**

Явление статистической устойчивости результатов наблюдений имеет место лишь при большом (в пределе — бесконечно большом) числе измерений. В подавляющем же числе экспериментов исследователю приходится иметь дело лишь с ограниченным, обычно небольшим, числом наблюдений. В силу закона случая какие-то величины, определенные по малому числу наблюдений, в общем случае могут не совпадать с теми же величинами, вычисленными по большому числу наблюдений, выполненных в тех же условиях. Поэтому в математической статистике вводят понятие абстрактной *генеральной совокупности*, состоящей из всех допустимых значений случайной величины, и *выборки*, представляющей собой совокупность ограниченного числа значений, полученных в результате опытов. В соответствии с этим различают *выборочные* характеристики случайной величины, найденные по ограниченному числу наблюдений и зависящие от этого числа, и соответствующие им характеристики генеральной совокупности. При этом выборочные характеристики рассматриваются как оценки соответствующих характеристик генеральной совокупности.

Выборка называется *репрезентативной* (представительной), если она дает достаточное представление об особенностях генеральной совокупности. Однако из случайного характера выборок следует, что любое суждение о генеральной совокупности само случайно. Предположим, что в результате эксперимента получена выборка из  $x_1, x_2, \dots, x_n$  значений случайной величины  $X$ . Обозначим через  $n_x$  число выборочных значений, расположенных левее  $x$  — некоторой точки числовой оси  $X$ . Отношение  $(n_x/n)$  есть частота появления значений  $X$ , меньших  $x$ , и является функцией от  $x$ . Эта функция, получаемая по выборке, называется *эмпирической*, или *выборочной функцией распре-*



деления (в отличие от распределения генеральной совокупности) и обозначается как

$$F_n(x) = n_x / n. \quad (3.1)$$

Можно доказать, что с вероятностью, равной 1, при  $n \rightarrow \infty$  максимальная разность между функциями распределения случайной величины  $F_n(x)$  и  $F(x)$  стремится к нулю. На практике это означает, что при достаточно большой выборке функцию распределения генеральной совокупности приближенно можно заменять выборочной функцией распределения. Пусть  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$  (упорядоченная по величине выборка, или *вариационный ряд*). Все элементы выборки имеют одинаковую вероятность, равную  $1/n$ . Поэтому

$$\begin{aligned} F_n(x) &= 0 && \text{при } x < x_1, \\ F_n(x) &= k/n && \text{при } x_k \leq x < x_{k+1}, \text{ где } k = 1, 2, \dots, n-1, \\ F_n(x) &= 1 && \text{при } x \geq x_n. \end{aligned}$$

График  $F_n(x)$  представлен на рис. 9. Все элементы выборки оказываются точками разрыва этой функции. В точке разрыва  $x = x_k$  функция скачком переходит от значения  $(k-1)/n$  к значению  $k/n$ , которое и удерживает в следующем интервале.

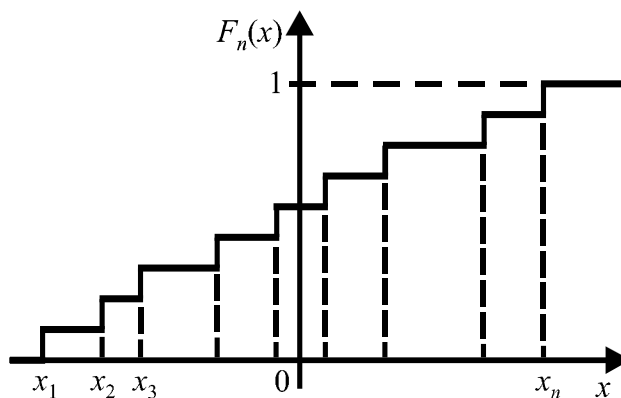


Рис. 9. Выборочная функция распределения.

При обработке выборок обычно используют метод «сгруппированных данных»: выборка объема  $n$  преобразуется в статистический ряд. Весь диапазон значений случайной величины от  $x_{\min}$  до  $x_{\max}$  делится на  $k$  равных интервалов ( $j = 1, 2, \dots, k$ ). Число интервалов можно выбрать произвольно или по эмпирическим формулам, например:

$$k = 1 + 1.39 \ln n \quad (3.2)$$

с округлением до ближайшего целого. Длина интервала равна

$$h = (x_{\max} - x_{\min}) / k. \quad (3.3)$$

Число элементов выборки, попавших в  $j$ -интервал, обозначим через  $n_j$ . Величина

$$p_j^* = n_j / n \quad (3.4)$$

определяет относительную частоту попадания случайной величины в  $j$ -интервал. Все точки, попавшие в  $j$ -интервал, относят к его середине:

$$x_j^* = (x_{j-1} + x_j) / 2. \quad (3.5)$$

Статистический ряд записывается в виде табл. 1.

Таблица 1

Статистический ряд.

Интервал	Длина интервала	Середина интервала	Число точек в интервале	Относительная частота
1	$(x_{\min}, x_1)$	$x_1^*$	$n_1$	$p_1^*$
2	$(x_1, x_2)$	$x_2^*$	$n_2$	$p_2^*$
...	...	...	...	...
$k$	$(x_{k-1}, x_{\max})$	$x_k^*$	$n_k$	$p_k^*$
$\Sigma$			$n$	1

График, построенный по данным табл. 1, называется *гистограммой* эмпирического, или выборочного, распределения (рис. 10). На рис. 11 приведен график функции  $F_n(x)$ , построенный по сгруппированным данным.

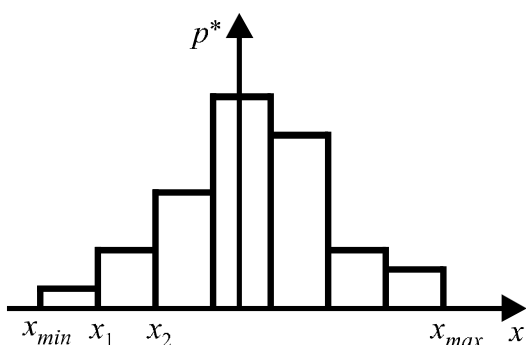


Рис. 10. Гистограмма распределения.

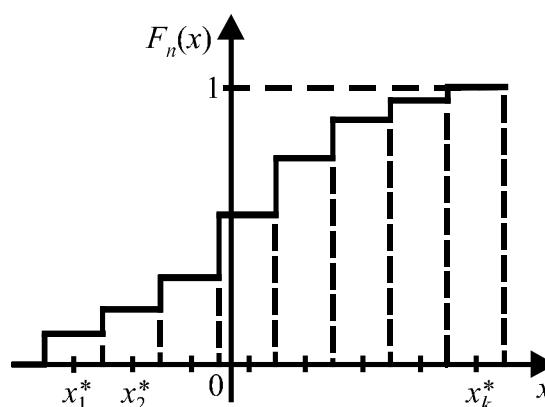


Рис. 11. График функции  $F_n(x)$ , построенный по сгруппированным данным.

При обработке результатов наблюдений обычно не удается получить эмпирическую функцию распределения. Однако даже простейший анализ условий опыта позволяет с достаточной уверенностью определять тип неизвестной функции распределения. Окончательное уточнение неизвестной функции распределения сводится к определению некоторых числовых параметров распределения. По выборкам могут быть рассчитаны выборочные статистические характеристики (выборочное среднее, дисперсия и т.д.), которые являются *оценками* соответствующих генеральных параметров.

Оценка  $a^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$  называется *состоятельной*, если с увеличением объема выборки  $n$  она стремится (по вероятности) к оцениваемому параметру  $a$ . *Эмпирические (выборочные) моменты являются состоятельными оценками теоретических моментов.*

Оценка  $a^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$  называется *несмещенной*, если ее математическое ожидание *при любом объеме выборки* равно оцениваемому параметру  $a$ , т. е.  $M[a^*] = a$ .

Важной характеристикой оценок генеральных параметров является также их *эффективность*, которая для различных несмещенных оценок одного и того же параметра при фиксированном объеме выборок обратно пропорциональна дисперсиям этих оценок.

### 3.2. Метод максимального правдоподобия.

Для получения точечных оценок используют различные методы. Широко применяется *метод максимального правдоподобия*. Сущность метода заключается в нахождении таких оценок неизвестных параметров, для которых функция правдоподобия при случайной выборке объема  $n$  будет иметь максимальное значение.

Пусть плотность распределения случайной величины  $X$  задается функцией  $f(x, a)$ , где  $a$  — неизвестный параметр, входящий в выражение закона распределения. На опыте получена выборка значений  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Окружим каждую точку  $x_i$  окрестностью длины  $\delta$ . Тогда вероятность попадания в интервал с границами  $(x_i - \delta/2), (x_i + \delta/2)$  приближенно равна  $f(x, a) \delta$ . Если произведено  $n$  наблюдений, то вероятность того, что одновременно первое наблюдение попадет в первый интервал, второе — во второй и т.д., есть вероятность совместного осуществления всех этих независимых событий и равна

$$\begin{aligned} P(x, a) &= f(x_1, a) \cdot f(x_2, a) \cdot \dots \cdot f(x_n, a) \cdot \delta^n = \\ &= f(x_1) \cdot f(x_2) \cdot \dots \cdot f(x_n) \cdot \delta^n. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Так как событие с вероятностью  $P$  осуществилось на самом деле при первом же испытании, то естественно предположить, что ему соответствует максимальная вероятность. Поэтому в качестве оценки следует взять то значение  $a^*$  из области допустимых значений параметра  $a$ , для которого эта вероятность принимает наибольшее возможное значение, т.е. корень уравнения

$$\left. \frac{\partial P(x, a)}{\partial a} \right|_{a=a^*} = 0. \quad (3.7)$$

Достаточным условием максимума при этом является выполнение неравенства

$$\frac{\partial^2 P(x, a)}{\partial a^2} < 0. \quad (3.8)$$

Решение проще получить, если перейти к функции

$$L(x, a) = \ln \frac{P(x, a)}{\delta^n} = \sum_{i=1}^n \ln f(x_i, a), \quad (3.9)$$

которая называется *функцией правдоподобия*.

Вероятность  $P$  и функция  $L$  имеют максимумы при одних и тех же значениях определяемых параметров, так как

$$\frac{\partial L}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a} \ln P = \frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial a}, \quad P > 0. \quad (3.10)$$

В общем случае, когда требуется оценить одновременно несколько параметров одномерного или многомерного распределения, формулировка принципа максимального правдоподобия сохранится: надо найти такую совокупность допустимых значений параметров  $a_1^*$ ,  $a_2^*$ , ...,  $a_k^*$ , которая обращает функцию правдоподобия в максимум.

Найдем методом максимального правдоподобия оценку параметра  $\lambda$  показательного распределения с плотностью

$$f(x) = \lambda \exp(-\lambda x), \quad 0 \leq x < \infty \quad (3.11)$$

по выборке  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Функция правдоподобия примет следующий вид:

$$L = \sum_{i=1}^n \ln(\lambda \exp(-\lambda x_i)) = n \ln \lambda - \sum_{i=1}^n \lambda x_i. \quad (3.12)$$

Тогда

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n x_i = 0, \quad (3.13)$$

$$\lambda^* = \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i} = \frac{1}{\bar{x}}, \quad (3.14)$$

где  $\bar{x}$  — среднее выборки.

### 3.3. Оценка математического ожидания и дисперсии нормально распределенной случайной величины. Дисперсия среднего серии измерений.

Пусть распределение случайной величины  $X$  подчинено нормальному закону

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Тогда вероятность совместного осуществления  $n$  независимых событий  $X = x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) равна

$$P(x, m, \sigma^2) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2\right) \cdot \delta^n \quad (3.15)$$

и функция правдоподобия

$$L(x, m, \sigma^2) = \ln \frac{P}{\delta^n} = -\frac{n}{2} \ln 2\pi - \frac{n}{2} \ln \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2. \quad (3.16)$$

Продифференцируем (3.16) по  $m$

$$\frac{\partial L}{\partial m} = \frac{2}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - m) = 0. \quad (3.17)$$

Поскольку  $1/\sigma^2 \neq 0$ , то

$$\sum_{i=1}^n (x_i - m) = 0.$$

Тогда оценка для математического ожидания равна

$$m^* = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad (3.18)$$

где  $\bar{x}$  — среднее арифметическое выборки (серии измерений). Отметим, что для выборочного среднего сохраняются все свойства математического ожидания. Например, если  $Z$  является нелинейной функцией  $n$  независимых случайных величин

$$Z = f(X_1, X_2, \dots, X_n),$$

то ее выборочное среднее приближенно выражается формулой

$$\bar{z} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n).$$

Дифференцируя функцию правдоподобия (3.16) по  $\sigma^2$ , получаем

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2} \frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 = 0, \quad (3.19)$$

$$-\frac{1}{2\sigma^2} \left[ n - \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 \right] = 0. \quad (3.20)$$

Поскольку  $1/(2\sigma^2) \neq 0$ , то

$$n - \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 = 0, \quad (3.21)$$

откуда находим оценку  $s_1^2$  для дисперсии случайной величины:

$$(\sigma^2)^* = s_1^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2. \quad (3.22)$$

Метод максимального правдоподобия всегда приводит к состоятельным, хотя иногда и смещенным оценкам, имеющим наименьшую возможную дисперсию при неограниченном возрастании объема выборки. Так, выборочная дисперсия  $s_1^2$  оказывается смещенной оценкой генеральной дисперсии

$$M[s_1^2] = \frac{n-1}{n} \sigma^2. \quad (3.23)$$

Для получения несмещенной оценки дисперсию  $s_1^2$  надо умножить на величину  $n/(n-1)$

$$s^2 = s_1^2 \frac{n}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}. \quad (3.24)$$

Уменьшение знаменателя в (3.24) на единицу непосредственно связано с тем, что величина  $\bar{x}$ , относительно которой берутся отклонения, сама зависит от элементов выборки. Каждая величина, зависящая от элементов выборки и входящая в формулу выборочной дисперсии, называется *связью*. Можно доказать, что знаменатель выборочной дисперсии всегда равен разности между объемом выборки  $n$  и числом связей  $l$ , наложенных на эту выборку. Эта разность

$$f = n - l \quad (3.25)$$

называется *числом степеней свободы* выборки.

В практических вычислениях для выборочной дисперсии  $s^2$  часто более удобна следующая формула, получаемая из (3.24) путем арифметических преобразований:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}{n}}{n-1}. \quad (3.26)$$

Итак, для нормально распределенной случайной величины получают по выборке следующие оценки генеральных параметров распределения: среднее арифметическое  $\bar{x}$  для математического ожидания  $m$  и выборочную дисперсию  $s^2$  для генеральной дисперсии  $\sigma^2$ .

Определим дисперсию среднего арифметического через дисперсию единичного наблюдения, воспользовавшись свойствами дисперсии. Если  $X_1, X_2, \dots, X_n$  — независимые случайные величины,  $a_1, a_2, \dots, a_n$  — неслучайные величины, а функция  $Z$  равна

$$Z = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n, \quad (3.27)$$

то дисперсия  $Z$  определяется следующим образом:

$$\sigma^2(Z) = a_1^2 \sigma^2(X_1) + a_2^2 \sigma^2(X_2) + \dots + a_n^2 \sigma^2(X_n). \quad (3.28)$$

Пусть в результате одной серии опытов получена выборка  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Если провести несколько серий подобных наблюдений, то в общем случае будут получены другие совокупности значений случай-

ной величины  $X$ :  $x_1', x_2', \dots, x_n'$ ;  $x_1'', x_2'', \dots, x_n''$  и т.д. Поэтому значения  $x_1, x_2, \dots, x_n$  в серии из  $n$  наблюдений можно рассматривать как случайные величины с некоторыми дисперсиями  $\sigma^2(x_1), \sigma^2(x_2), \dots, \sigma^2(x_n)$ . Поскольку эти случайные величины возникают при измерении одной и той же случайной величины  $X$ , то дисперсии их естественно считать одинаковыми:

$$\sigma^2(x_1) = \sigma^2(x_2) = \dots = \sigma^2(x_n) = \sigma^2. \quad (3.29)$$

Применим теперь (3.28) для случая, когда  $Z$  является средним арифметическим (в этом случае  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1/n$ ):

$$\sigma^2(\bar{x}) = \frac{1}{n^2} [\sigma^2(x_1) + \sigma^2(x_2) + \dots + \sigma^2(x_n)] = \frac{1}{n^2} n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}. \quad (3.30)$$

Из (3.30) следует, что дисперсия среднего в  $n$  раз меньше дисперсии единичного измерения, поэтому для стандартного отклонения

$$\sigma(\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \quad (3.31)$$

Если принять  $\sigma(\bar{x})$  в качестве меры случайной ошибки среднего выборки, то *увеличение числа параллельных определений одной и той же величины снижает величину случайной ошибки*. Это свойство случайной величины используют на практике для повышения точности результатов измерений.

Так как свойства генеральных дисперсий сохраняются и для их оценок — выборочных дисперсий, то

$$s^2(Z) = a_1^2 s^2(X_1) + a_2^2 s^2(X_2) + \dots + a_n^2 s^2(X_n), \quad (3.32)$$

$$s^2(\bar{x}) = \frac{s^2(X)}{n}, \quad s(\bar{x}) = \frac{s(X)}{\sqrt{n}}, \quad (3.33)$$

где  $s^2$  — выборочные дисперсии,  $s$  — выборочное отклонение.



## ЛЕКЦИЯ 4

**Доверительные интервалы и доверительная вероятность, уровень значимости. Проверка статистических гипотез, критерии значимости, ошибки первого и второго рода. Построение доверительного интервала для математического ожидания непосредственно измеряемой величины. Распределение Стьюдента.**

### **4.1. Доверительные интервалы и доверительная вероятность, уровень значимости.**

Выборочные параметры распределения, определяемые по серии измерений, являются случайными величинами, следовательно, и их отклонения от генеральных параметров также будут случайными. Оценка этих отклонений носит вероятностный характер — при статистическом анализе можно лишь указать вероятность той или иной погрешности.

Пусть для генерального параметра  $a$  получена из опыта несмещенная оценка  $a^*$ . Назначим достаточно большую вероятность  $\beta$  (такую, что событие с вероятностью  $\beta$  можно считать практически достоверным) и найдем такое значение  $\varepsilon_\beta = f(\beta)$ , для которого

$$P(|a^* - a| \leq \varepsilon_\beta) = \beta. \quad (4.1)$$

Диапазон практически возможных значений ошибки, возникающей при замене  $a$  на  $a^*$ , будет  $\pm \varepsilon_\beta$ . Большие по абсолютной величине ошибки будут появляться только с малой вероятностью

$$p = 1 - \beta, \quad (4.2)$$

называемой *уровнем значимости*. Иначе выражение (4.1) можно интерпретировать как вероятность того, что истинное значение параметра  $a$  лежит в пределах

$$a^* - \varepsilon_\beta \leq a \leq a^* + \varepsilon_\beta. \quad (4.3)$$

Вероятность  $\beta$  называется *доверительной вероятностью* и характеризует надежность полученной оценки. Интервал  $I_\beta = a^* \pm \varepsilon_\beta$  называется *доверительным интервалом*. Границы интервала  $a' = a^* - \varepsilon_\beta$  и  $a'' = a^* + \varepsilon_\beta$  называются *доверительными границами*. Доверительный интервал при данной доверительной вероятности определяет точность оценки. Величина доверительного интервала зависит от доверительной вероятности, с которой гарантируется нахождение параметра  $a$

внутри доверительного интервала: чем больше величина  $\beta$ , тем больше интервал  $I_\beta$  (и величина  $\varepsilon_\beta$ ). Увеличение числа опытов проявляется в сокращении доверительного интервала при постоянной доверительной вероятности или в повышении доверительной вероятности при сохранении доверительного интервала.

На практике обычно фиксируют значение доверительной вероятности (0,9; 0,95 или 0,99) и затем определяют доверительный интервал результата  $I_\beta$ . При построении доверительного интервала решается задача об абсолютном отклонении:

$$P\left(|a^* - a| \leq \varepsilon_\beta\right) = P(|\Delta a| \leq \varepsilon_\beta) = F(\varepsilon_\beta) - F(-\varepsilon_\beta) = \int_{-\varepsilon_\beta}^{\varepsilon_\beta} f(a) da = \beta. \quad (4.4)$$

Таким образом, если бы был известен закон распределения оценки  $a^*$ , задача определения доверительного интервала решалась бы просто. Рассмотрим построение доверительного интервала для математического ожидания нормально распределенной случайной величины  $X$  с известным генеральным стандартом  $\sigma$  по выборке объемом  $n$ . Наилучшей оценкой для математического ожидания  $m$  является среднее выборки  $\bar{x}$  со стандартным отклонением среднего

$$\sigma(\bar{x}) = \sigma / \sqrt{n}.$$

Используя функцию Лапласа, получаем

$$P\left(|\bar{x} - m_x| \leq \varepsilon_\beta\right) = \beta = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon_\beta}{\sigma(\bar{x})}\right). \quad (4.5)$$

Задавшись доверительной вероятностью  $\beta$ , определим по таблице функции Лапласа (приложение 1) величину  $k_\beta = \varepsilon_\beta / \sigma(\bar{x})$ . Тогда доверительный интервал для математического ожидания принимает вид

$$\bar{x} - k_\beta \sigma(\bar{x}) \leq m_x \leq \bar{x} + k_\beta \sigma(\bar{x}), \quad (4.6)$$

или

$$\bar{x} - k_\beta \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m_x \leq \bar{x} + k_\beta \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \quad (4.7)$$

Из (4.7) видно, что уменьшение доверительного интервала обратно пропорционально корню квадратному из числа опытов.

Знание генеральной дисперсии позволяет оценивать математическое ожидание даже по одному наблюдению. Если для нормально

распределенной случайной величины  $X$  в результате эксперимента получено значение  $x_1$ , то доверительный интервал для математического ожидания при выбранной  $\beta$  имеет вид

$$x_1 - \sigma U_{1-p/2} \leq m_x \leq x_1 + \sigma U_{1-p/2}, \quad (4.8)$$

где  $U_{1-p/2}$  — квантиль стандартного нормального распределения (приложение 2).

Закон распределения оценки  $a^*$  зависит от закона распределения величины  $X$  и, в частности, от самого параметра  $a$ . Чтобы обойти это затруднение, в математической статистике применяют два метода:

1) приближенный — при  $n \geq 50$  заменяют в выражении для  $\varepsilon_\beta$  неизвестные параметры их оценками, например:

$$k_\beta = \varepsilon_\beta / \sigma(\bar{x}) \approx \varepsilon_\beta / s(\bar{x});$$

2) от случайной величины  $a^*$  переходят к другой случайной величине  $\Theta^*$ , закон распределения которой не зависит от оцениваемого параметра  $a$ , а зависит только от объема выборки  $n$  и от вида закона распределения величины  $X$ . Такого рода величины наиболее подробно изучены для нормального распределения случайных величин. В качестве доверительных границ  $\Theta'$  и  $\Theta''$  обычно используются симметричные квантили

$$\Theta_{(1-\beta)/2} \leq \Theta^* \leq \Theta_{(1+\beta)/2}, \quad (4.9)$$

или с учетом (4.2)

$$\Theta_{p/2} \leq \Theta^* \leq \Theta_{1-p/2}. \quad (4.10)$$

## 4.2. Проверка статистических гипотез, критерии значимости, ошибки первого и второго рода.

Под *статистическими гипотезами* понимаются некоторые предположения относительно распределений генеральной совокупности той или иной случайной величины. Под проверкой гипотезы понимают сопоставление некоторых статистических показателей, *критериев проверки (критериев значимости)*, вычисляемых по выборке, с их значениями, определенными в предположении, что данная гипотеза верна. При проверке гипотез обычно подвергается испытанию некоторая гипотеза  $H_0$  в сравнении с альтернативной гипотезой  $H_1$ .

Чтобы решить вопрос о принятии или непринятии гипотезы, задаются уровнем значимости  $p$ . Наиболее часто используются уровни

значимости, равные 0.10, 0.05 и 0.01. По этой вероятности, используя гипотезу о распределении оценки  $\Theta^*$  (критерия значимости), находят квантильные доверительные границы, как правило, симметричные  $\Theta_{p/2}$  и  $\Theta_{1-p/2}$ . Числа  $\Theta_{p/2}$  и  $\Theta_{1-p/2}$  называются *критическими значениями гипотезы*; значения  $\Theta^* < \Theta_{p/2}$  и  $\Theta^* > \Theta_{1-p/2}$  образуют критическую область гипотезы (или область непринятия гипотезы) (рис. 12).

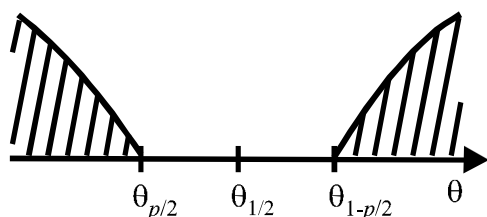


Рис. 12. Критическая область гипотезы.

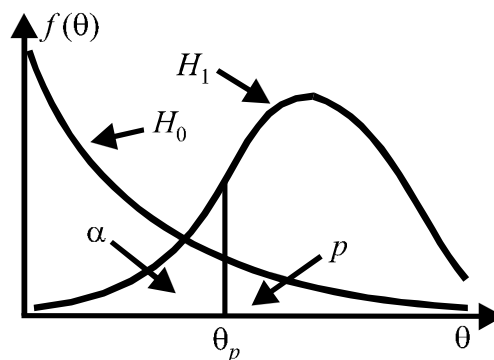


Рис. 13. Проверка статистических гипотез.

Если найденное по выборке  $\Theta_0$  попадает между  $\Theta_{p/2}$  и  $\Theta_{1-p/2}$ , то гипотеза допускает такое значение в качестве случайного и поэтому нет оснований ее отвергать. Если же значение  $\Theta_0$  попадает в критическую область, то по данной гипотезе оно является практически невозможным. Но поскольку оно появилось, то отвергается сама гипотеза.

При проверке гипотез можно совершить ошибки двух типов. *Ошибка первого рода* состоит в том, что *отвергается гипотеза, которая на самом деле верна*. Вероятность такой ошибки не больше принятого уровня значимости. *Ошибка второго рода* состоит в том, что *гипотеза принимается, а на самом деле она неверна*. Вероятность этой ошибки тем меньше, чем выше уровень значимости, так как при этом увеличивается число отвергаемых гипотез. Если вероятность ошибки второго рода равна  $\alpha$ , то величину  $(1 - \alpha)$  называют *мощностью критерия*.

На рис. 13 приведены две кривые плотности распределения случайной величины  $\Theta$ , соответствующие двум гипотезам  $H_0$  и  $H_1$ . Если из опыта получается значение  $\Theta > \Theta_p$ , то отвергается гипотеза  $H_0$  и принимается гипотеза  $H_1$ , и наоборот, если  $\Theta < \Theta_p$ .

Площадь под кривой плотности вероятности, соответствующей справедливости гипотезы  $H_0$  вправо от значения  $\Theta_p$ , равна уровню

значимости  $p$ , т. е. вероятности ошибки первого рода. Площадь под кривой плотности вероятности, соответствующей справедливости гипотезы  $H_1$  влево от  $\Theta_p$ , равна вероятности ошибки второго рода  $\alpha$ , а вправо от  $\Theta_p$  — мощности критерия  $(1 - \alpha)$ . Таким образом, чем больше  $p$ , тем больше  $(1 - \alpha)$ . При проверке гипотезы стремятся из всех возможных критериев выбрать тот, у которого при заданном уровне значимости меньше вероятность ошибки второго рода.

Обычно в качестве оптимального уровня значимости при проверке гипотез используют  $p = 0,05$ , так как если проверяемая гипотеза принимается с данным уровнем значимости, то гипотезу, безусловно, следует признать согласующейся с экспериментальными данными; с другой стороны, использование данного уровня значимости не дает оснований для отбрасывания гипотезы.

Например, найдены два значения  $a_1^*$  и  $a_2^*$  некоторого выборочного параметра, которые можно рассматривать как оценки генеральных параметров  $a_1$  и  $a_2$ . Высказывается гипотеза, что различие между  $a_1^*$  и  $a_2^*$  случайное и что генеральные параметры  $a_1$  и  $a_2$  равны между собой, т. е.  $a_1 = a_2$ . Такая гипотеза называется *нулевой*, или *нуль-гипотезой*. Для ее проверки нужно выяснить, значимо ли расхождение между  $a_1^*$  и  $a_2^*$  в условиях нулевой гипотезы. Для этого обычно исследуют случайную величину  $\Delta a^* = a_1^* - a_2^*$  и проверяют, значимо ли ее отличие от нуля. Иногда удобнее рассматривать величину  $a_1^*/a_2^*$ , сравнивая ее с единицей.

Отвергая нулевую гипотезу, тем самым принимают альтернативную, которая распадается на две:  $a_1^* > a_2^*$  и  $a_1^* < a_2^*$ . Если одно из этих равенств заведомо невозможно, то альтернативная гипотеза называется *односторонней*, и для ее проверки применяют *односторонние* критерии значимости (в отличие от обычных, *двусторонних*). При этом необходимо рассматривать лишь одну из половин критической области (рис. 12).

Например,  $p = 0,05$  при двустороннем критерии соответствуют критические значения  $\Theta_{0,025}$  и  $\Theta_{0,975}$ , т. е. значимыми (неслучайными) считаются  $\Theta^*$ , принявшие значения  $\Theta^* < \Theta_{0,025}$  и  $\Theta^* > \Theta_{0,975}$ . При одностороннем критерии одно из этих неравенств заведомо невозможно (например,  $\Theta^* < \Theta_{0,025}$ ) и значимыми будут лишь  $\Theta^* > \Theta_{0,975}$ . Вероятность последнего неравенства равна 0,025, и, следовательно, уровень значимости будет равен 0,025. Таким образом, если при односторон-

нем критерии значимости использовать те же критические числа, что и при двустороннем, этим значениям будет соответствовать вдвое меньший уровень значимости.

Обычно для одностороннего критерия берут тот же уровень значимости, что и для двустороннего, так как при этих условиях оба критерия обеспечивают одинаковую ошибку первого рода. *Для этого односторонний критерий надо выводить из двустороннего, соответствующего вдвое большему уровню значимости, чем тот, что принят.* Чтобы сохранить для одностороннего критерия уровень значимости  $p = 0,05$ , для двустороннего необходимо взять  $p = 0,10$ , что дает критические значения  $\Theta_{0,05}$  и  $\Theta_{0,95}$ . Из них для одностороннего критерия останется какое-нибудь одно, например,  $\Theta_{0,95}$ . Уровень значимости для одностороннего критерия равен при этом 0.05. Этому же уровню значимости для двустороннего критерия соответствует критическое значение  $\Theta_{0,975}$ . Но  $\Theta_{0,95} < \Theta_{0,975}$ , значит, при одностороннем критерии большее число гипотез будет отвергнуто и, следовательно, меньше будет ошибка второго рода.

#### **4.3. Построение доверительного интервала для математического ожидания непосредственно измеряемой величины.**

##### **Распределение Стьюдента.**

*При отсутствии грубых и систематических ошибок математическое ожидание случайной величины совпадает с истинным результатом наблюдений.* Легче всего оценить математическое ожидание при известной дисперсии генеральной совокупности (выражения 4.6 – 4.8). Однако значение  $\sigma^2$  нельзя получить из наблюдений, ее можно только оценить при помощи выборочной дисперсии  $s^2$ . Ошибка от этой замены будет тем меньше, чем больше объем выборки  $n$ . На практике эту погрешность не учитывают при  $n \leq 50$  и в формуле (4.7) для доверительного интервала генеральный параметр  $\sigma$  заменяют выборочным стандартом. В дальнейшем примем, что наблюдаемая случайная величина имеет нормальное распределение.

При небольших объемах выборок для построения доверительного интервала математического ожидания используют *распределение Стьюдента, или t-распределение*. Распределение Стьюдента имеет величина  $t$

$$t = \frac{\bar{x} - m_x}{s_x} \sqrt{n} \quad (4.11)$$

с плотностью вероятности

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi f}} \frac{\Gamma\left(\frac{f+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{f}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{f}\right)^{-\left(\frac{f+1}{2}\right)}, \quad -\infty < t < +\infty, \quad (4.12)$$

где  $\Gamma(f)$  — гамма-функция Эйлера:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-y} y^{z-1} dy; \quad (4.13)$$

$f$  — число степеней свободы выборки. Если дисперсия  $s^2$  и среднее  $\bar{x}$  определяются по одной и той же выборке, то  $f = n - 1$ .

Распределение Стьюдента зависит только от числа степеней свободы  $f$ , с которым определена выборочная дисперсия. На рис. 14 приведены графики плотности  $t$ -распределения для нескольких чисел свободы  $f$  и нормальная кривая.

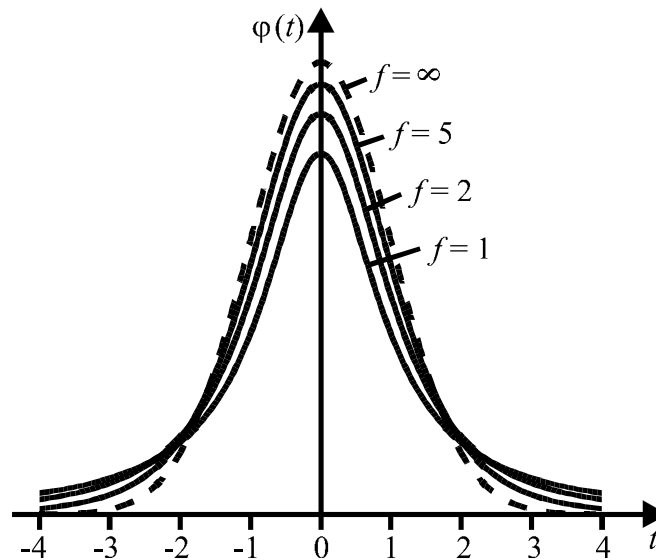


Рис. 14. Плотность распределения Стьюдента.

Кривые  $t$ -распределения по своей форме напоминают нормальную кривую, но при малых  $f$  они медленнее сближаются с осью абсцисс при  $|t| \rightarrow \infty$ . При  $f \rightarrow \infty$   $s^2 \rightarrow \sigma^2$ , поэтому распределение Стьюдента сближается (в пределе соответствует) с нормальным распределением.

Вероятность того, что случайная величина попадет в интервал  $(t_{p/2}; t_{1-p/2})$ , определяется выражением

$$P(t_{p/2} \leq t \leq t_{1-p/2}) = 1 - p = \beta. \quad (4.14)$$

Распределение Стьюдента симметрично относительно нуля, поэтому

$$t_{p/2} = -t_{1-p/2}. \quad (4.15)$$

Учитывая симметрию  $t$ -распределения, часто пользуются обозначением  $t_p(f)$ , где  $f$  — число степеней свободы,  $p$  — уровень значимости, т. е. вероятность того, что  $t$  находится за пределами интервала  $(t_{p/2}; t_{1-p/2})$ . Подставляя в (4.14) выражение для  $t$  (4.11) с учетом (4.15), получаем неравенство

$$-t_{1-p/2} \leq \frac{\bar{x} - m_x}{S_x} \sqrt{n} \leq t_{1-p/2}, \quad (4.16)$$

и после преобразований имеем

$$\bar{x} - \frac{S_x}{\sqrt{n}} t_{1-p/2} \leq m_x \leq \bar{x} + \frac{S_x}{\sqrt{n}} t_{1-p/2}. \quad (4.17)$$

Значения квантилей  $t_{1-p/2}$  для различных чисел степеней свободы  $f$  и уровней значимости  $p$  приведены в приложении 3. Выражение (4.17) означает, что интервал с доверительными границами

$$(\bar{x} - s(\bar{x}) t_{1-p/2}) \div (\bar{x} + s(\bar{x}) t_{1-p/2}) \quad (4.18)$$

накрывает с вероятностью  $\beta$  генеральное среднее измеряемой величины. Величина доверительного интервала (4.18) определяет надежность среднего выборки. Величину

$$s(\bar{x}) t_{1-p/2} = \frac{S_x}{\sqrt{n}} t_{1-p/2} = \varepsilon_{\text{случ}}, \quad (4.19)$$

т. е. половину доверительного интервала, называют *случайной ошибкой*. С учетом только случайной ошибки результат измерений некоторой величины следует записывать так:

$$X = \bar{x} \pm \varepsilon_{\text{случ}} = \bar{x} \pm \frac{S_x}{\sqrt{n}} t_{1-p/2}. \quad (4.20)$$



## ЛЕКЦИЯ 5

**Оценка случайной и суммарной ошибки косвенных измерений. Оценка дисперсии нормально распределенной случайной величины; распределение Пирсона. Сравнение двух дисперсий, распределение Фишера.**

### 5.1. Оценка случайной и суммарной ошибки косвенных измерений.

В самом общем виде пример косвенных измерений формулируется следующим образом: имеется известная функция нескольких аргументов

$$Z = f(X_1, X_2, \dots, X_k),$$

причем на опыте непосредственно измеряются случайные величины  $X_1, X_2, \dots, X_k$ . При строгом статистическом анализе случайной ошибки  $Z$  необходимо найти закон распределения функции по известным законам распределения аргументов, что связано с большими вычислительными трудностями. Из-за этого строгая оценка ошибки косвенных измерений трудно выполнима и практически нецелесообразна. Поэтому используются упрощенные подходы, значительно облегчающие расчеты и вместе с тем дающие удовлетворительные для практических целей результаты.

Рассмотрим вначале случай, когда  $Z$  является известной функцией только одного параметра  $X$ :  $Z = f(X)$ . Введем допущение о том, что в небольших интервалах изменения нормально распределенного аргумента функция этого аргумента также подчиняется нормальному закону распределения. Пусть  $x_1, x_2, \dots, x_n$  — результаты  $n$  измерений величины  $X$ . Для каждого из  $x_i$  можно найти соответствующее значение  $z_i$ , затем вычислить среднее  $\bar{z}$  и выборочную дисперсию  $s^2(Z)$  с числом степеней свободы  $f = n - 1$ . Тогда согласно изложенному в предыдущем разделе имеем

$$\varepsilon_{\text{случ}}(Z) = s(\bar{z})t_{1-p/2} = \frac{s(Z)}{\sqrt{n}}t_{1-p/2}. \quad (5.1)$$

При учете только случайной ошибки результат измерений функции следует записать так:

$$Z = \bar{z} \pm \varepsilon_{\text{случ}}(Z) = \bar{z} \pm \frac{s(Z)}{\sqrt{n}}t_{1-p/2}. \quad (5.2)$$

Если  $f(x)$  является достаточно сложной функцией и каждый раз вычисление величины  $z_i$  по значению  $x_i$  трудоемко, то можно определить сначала величины  $\bar{x}$  и  $s(X)$ , а затем пересчитать их в соответствующие величины  $\bar{z}$  и  $s(Z)$  при помощи приближенных формул:

$$\bar{z} = f(\bar{x}), \quad (5.3)$$

$$s(Z) = \left| \frac{\partial f}{\partial X} \right|_{X=\bar{x}} s(X). \quad (5.4)$$

Для случая, когда  $Z$  является известной функцией нескольких аргументов, используем следующие допущения:

- 1) Случайные величины  $X_1, X_2, \dots, X_k$  независимы.
- 2) В небольших интервалах изменения аргументов функция  $Z$  распределена нормально.
- 3) Выборочная дисперсия величины  $\bar{z}$  равна соответствующей генеральной

$$s^2(\bar{z}) = \sigma^2(\bar{z}). \quad (5.5)$$

Оценка случайной ошибки функции проводится в следующем порядке. Находим среднее функции:

$$\bar{z} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k), \quad (5.6)$$

где  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k$  — средние по выборкам соответствующих аргументов. Затем по закону накопления ошибок оцениваем выборочную дисперсию

$$s^2(\bar{z}) = \sum_{j=1}^k \left( \frac{\partial f}{\partial X_j} \right)_{X_j=\bar{x}_j}^2 s^2(\bar{x}_j). \quad (5.7)$$

Тогда величина случайной ошибки функции определяется следующим образом:

$$\varepsilon_{\text{случ}}(Z) = U_{1-p/2} s(\bar{z}), \quad (5.8)$$

где  $U_{1-p/2}$  — квантиль стандартного нормального распределения (приложение 2), равный 1,96 для уровня значимости  $p = 0,05$ .

При учете только случайной ошибки для доверительной вероятности  $\beta = 0,95$  результат измерений функции нескольких аргументов следует записать так:

$$Z = \bar{z} \pm \varepsilon_{\text{случ}}(Z) = \bar{z} \pm U_{1-p/2} s(\bar{z}) = \bar{z} \pm 1.96 \cdot s(\bar{z}) \approx \bar{z} \pm 2 s(\bar{z}). \quad (5.9)$$

Случайную ошибку косвенных измерений можно оценить также, воспользовавшись формулами расчета погрешностей функций приближенных аргументов (лекция 1) для случая, когда погрешности аргументов независимы и случайны:

$$\varepsilon_{\text{случ}}(Z) \approx 2s(\bar{z}) = \sqrt{\sum_{j=1}^k \left( \frac{\partial f}{\partial X_j} \Delta x_j \right)^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^k \left( \frac{\partial f}{\partial X_j} \right)^2 (2s(\bar{x}_j))^2}, \quad (5.10)$$

при этом в качестве абсолютной погрешности аргументов следует использовать удвоенное значение среднеквадратичных отклонений их средних

$$\Delta x_j = 2s(\bar{x}_j). \quad (5.11)$$

В общем случае при представлении результатов измерений следует учитывать не только случайную, но и систематическую ошибку методики или прибора. Предполагая, что эти два типа ошибки взаимонезависимы, суммарная ошибка измерений равна:

$$\varepsilon_{\text{сумм}} = \varepsilon_{\text{сист}} + \varepsilon_{\text{случ}}. \quad (5.12)$$

Систематические ошибки являются величинами, не зависящими от числа измерений, и определяются спецификой используемой аппаратуры и методом измерений. Так, например, с помощью ртутного термометра нельзя измерить температуру с точностью, большей  $0,01^\circ\text{C}$  (редко  $0,005^\circ\text{C}$ ); значение эталонного сопротивления может быть известно с точностью  $0,1\%$  или  $0,01\%$ ; и т. д. Если и источники, и величины систематических ошибок определены, то их влияние на окончательный результат косвенных измерений для функции нескольких аргументов можно оценить как предельную абсолютную погрешность по формуле (лекция 1)

$$\varepsilon_{\text{сист}} = \varepsilon_{\text{пр}} \approx \sum_{j=1}^k \left| \frac{\partial f}{\partial X_j} \right| |\Delta x_j|. \quad (5.13)$$

Величина систематической ошибки ограничивает число верных значащих цифр при представлении результатов эксперимента. С учетом систематической ошибки результат любого измерения следует записывать следующим образом:

$$Z = \bar{z} \pm \varepsilon_{\text{сумм}} = \bar{z} \pm (\varepsilon_{\text{сист}} + \varepsilon_{\text{случ}}). \quad (5.14)$$

## 5.2. Оценка дисперсии нормально распределенной случайной величины.

Дисперсию генеральной совокупности  $\sigma^2$  нормальной распределенной случайной величины можно оценить, если известно распределение ее оценки — выборочной дисперсии  $s^2$ . Распределение выборочной дисперсии можно получить при помощи распределения Пирсона или  $\chi^2$ -распределения.

Пусть имеется выборка  $n$  независимых наблюдений  $x_1, x_2, \dots, x_n$  над нормально распределенной случайной величиной. Можно показать, что сумма

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma} \right)^2 \quad (5.15)$$

имеет распределение с  $f = n - 1$  степенями свободы. Плотность  $\chi^2$  распределения зависит только от числа степеней свободы  $f$ :

$$\varphi(\chi^2) = \frac{1}{2^{f/2} \Gamma(f/2)} (\chi^2)^{\frac{f-2}{2}} e^{-\frac{\chi^2}{2}}, \quad 0 \leq \chi^2 \leq \infty, \quad (5.16)$$

где  $\Gamma(f)$  — гамма-функция. На рис. 15 приведены кривые плотности вероятности  $\chi^2$  распределения при некоторых значениях  $f$ . Кривые асимметричны, степень асимметрии уменьшается с увеличением  $f$ .

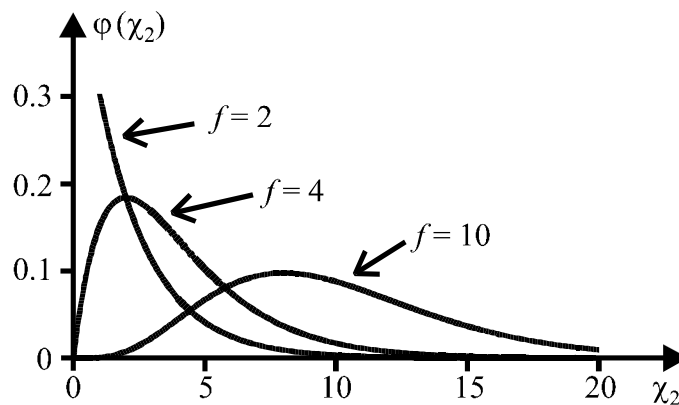


Рис. 15. Плотность  $\chi^2$ -распределения.

При доверительной вероятности  $\beta = 1 - p$  двусторонняя доверительная оценка для  $\chi^2$  имеет вид

$$\chi_{p/2}^2 \leq \chi^2 \leq \chi_{1-p/2}^2, \quad (5.17)$$

односторонние оценки имеют вид

$$\chi^2 \leq \chi_{1-p}^2, \quad \chi^2 \geq \chi_p^2. \quad (5.18)$$

Квантили  $\chi_{1-p}^2$  при различных  $p$  и  $f$  приведены в приложении 4.

Поскольку выборочная дисперсия определяется по формуле

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{f},$$

то с учетом (5.15) имеем:

$$\chi^2 = f s^2 / \sigma^2. \quad (5.19)$$

Подставляя (5.19) в (5.17) и решая полученное неравенство относительно  $\sigma^2$ , получим доверительные двусторонние границы для генеральной дисперсии:

$$\chi_{p/2}^2 \leq f s^2 / \sigma^2 \leq \chi_{1-p/2}^2, \quad (5.20)$$

$$\frac{f s^2}{\chi_{1-p/2}^2} \leq \sigma^2 \leq \frac{f s^2}{\chi_{p/2}^2}. \quad (5.21)$$

Аналогично получаются односторонние доверительные оценки:

$$\sigma^2 \leq f s^2 / \chi_p^2, \quad \sigma^2 \geq f s^2 / \chi_{1-p}^2. \quad (5.22)$$

С ростом числа степеней свободы асимметрия кривых  $\chi^2$ -распределения уменьшается, соответственно уменьшается и асимметрия доверительных границ. Можно показать, что при  $n \geq 30$  выборочный стандарт  $s$  распределен приблизительно нормально с математическим ожиданием  $m_s = \sigma$  и среднеквадратичной ошибкой

$$\sigma_s = \sigma / \sqrt{2f}. \quad (5.23)$$

Неизвестный генеральный стандарт в (5.23) при  $n \geq 30$  заменяют выборочным

$$\sigma_s \approx s / \sqrt{2f}. \quad (5.24)$$

Тогда по уравнению (4.8) (лекция 4) доверительные границы для генерального стандарта определяются неравенством

$$s - (s / \sqrt{2f}) U_{1-p/2} \leq \sigma \leq s + (s / \sqrt{2f}) U_{1-p/2}. \quad (5.25)$$

### 5.3. Сравнение двух дисперсий. Распределение Фишера.

При обработке результатов измерений часто бывает необходимым сравнить две или несколько выборочных дисперсий. Основная гипотеза, которая при этом проверяется, следующая: можно ли считать сравниваемые выборочные дисперсии оценками одной и той же генеральной дисперсии? Рассмотрим две выборки

$$x_1', x_2', \dots, x_{n_1}' \text{ и } x_1'', x_2'', \dots, x_{n_2}'',$$

средние значения которых равны  $\bar{x}_1$  и  $\bar{x}_2$ . Выборочные дисперсии определяются со степенями свободы  $f_1 = n_1 - 1$  и  $f_2 = n_2 - 1$ :

$$s_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} (x_i' - \bar{x}_1)^2}{f_1}; \quad s_2^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_2} (x_i'' - \bar{x}_2)^2}{f_2}. \quad (5.26)$$

Требуется выяснить, являются ли выборочные дисперсии  $s_1^2$  и  $s_2^2$  значимо различными или же полученные выборки можно рассматривать как взятые из генеральных совокупностей с равными дисперсиями.

Допустим, что первая выборка была взята из генеральной совокупности с дисперсией  $\sigma_1^2$ , а вторая — из генеральной совокупности с дисперсией  $\sigma_2^2$ . Проверяется *нулевая гипотеза* о равенстве генеральных дисперсий  $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ . Чтобы отвергнуть эту гипотезу, нужно доказать значимость различия между  $s_1^2$  и  $s_2^2$  при выбранном уровне значимости  $p$ .

В качестве критерия значимости обычно используется *критерий Фишера*. *Распределением Фишера* ( $F$ -распределением,  $\nu^2$ -распределением) называется распределение случайной величины

$$F = \frac{(s_1^2 / \sigma_1^2)}{(s_2^2 / \sigma_2^2)}. \quad (5.27)$$

Плотность  $F$ -распределения определяется выражением

$$\varphi(F) = \frac{\Gamma\left(\frac{f_1 + f_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{f_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{f_2}{2}\right)} \left(\frac{f_1}{f_2}\right)^{f_1/2} \frac{F^{(f_1-2)/2}}{\left(1 + \frac{f_1}{f_2}F\right)^{(f_1+f_2)/2}}, \quad 0 \leq F \leq \infty, \quad (5.28)$$

где  $\Gamma(f)$  — гамма-функция. Распределение Фишера зависит только от числа степеней свободы  $f_1$  и  $f_2$ . На рис. 16 приведены кривые плотности вероятности  $F$ -распределения для некоторых значений  $f_1$  и  $f_2$ . Кривые имеют асимметричную форму.

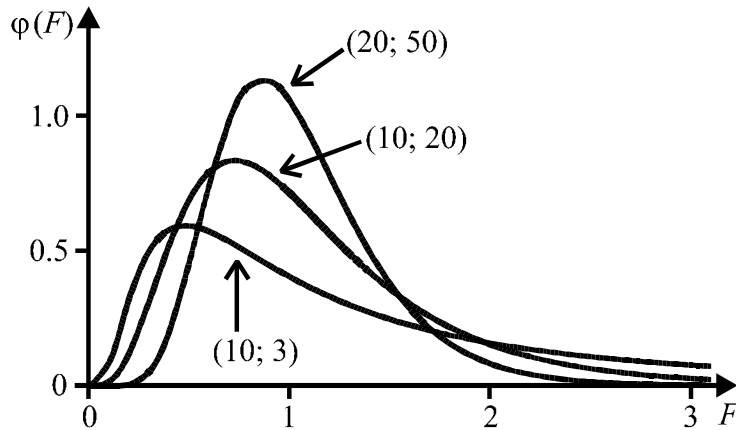


Рис. 16. Плотность  $F$ -распределения.

В приложении 5 приведены квантили  $F_{1-p}$  (критерии Фишера) для уровня значимости  $p = 0,05$ . Для определения квантилей  $F_p$  используется соотношение

$$F_p(f_1, f_2) = \frac{1}{F_{1-p}(f_2, f_1)}. \quad (5.29)$$

В условиях нулевой гипотезы  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$  и  $\sigma_1^2/\sigma_2^2 = 1$  и, следовательно,  $F$ -распределение может быть непосредственно использовано для оценки отношения  $s_1^2/s_2^2$ . При доверительной вероятности  $(1 - p)$  двусторонняя оценка величины  $F$  имеет вид

$$F_{p/2}(f_1, f_2) \leq F \leq F_{1-p/2}(f_1, f_2) \quad (5.30)$$

или с учетом (5.29)

$$\frac{1}{F_{1-p/2}(f_2, f_1)} \leq F \leq F_{1-p/2}(f_1, f_2). \quad (5.31)$$

В условиях нулевой гипотезы  $F = s_1^2/s_2^2$  и, следовательно, с вероятностью  $(1 - p)$  должно выполняться двустороннее неравенство

$$\frac{1}{F_{1-p/2}(f_2, f_1)} \leq \frac{s_1^2}{s_2^2} \leq F_{1-p/2}(f_1, f_2) \quad (5.32)$$

или одно из односторонних неравенств, например, для оценки сверху:

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} \leq F_{1-p}(f_1, f_2). \quad (5.33)$$

Вероятность неравенств, противоположных (5.32) – (5.33), равна уровню значимости  $p$ ; они образуют критическую область для нулевой гипотезы. Если полученное дисперсионное отношение попадает в критическую область, то различие между дисперсиями значимо. Для удобства будем обозначать большую дисперсию через  $s_1^2$ .

При проверке нулевой гипотезы  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$  односторонний критерий применяется, если альтернативной гипотезой является  $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ , т. е. что большей выборочной дисперсии заведомо не может соответствовать меньшая генеральная. При этом различие между дисперсиями согласно (5.33) следует считать значимым, если

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} > F_{1-p}(f_1, f_2). \quad (5.34)$$

Значения  $F_{1-p}(f_1, f_2)$  для  $p = 0,05$  приведены в приложении 5.

Двусторонний критерий значимости применяется для альтернативной гипотезы  $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ , т. е. когда соотношение между генеральными дисперсиями неизвестно. При этом в неравенстве (5.32) необходимо проверять только правую часть, так как левая часть всегда выполняется по условию

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} > 1, \text{ а } \frac{1}{F_{1-p/2}(f_2, f_1)} < 1$$

при небольших  $p$ . При этом различие между дисперсиями следует считать значимым, если

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} > F_{1-p/2}(f_1, f_2). \quad (5.35)$$

Критерий Фишера используется для сравнения дисперсий и в том случае, когда одна из дисперсий является генеральной (ее число степеней свободы считается равным  $\infty$ ).



## ЛЕКЦИЯ 6

**Определение дисперсии по текущим измерениям. Сравнение нескольких дисперсий; критерии Бартлетта, Кохрена. Сравнение двух средних; расчет средневзвешенного значения. Проверка однородности результатов измерений. Сравнение выборочного распределения и распределения генеральной совокупности; критерии согласия Пирсона, Колмогорова.**

### 6.1. Определение дисперсии по текущим измерениям. Сравнение нескольких дисперсий.

Математическое ожидание и дисперсия генеральной совокупности оцениваются средним и дисперсией выборки тем точнее, чем больше объем выборки. При этом среднее характеризует результат измерений, а дисперсия — точность этого результата (*дисперсия воспроизводимости*). Если проделано  $n$  параллельных опытов (опытов, проведенных при неизменном комплексе основных факторов) и получена выборка  $y_1, y_2, \dots, y_n$  значений измеряемой величины, то дисперсия воспроизводимости равна

$$s_{\text{воспр.}}^2 = \frac{\sum_{u=1}^n (y_u - \bar{y})^2}{n-1}, \text{ где } \bar{y} = \frac{\sum_{u=1}^n y_u}{n}, \quad (6.1)$$

и ошибка опыта (*ошибка воспроизводимости*)

$$s_{\text{воспр.}} = \sqrt{s_{\text{воспр.}}^2}. \quad (6.2)$$

Для оценки точности применяемой методики можно поставить специальную серию опытов, многократно повторяя измерение для одного и того же образца. Однако более надежным методом является определение ошибки воспроизводимости по текущим измерениям. Предположим, что выполняются измерения некоторой физической характеристики для  $k$  образцов, при этом для каждого образца делается различное число параллельных опытов:  $n_1, n_2, \dots, n_k$ . Частные дисперсии для каждой выборки обозначим как  $s_1^2, s_2^2, \dots, s_k^2$ . Числа степеней свободы частных дисперсий равны:  $f_1 = n_1 - 1, f_2 = n_2 - 1, \dots, f_k = n_k - 1$ . Общая дисперсия воспроизводимости всех опытов будет равна *средневзвешенному значению частных дисперсий* (в качестве весов берутся степени свободы):

$$s_{\text{воспр.}}^2 = \frac{f_1 s_1^2 + f_2 s_2^2 + \dots + f_k s_k^2}{f_1 + f_2 + \dots + f_k} =$$

$$= \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2 + \dots + (n_k - 1)s_k^2}{n_1 + n_2 + \dots + n_k - k}. \quad (6.3)$$

Число степеней свободы общей дисперсии равно общему числу измерений минус число связей, использованных для определения  $k$  средних:

$$f_{\text{воспр.}} = n_1 + n_2 + \dots + n_k - k = \sum_{j=1}^k n_j - k. \quad (6.4)$$

Если число опытов для каждого образца одинаково ( $n_1 = n_2 = \dots = n_k = n$ ), то

$$s_{\text{воспр.}}^2 = \frac{(n-1)(s_1^2 + s_2^2 + \dots + s_k^2)}{nk - k} = \frac{(n-1) \sum_{j=1}^k s_j^2}{k(n-1)} = \frac{\sum_{j=1}^k s_j^2}{k}, \quad (6.5)$$

т. е. при равном числе параллельных опытов общая дисперсия воспроизводимости равна среднеарифметическому значению частных дисперсий. Число степеней свободы равно  $f_{\text{воспр.}} = k(n-1)$ . Число степеней свободы у общей дисперсии воспроизводимости гораздо больше, чем у каждой дисперсии в отдельности. Поэтому общая дисперсия воспроизводимости намного точнее оценивает дисперсию генеральной совокупности.

При вычислении дисперсии воспроизводимости по текущим измерениям можно объединять между собой только те результаты, которые можно рассматривать как выборки из генеральных совокупностей с равными дисперсиями.

Итак, при определении оценки дисперсии по текущим измерениям

$$s_{\text{воспр.}}^2 = \frac{f_1 s_1^2 + f_2 s_2^2 + \dots + f_k s_k^2}{f_1 + f_2 + \dots + f_k} = \frac{\sum_{j=1}^k f_j s_j^2}{f_{\text{воспр.}}} \quad (6.6)$$

принимается нулевая гипотеза равенства соответствующих генеральных дисперсий. Проверить эту гипотезу для выборок разного объема можно по *критерию Бартлета*. Бартлет показал, что в условиях нулевой гипотезы отношение  $V/C$ , где

$$B = f_{\text{воспр}} \ln s_{\text{воспр}}^2 - \sum_{j=1}^k f_j \ln s_j^2, \quad (6.7)$$

$$C = 1 + \frac{1}{3(k-1)} \left( \sum_{j=1}^k \frac{1}{f_j} - \frac{1}{f_{\text{воспр}}} \right), \quad (6.8)$$

распределено приближенно как  $\chi^2$  с  $k - 1$  степенями свободы, если все  $f_j > 2$ . Гипотеза равенства генеральных дисперсий принимается, если при выбранном уровне значимости  $p$

$$B/C \leq \chi_{1-p}^2. \quad (6.9)$$

Различие между выборочными дисперсиями можно считать незначимым, а сами выборочные дисперсии — однородными. Так как всегда  $C > 1$ , то при  $B \leq \chi_{1-p}^2$  нулевую гипотезу следует принять; если же  $B > \chi_{1-p}^2$ , то критерий Бартлета вычисляются полностью.

Если выборочные дисперсии получены по выборкам одинаковых объемов ( $n_1 = n_2 = \dots = n_k = n$ ), то для их сравнения используют более удобный и точный критерий Кохрена. Кохрен исследовал распределение отношения максимальной выборочной дисперсии к сумме всех дисперсий

$$G = \frac{s_{\max}^2}{\sum_{j=1}^k s_j^2} \quad (6.10)$$

Распределение случайной величины  $G$  зависит только от числа суммируемых дисперсий  $k$  и числа степеней свободы  $f = n - 1$ , с которым определена каждая дисперсия.

В приложении 6 приведены квантили  $G_{1-p}$  для уровня значимости  $p = 0,05$ . Если найденное по выборочным дисперсиям значение критерия Кохрена окажется меньше табличного

$$G < G_{1-p}(k, f), \quad (6.11)$$

то расхождение между дисперсиями следует считать случайным при выбранном уровне значимости. Если при этом определяется оценка для дисперсии воспроизводимости, то однородные дисперсии можно усреднить.

## 6.2. Сравнение двух средних. Расчет средневзвешенного значения.

Для сравнения между собой двух средних, полученных по выборкам из нормально распределенных генеральных совокупностей, применяется критерий Стьюдента.

Пусть заданы две случайные выборки объемами  $n_1$  и  $n_2$ . Первая выборка взята из нормально распределенной совокупности с параметрами  $m_x$  и  $\sigma_x^2$ , вторая — из совокупности с параметрами  $m_y$  и  $\sigma_y^2$ . По выборкам получены оценки для этих параметров:  $\bar{x}$ ,  $s_x^2$  и  $\bar{y}$ ,  $s_y^2$ . Требуется проверить нулевую гипотезу:  $m_x = m_y$  при условии  $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma^2$ . Однородность дисперсий  $s_x^2$  и  $s_y^2$  проверяется по критерию Фишера. Рассмотрим случайную величину

$$z = \bar{x} - \bar{y}. \quad (6.12)$$

По свойству линейности (уравнения 2.37 – 2.38) величина  $z$  распределена нормально с параметрами

$$m_z = m_x - m_y, \quad (6.13)$$

$$\sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 = \frac{\sigma_x^2}{n_1} + \frac{\sigma_y^2}{n_2} = \sigma^2 \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right). \quad (6.14)$$

Составим нормированную случайную величину

$$\frac{z - m_z}{\sigma_z} = \frac{(\bar{x} - \bar{y}) - (m_x - m_y)}{\sigma \sqrt{(1/n_1 + 1/n_2)}}. \quad (6.15)$$

При замене генерального стандарта выборочным получается величина, имеющая распределение Стьюдента:

$$t = \frac{(\bar{x} - \bar{y}) - (m_x - m_y)}{s \sqrt{(1/n_1 + 1/n_2)}}, \quad (6.16)$$

с числом степеней свободы  $f = n_1 + n_2 - 2$ . В качестве выборочного стандарта используется ошибка опыта, равная

$$s = \sqrt{\frac{f_1 s_1^2 + f_2 s_2^2}{f_1 + f_2}} = \sqrt{\frac{(n_1 - 1) s_1^2 + (n_2 - 1) s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}. \quad (6.17)$$

При доверительной вероятности  $\beta = 1 - p$  получаем двустороннюю оценку для разности  $(m_x - m_y)$

$$\begin{aligned} \bar{x} - \bar{y} - t_{1-p/2} s \sqrt{(1/n_1 + 1/n_2)} &\leq m_x - m_y \leq \\ &\leq \bar{x} - \bar{y} + t_{1-p/2} s \sqrt{(1/n_1 + 1/n_2)} \end{aligned} \quad (6.18)$$

или односторонние оценки

$$m_x - m_y \leq \bar{x} - \bar{y} + t_{1-p} s \sqrt{(1/n_1 + 1/n_2)}, \quad (6.19)$$

$$m_x - m_y \geq \bar{x} - \bar{y} - t_{1-p} s \sqrt{(1/n_1 + 1/n_2)}. \quad (6.20)$$

В условиях нулевой гипотезы  $m_x = m_y$  и неравенства (6.18) – (6.20) дают критерий проверки этой гипотезы. Нулевая гипотеза отвергается при двустороннем критерии, если

$$|\bar{x} - \bar{y}| > t_{1-p/2} s \sqrt{(1/n_1 + 1/n_2)}, \quad (6.21)$$

и при одностороннем критерии, если

$$|\bar{x} - \bar{y}| > t_{1-p} s \sqrt{(1/n_1 + 1/n_2)}. \quad (6.22)$$

В том случае если выборочные средние являются оценками одного и того же математического ожидания и выборочные дисперсии однородны, то полученные выборки можно объединить в одну серию и рассчитать для нее общие среднее и дисперсию.

Приведенными критериями нельзя пользоваться, если выборочные дисперсии неоднородны (т. е.  $\sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$ ). Для этого случая существует несколько приближенных критериев для сравнения двух средних. При  $n_1 = n_2 = n$  можно воспользоваться приближенным  $t$ -критерием:

$$t \cong \frac{(\bar{x} - \bar{y})\sqrt{n}}{\sqrt{s_x^2 + s_y^2}} \quad (6.23)$$

с числом степеней свободы  $f = \frac{n-1}{c^2 - (1-c)^2}$ , где  $c = \frac{s_x^2}{s_x^2 + s_y^2}$ .

Если число степеней свободы дисперсии  $s_x^2$  равно  $f_1 = n_1 - 1$ , дисперсии  $s_y^2$  —  $f_2 = n_2 - 1$ , можно использовать другой приближенный критерий. Вычислим величину

$$T = \frac{v_1 t_{1-p/2}(f_1) + v_2 t_{1-p/2}(f_2)}{\sqrt{v_1 + v_2}}, \quad (6.24)$$

где  $v_1 = s_x^2 / n_1$  и  $v_2 = s_y^2 / n_2$ . Нулевая гипотеза отвергается, если

$$|\bar{x} - \bar{y}| > T.$$

Сформулированный критерий является двусторонним, он превращается в односторонний при замене  $p/2$  на  $p$ .

При сравнении нескольких средних можно использовать  $t$ -критерий, проводя сравнение попарно. Если выборочные средние оценивают одно и то же математическое ожидание, то в качестве единственной наилучшей оценки обычно используется *средневзвешенное значение*. Пусть независимым образом получено  $k$  оценок ( $j = 1, 2, \dots, k$ ) некоторой величины  $X$ :

$$\bar{x}_j \pm \frac{s(x_j)}{\sqrt{n_j}} t_{1-p/2}(f_j) = \bar{x}_j \pm \Delta x_j. \quad (6.25)$$

Определим вес результата, полученного в каждой серии опытов:

$$w_j = 1 / \Delta x_j^2. \quad (6.26)$$

Тогда средневзвешенное значение (наилучшая оценка для  $X$ ) равно

$$\bar{X} = \frac{\sum_{j=1}^k w_j \bar{x}_j}{\sum_{j=1}^k w_j}, \quad (6.27)$$

а его погрешность определяется формулой

$$\Delta \bar{X} = \sqrt{1 / \sum_{j=1}^k w_j}. \quad (6.28)$$

### 6.3. Проверка однородности результатов измерений.

Грубые измерения являются результатом поломки прибора или недосмотра экспериментатора, и результат, содержащий грубую ошибку, сильно отличается по величине. На этом основаны статистические критерии оценки и исключения грубых измерений. Наличие грубой ошибки в выборке нарушает характер распределения случайной величины, изменяет его параметры, т.е. нарушается однородность наблюдений. Следовательно, выявление грубых ошибок можно трактовать как проверку однородности наблюдений, т.е. проверку гипотезы о том, что все элементы выборки получены из одной и той же генеральной совокупности.

Пусть имеется выборка  $x_1, x_2, \dots, x_n$  значений нормально распределенной случайной величины  $X$ . Обозначим через  $x_{\max}$  ( $x_{\min}$ ) наибольший (наименьший) результат измерений. Величины

$$v = \frac{x_{\max} - \bar{x}}{s \cdot \sqrt{\frac{n-1}{n}}}, \quad (6.29)$$

$$v' = \frac{\bar{x} - x_{\min}}{s \cdot \sqrt{\frac{n-1}{n}}} \quad (6.30)$$

имеют специальное распределение, зависящее только от числа степеней свободы  $f = n - 2$ . В приложении 7 приведены значения  $v$  ( $v'$ ) для  $p = 0,10; 0,05; 0,025$  и  $0,01$  при числе степеней свободы от 1 до 23. Величина  $x_{\max}$  ( $x_{\min}$ ) исключается из выборки как грубое измерение (на уровне значимости  $p$ ), если определенное по формулам (6.29) и (6.30) значение  $v$  или  $v'$  окажется больше табличного.

Если сомнение вызывают два или три элемента выборки, поступают следующим образом. Для всех сомнительных элементов вычисляют  $v$  ( $v'$ ), и исследование начинается с элемента, имеющего наименьшее значение  $v$  ( $v'$ ). Остальные сомнительные элементы из выборки исключаются. Для этой уменьшенной выборки вычисляют  $\bar{x}$ ,  $s$  и новое значение  $v$  ( $v'$ ) для исследуемого элемента. Если исследуемый элемент является грубым измерением, еще с большим основанием можно считать грубыми ранее исключенные элементы. Если исследуемый элемент не является грубым измерением, его присоединяют к выборке и начинают исследовать следующий по величине  $v$  ( $v'$ ) элемент выборки, при этом снова вычисляя новые значения  $\bar{x}$ ,  $s$ , и т.д.

#### **6.4. Сравнение выборочного распределения и распределения генеральной совокупности. Критерии согласия Пирсона и Колмогорова.**

Гипотезу о нормальности изучаемого распределения в математической статистике называют *основной гипотезой*. Проверку этой гипотезы по выборке проводят при помощи *критериев согласия*. Критерии согласия позволяют определить вероятность того, что при гипотетическом законе распределения наблюдающееся в рассматриваемой выборке отклонение вызывается случайными причинами, а не ошибкой в

гипотезе. Если эта вероятность велика, то отклонение от гипотетического закона распределения следует признать случайным и считать, что гипотеза о предполагаемом законе распределения не опровергается. Критерий согласия позволяет лишь утверждать, что гипотеза не противоречит опытным данным, если вероятность наблюдаемого отклонения от гипотетического закона велика. Чаще всего используется один из двух критериев согласия: *критерий Пирсона* (критерий  $\chi^2$ ) и *критерий Колмогорова*.

**Критерий согласия Пирсона.** Для применения критерия  $\chi^2$  весь диапазон изменения случайной величины в выборке объема  $n$  разбивается на  $k$  интервалов (от 8 до 20). Число элементов выборки, попавших в  $i$ -интервал, обозначим через  $n_i$ . Построенная по этим данным гистограмма выборочного распределения служит основанием для выбора типа закона распределения.

Параметры этого распределения могут быть найдены или из теоретических соображений, или нахождением их оценок по выборке. На основании принятого закона распределения вычисляются вероятности  $p_i$  попадания случайной величины  $X$  в  $i$ -интервал. Величина, характеризующая отклонение выборочного распределения от предполагаемого, определяется формулой

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}, \quad (6.31)$$

где  $k$  — число интервалов;  $n$  — объем выборки.

Сумма (6.31) имеет приближенно  $\chi^2$ -распределение с  $f = (k - c - 1)$  степенями свободы, где  $c$  — число параметров гипотетического закона распределения, определяемых по выборке. Для нормального распределения  $c = 2$ , если  $\bar{x}$  и  $s$  определяются по данной выборке.

Гипотеза о принятом типе закона распределения принимается на выбранном уровне значимости  $p$ , если  $\chi^2 \leq \chi_{1-p}^2$ , где  $\chi_{1-p}^2$  — квантиль распределения Пирсона для данного  $p$  и числа степеней свободы  $f$  (приложение 4). В противном случае делается вывод о том, что гипотеза не согласуется с выборочным распределением.

При использовании критерия  $\chi^2$  желательно, чтобы объем выборки был достаточно велик:  $n \geq 50 \div 150$ , а количество элементов  $n_i \geq 5 \div 8$ . Вероятности  $p_i$  для нормального закона распределения можно определить по формуле



$$P(a \leq X \leq b) = \Phi\left(\frac{b - \bar{x}}{s}\right) - \Phi\left(\frac{a - \bar{x}}{s}\right).$$

При подсчете теоретических вероятностей  $p_i$  считается, что крайний левый интервал простирается до  $-\infty$ ; крайний правый — до  $+\infty$ .

**Критерий согласия Колмогорова.** Для применения этого критерия необходимо определить наибольшее абсолютное отклонение выборочной функции распределения  $F_n(x)$  от генеральной  $F(x)$ :

$$D = \max|F_n(x) - F(x)|, \quad (6.32)$$

затем вычислить величину  $\lambda$ :

$$\lambda = \sqrt{n} D. \quad (6.33)$$

Квантили  $\lambda_{1-p}$  распределения Колмогорова приведены в приложении 8. Если  $\lambda < \lambda_{1-p}$ , то гипотеза о совпадении теоретического закона распределения  $F(x)$  с выборочным  $F_n(x)$  не отвергается. При  $\lambda \geq \lambda_{1-p}$  гипотеза отклоняется (или считается сомнительной). Уровень значимости при применении критерия Колмогорова выбирают обычно равным  $0.2 \div 0.3$ .

Для нормального распределения  $F(x)$  определяется по формуле

$$F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x - \bar{x}}{s}\right).$$

В случае выборок небольшого объема ( $n < 20$ ) для проверки гипотезы о законе распределения можно использовать простые критерии, основанные на сравнении генеральных параметров распределения и их оценок, полученных по выборке. В качестве оцениваемых параметров удобнее всего брать моменты.

## ПРИЛОЖЕНИЯ

### Приложение 1

Значения функции Лапласа  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \exp(-x^2 / 2) dx$ .

$x$	$\Phi(x)$
0.00	0.0000
0.01	0.0040
0.02	0.0080
0.03	0.0120
0.04	0.0160
0.05	0.0199
0.06	0.0239
0.07	0.0279
0.08	0.0319
0.09	0.0359
0.10	0.0398
0.11	0.0438
0.12	0.0478
0.13	0.0517
0.14	0.0557
0.15	0.0596
0.16	0.0636
0.17	0.0675
0.18	0.0714
0.19	0.0753
0.20	0.0793
0.21	0.0832
0.22	0.0871
0.23	0.0910
0.24	0.0948
0.25	0.0987
0.26	0.1026
0.27	0.1064
0.28	0.1103

$x$	$\Phi(x)$
0.29	0.1141
0.30	0.1179
0.31	0.1217
0.32	0.1255
0.33	0.1293
0.34	0.1331
0.35	0.1368
0.36	0.1406
0.37	0.1443
0.38	0.1480
0.39	0.1517
0.40	0.1554
0.41	0.1591
0.42	0.1628
0.43	0.1664
0.44	0.1700
0.45	0.1736
0.46	0.1772
0.47	0.1808
0.48	0.1844
0.49	0.1879
0.50	0.1915
0.51	0.1950
0.52	0.1985
0.53	0.2019
0.54	0.2054
0.55	0.2088
0.56	0.2123
0.57	0.2157

$x$	$\Phi(x)$
0.58	0.2190
0.59	0.2224
0.60	0.2257
0.61	0.2291
0.62	0.2324
0.63	0.2357
0.64	0.2389
0.65	0.2422
0.66	0.2454
0.67	0.2486
0.68	0.2517
0.69	0.2549
0.70	0.2580
0.71	0.2611
0.72	0.2642
0.73	0.2673
0.74	0.2703
0.75	0.2734
0.76	0.2764
0.77	0.2794
0.78	0.2823
0.79	0.2852
0.80	0.2881
0.81	0.2910
0.82	0.2939
0.83	0.2967
0.84	0.2995
0.85	0.3023
0.86	0.3051

Продолжение приложения 1

$x$	$\Phi(x)$
0.87	0.3078
0.88	0.3106
0.89	0.3133
0.90	0.3159
0.91	0.3186
0.92	0.3212
0.93	0.3238
0.94	0.3264
0.95	0.3289
0.96	0.3315
0.97	0.3340
0.98	0.3365
0.99	0.3389
1.00	0.3413
1.01	0.3438
1.02	0.3461
1.03	0.3485
1.04	0.3508
1.05	0.3531
1.06	0.3554
1.07	0.3577
1.08	0.3599
1.09	0.3621
1.10	0.3643
1.11	0.3665
1.12	0.3686
1.13	0.3708
1.14	0.3729
1.15	0.3749
1.16	0.3770
1.17	0.3790
1.18	0.3810
1.19	0.3830
1.20	0.3849
1.21	0.3869

$x$	$\Phi(x)$
1.22	0.3883
1.23	0.3907
1.24	0.3925
1.25	0.3944
1.26	0.3962
1.27	0.3980
1.28	0.3997
1.29	0.4015
1.30	0.4032
1.31	0.4049
1.32	0.4066
1.33	0.4082
1.34	0.4099
1.35	0.4115
1.36	0.4131
1.37	0.4147
1.38	0.4162
1.39	0.4177
1.40	0.4192
1.41	0.4207
1.42	0.4222
1.43	0.4236
1.44	0.4251
1.45	0.4265
1.46	0.4279
1.47	0.4292
1.48	0.4306
1.49	0.4319
1.50	0.4332
1.51	0.4345
1.52	0.4357
1.53	0.4370
1.54	0.4382
1.55	0.4394
1.56	0.4406

$x$	$\Phi(x)$
1.57	0.4418
1.58	0.4429
1.59	0.4441
1.60	0.4452
1.61	0.4463
1.62	0.4474
1.63	0.4484
1.64	0.4495
1.65	0.4505
1.66	0.4515
1.67	0.4525
1.68	0.4535
1.69	0.4545
1.70	0.4554
1.71	0.4564
1.72	0.4573
1.73	0.4582
1.74	0.4591
1.75	0.4599
1.76	0.4608
1.77	0.4616
1.78	0.4625
1.79	0.4633
1.80	0.4641
1.81	0.4649
1.82	0.4656
1.83	0.4664
1.84	0.4671
1.85	0.4678
1.86	0.4686
1.87	0.4693
1.88	0.4699
1.89	0.4706
1.90	0.4713
1.91	0.4719

Продолжение приложения 1

$x$	$\Phi(x)$	$x$	$\Phi(x)$	$x$	$\Phi(x)$
1.92	0.4726	2.28	0.4887	2.72	0.4967
1.93	0.4732	2.30	0.4893	2.74	0.4969
1.94	0.4738	2.32	0.4898	2.76	0.4971
1.95	0.4744	2.34	0.4904	2.78	0.4973
1.96	0.4750	2.36	0.4909	2.80	0.4974
1.97	0.4756	2.38	0.4913	2.82	0.4976
1.98	0.4761	2.40	0.4918	2.84	0.4977
1.99	0.4767	2.42	0.4922	2.86	0.4979
2.00	0.4772	2.44	0.4927	2.88	0.4980
2.02	0.4783	2.46	0.4931	2.90	0.4981
2.04	0.4793	2.48	0.4934	2.92	0.4982
2.06	0.4803	2.50	0.4938	2.94	0.4984
2.08	0.4812	2.52	0.4941	2.96	0.49846
2.10	0.4821	2.54	0.4945	2.98	0.49856
2.12	0.4830	2.56	0.4948	3.00	0.49865
2.14	0.4838	2.58	0.4951	3.20	0.49931
2.16	0.4846	2.60	0.4953	3.40	0.49966
2.18	0.4854	2.62	0.4956	3.60	0.49984
2.20	0.4861	2.64	0.4959	3.80	0.499928
2.22	0.4868	2.66	0.4961	4.00	0.499968
2.24	0.4875	2.68	0.4963	5.00	0.499997
2.26	0.4881	2.70	0.4965		

Приложение 2

Квантили нормального распределения.

$p$	$1-p/2$	$U_{1-p/2}$	$p$	$1-p/2$	$U_{1-p/2}$
0.80	0.60	0.25	0.05	0.975	1.96
0.50	0.75	0.67	0.04	0.980	2.05
0.40	0.80	0.84	0.02	0.990	2.33
0.30	0.85	1.04	0.01	0.995	2.58
0.25	0.875	1.15	0.005	0.9975	2.81
0.20	0.90	1.28	0.002	0.999	3.09
0.15	0.925	1.44	0.001	0.9995	3.29
0.10	0.95	1.64	0.0001	0.99995	3.89

### Приложение 3

Квантили распределения Стьюдента  $t_{1-p/2} (t_p(f))$ .

Число степеней свободы $f$	Уровни значимости $p$						
	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	0.005	0.001
1	3.08	6.31	12.71	31.82	63.66	127.32	636.32
2	1.89	2.92	4.30	6.97	9.93	14.09	31.60
3	1.64	2.35	3.18	4.54	5.84	7.45	12.94
4	1.53	2.13	2.78	3.75	4.60	5.60	8.61
5	1.48	2.02	2.57	3.37	4.03	4.77	6.86
6	1.44	1.94	2.45	3.14	3.71	4.32	5.96
7	1.42	1.90	2.37	3.00	3.50	4.03	5.41
8	1.40	1.86	2.31	2.90	3.36	3.83	5.04
9	1.38	1.83	2.26	2.82	3.25	3.69	4.78
10	1.37	1.81	2.23	2.76	3.17	3.58	4.59
11	1.36	1.80	2.20	2.72	3.11	3.50	4.44
12	1.36	1.78	2.18	2.68	3.06	3.43	4.32
13	1.35	1.77	2.16	2.65	3.01	3.37	4.22
14	1.34	1.76	2.15	2.62	2.98	3.33	4.14
15	1.34	1.75	2.13	2.60	2.95	3.29	4.07
16	1.34	1.75	2.12	2.58	2.92	3.25	4.02
17	1.33	1.74	2.11	2.57	2.90	3.22	3.97
18	1.33	1.73	2.10	2.55	2.88	3.20	3.92
19	1.33	1.73	2.09	2.54	2.86	3.17	3.88
20	1.33	1.73	2.09	2.53	2.85	3.15	3.85
22	1.32	1.72	2.07	2.51	2.82	3.12	3.79
24	1.32	1.71	2.06	2.49	2.80	3.09	3.75
26	1.32	1.71	2.06	2.48	2.78	3.07	3.71
28	1.31	1.70	2.05	2.47	2.76	3.05	3.67
30	1.31	1.70	2.04	2.46	2.75	3.03	3.65
40	1.30	1.68	2.02	2.42	2.70	2.97	3.55
60	1.30	1.67	2.00	2.39	2.66	2.91	3.46
120	1.29	1.66	1.98	2.36	2.62	2.86	3.37
$\infty$	1.28	1.64	1.96	2.33	2.58	2.81	3.29

Приложение 4

Квантили распределения Пирсона  $\chi^2_{1-p}$ .

Число степеней свободы $f$	Уровни значимости $p$							
	0.99	0.98	0.95	0.90	0.80	0.70	0.50	0.30
1	0.00016	0.0006	0.0039	0.016	0.064	0.148	0.455	1.07
2	0.020	0.040	0.103	0.211	0.446	0.713	1.386	2.41
3	0.115	0.185	0.352	0.584	1.005	1.424	2.336	3.66
4	0.30	0.43	0.71	1.06	1.65	2.19	3.36	4.9
5	0.55	0.75	1.14	1.61	2.34	3.00	4.35	6.1
6	0.87	1.13	1.63	2.2	3.07	3.83	5.35	7.2
7	1.24	1.56	2.17	2.83	3.82	4.67	6.35	8.4
8	1.65	2.03	2.73	3.49	4.59	5.53	7.34	9.5
9	2.09	2.53	3.32	4.17	5.38	6.39	8.34	10.7
10	2.56	3.06	3.94	4.86	6.18	7.27	9.34	11.8
11	3.1	3.6	4.6	5.6	7.0	8.1	10.3	12.9
12	3.6	4.2	5.2	6.3	7.8	9.0	11.3	14.0
13	4.1	4.8	5.9	7.0	8.6	9.9	12.3	15.1
14	4.7	5.4	6.6	7.8	9.5	10.8	13.3	16.2
15	5.2	6.0	7.3	8.5	10.3	11.7	14.3	17.3
16	5.8	6.6	8.0	9.3	11.2	12.6	15.3	18.4
17	6.4	7.3	8.7	10.1	12.0	13.5	16.3	19.5
18	7.0	7.9	9.4	10.9	12.9	14.4	17.3	20.6
19	7.6	8.6	10.1	11.7	13.7	15.4	18.3	21.7
20	8.3	9.2	10.9	12.4	14.6	16.3	19.3	22.8
21	8.9	9.9	11.6	13.2	15.4	17.2	20.3	23.9
22	9.5	10.6	12.3	14.0	16.3	18.1	21.3	24.9
23	10.2	11.3	13.1	14.8	17.2	19.0	22.3	26.0
24	10.9	12.0	13.8	15.7	18.1	19.9	23.3	27.1
25	11.5	12.7	14.6	16.5	18.9	20.9	24.3	28.2
26	12.2	13.4	15.4	17.3	19.8	21.8	25.3	29.3
27	12.9	14.1	16.2	18.1	20.7	22.7	26.3	30.3
28	13.6	14.8	16.9	18.9	21.6	23.6	27.3	31.4
29	14.3	15.6	17.7	19.8	22.4	24.6	28.3	32.5
30	15.0	16.3	18.5	20.6	23.4	25.5	29.3	33.5

Число степеней свободы $f$	Уровни значимости $p$							
	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	0.005	0.002	0.001
1	1.64	2.7	3.8	5.4	6.6	7.9	9.5	10.8
2	3.22	4.6	6	7.8	9.2	10.6	12.4	13.8
3	4.64	6.3	7.8	9.8	11.3	12.8	14.8	16.3
4	6.0	7.8	9.5	11.7	13.3	14.9	16.9	18.5
5	7.3	9.2	11.1	13.4	15.1	16.3	18.9	20.5
6	8.6	10.6	12.6	15.0	16.8	18.6	20.7	22.5
7	9.8	12.0	14.1	16.6	18.5	20.3	22.6	24.3
8	11.0	13.4	15.5	18.2	20.1	21.9	24.3	26.1
9	12.2	14.7	16.9	19.7	21.7	23.6	26.1	27.9
10	13.4	16.0	18.3	21.2	23.2	25.2	27.7	29.6
11	14.6	17.3	19.7	22.6	24.7	26.8	29.4	31.3
12	15.8	18.5	21.0	24.1	26.2	28.3	31	32.9
13	17.0	19.8	22.4	25.5	27.7	29.8	32.5	34.5
14	18.2	21.1	23.7	26.9	29.1	31.3	34	36.1
15	19.3	22.3	25.0	28.3	30.6	32.8	35.5	37.7
16	20.5	23.5	26.3	29.6	32.0	34.3	37	39.2
17	21.6	24.8	27.6	31.0	33.4	35.7	38.5	40.8
18	22.8	26.0	28.9	32.3	34.8	37.2	40	42.3
19	23.9	27.2	30.1	33.7	36.2	38.6	41.5	43.8
20	25.0	28.4	31.4	35.0	37.6	40.0	43	45.3
21	26.2	29.6	32.7	36.3	38.9	41.4	44.5	46.8
22	27.3	30.8	33.9	37.7	40.3	42.8	46	48.3
23	28.4	32.0	35.2	39.0	41.6	44.2	47.5	49.7
24	29.6	33.2	36.4	40.3	43.0	45.6	48.5	51.2
25	30.7	34.4	37.7	41.6	44.3	46.9	50	52.6
26	31.8	35.6	38.9	42.9	45.6	48.3	61.5	54.1
27	32.9	36.7	40.1	44.1	47.0	49.6	53	55.5
28	34.0	37.9	41.3	45.4	48.3	51.0	54.5	56.9
29	35.1	39.1	42.6	46.7	49.6	52.3	56	58.3
30	36.3	40.3	43.8	48.0	50.9	53.7	57.5	59.7

Приложение 5

Квантили распределения Фишера  $F_{1-p}$  для  $p = 0.05$ .

$f_2$	$f_1$								
	1	2	3	4	5	6	12	24	$\infty$
1	164.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	244.9	249	254.3
2	18.5	19.2	19.2	19.3	19.3	19.3	19.4	19.5	19.5
3	10.1	9.6	9.3	9.1	9.0	8.9	8.7	8.6	8.5
4	7.7	6.9	6.6	6.4	6.3	6.2	5.9	5.8	5.6
5	6.6	5.8	5.4	5.2	5.1	5.0	4.7	4.5	4.4
6	6.0	5.1	4.8	4.5	4.4	4.3	4.0	3.8	3.7
7	5.6	4.7	4.4	4.1	4.0	3.9	3.6	3.4	3.2
8	5.3	4.5	4.1	3.8	3.7	3.6	3.3	3.1	2.9
9	5.1	4.3	3.9	3.6	3.5	3.4	3.1	2.9	2.7
10	5.0	4.1	3.7	3.5	3.3	3.2	2.9	2.7	2.5
11	4.8	4.0	3.6	3.4	3.2	3.1	2.8	2.6	2.4
12	4.8	3.9	3.5	3.3	3.1	3.0	2.7	2.5	2.3
13	4.7	3.8	3.4	3.2	3.0	2.9	2.6	2.4	2.2
14	4.6	3.7	3.3	3.1	3.0	2.9	2.5	2.3	2.1
15	4.5	3.7	3.3	3.1	2.9	2.8	2.5	2.3	2.1
16	4.5	3.6	3.2	3.0	2.9	2.7	2.4	2.2	2.0
17	4.5	3.6	3.2	3.0	2.8	2.7	2.4	2.2	2.0
18	4.4	3.6	3.2	2.9	2.8	2.7	2.3	2.1	1.9
19	4.4	3.5	3.1	2.9	2.7	2.6	2.3	2.1	1.8
20	4.4	3.5	3.1	2.9	2.7	2.6	2.3	2.1	1.8
22	4.3	3.4	3.1	2.8	2.7	2.6	2.2	2.0	1.8
24	4.3	3.4	3.0	2.8	2.6	2.5	2.2	2.0	1.7
26	4.2	3.4	3.0	2.7	2.6	2.4	2.1	1.9	1.7
28	4.2	3.3	2.9	2.7	2.6	2.4	2.1	1.9	1.6
30	4.2	3.3	2.9	2.7	2.5	2.4	2.1	1.9	1.6
40	4.1	3.2	2.9	2.6	2.5	2.3	2.0	1.8	1.5
60	4.0	3.2	2.8	2.5	2.4	2.3	1.9	1.7	1.4
120	3.9	3.1	2.7	2.5	2.3	2.2	1.8	1.6	1.3
$\infty$	3.8	3.0	2.6	2.4	2.2	2.1	1.8	1.5	1.0



## Приложение 6

### Квантили распределения Кохрена $G_{1-p}^*$ для $p = 0.05$ .

$k$	$f$										
	1	2	3	4	5	6	8	10	16	36	$\infty$
2	9985	9750	9392	9057	8772	8534	8159	7880	7341	6602	5000
3	9669	8709	7977	7454	7071	6771	6333	6025	5466	4748	3333
4	9065	7679	6841	6287	5895	5598	5175	4884	4366	3720	2500
5	8412	6838	5981	5441	5065	4783	4387	4118	3645	3066	2000
6	7808	6161	5321	4803	4447	4184	3817	3568	3135	2612	1667
7	7271	5612	4800	4307	3974	3726	3384	3154	2756	2278	1429
8	6798	5157	4377	3910	3595	3362	3043	2829	2462	2022	1250
9	6385	4775	4027	3584	3286	3067	2768	2568	2226	1820	1111
10	6020	4450	3733	3311	3029	2823	2541	2353	2032	1655	1000
12	5410	3924	3264	2880	2624	2439	2187	2020	1737	1403	0833
15	4709	3346	2758	2419	2195	2034	1815	1671	1429	1144	0667
20	3894	2705	2205	1921	1735	1602	1422	1303	1108	0879	0500
24	3434	2354	1907	1656	1493	1374	1216	1113	0942	0743	0417
30	2929	1980	1593	1377	1237	1137	1001	0921	0771	0604	0333
40	2370	1576	1259	1082	0968	0887	0780	0713	0595	0462	0250
60	1737	1131	0895	0765	0682	0623	0552	0497	0411	0316	0167
120	0998	0632	0495	0419	0371	0337	0292	0266	0218	0165	0083
$\infty$	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000

\* Все квантили  $G_{1-p}$  меньше единицы, поэтому в таблице приведены лишь десятичные знаки, следующие после запятой, перед которой при пользовании таблицей нужно ставить ноль целых. Например, при  $n = 6, f = 3$  имеем  $G_{0.95} = 0.5321$ .

## Приложение 7

Значения  $\nu$  ( $\nu'$ ) для различных уровней значимости.

Число степеней свободы $f$	Уровни значимости $p$			Число степеней свободы $f$	Уровни значимости $p$		
	0.10	0.05	0.01		0.10	0.05	0.01
1	1.406	1.412	1.414	12	2.297	2.461	2.759
2	1.645	1.689	1.723	13	2.326	2.493	2.800
3	1.791	1.869	1.955	14	2.354	2.523	2.837
4	1.894	1.996	2.130	15	2.380	2.551	2.871
5	1.974	2.093	2.265	16	2.404	2.577	2.903
6	2.041	2.172	2.374	17	2.426	2.600	2.932
7	2.097	2.237	2.464	18	2.447	2.623	2.959
8	2.146	2.294	2.540	19	2.467	2.644	2.984
9	2.190	2.343	2.606	20	2.486	2.664	3.008
10	2.229	2.387	2.663	21	2.504	2.683	3.030
11	2.264	2.426	2.714	22	2.520	2.701	3.051

## Приложение 8

Квантили распределения Колмогорова.

$p$	$\lambda_{1-p}$	$p$	$\lambda_{1-p}$	$p$	$\lambda_{1-p}$
0.99	0.44	0.50	0.83	0.15	1.14
0.90	0.57	0.40	0.89	0.10	1.22
0.80	0.64	0.30	0.97	0.05	1.36
0.70	0.71	0.25	1.02	0.02	1.52
0.60	0.77	0.20	1.07	0.01	1.63

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	5
ЛЕКЦИЯ 1 .....	7
1.1. Случайные величины. Классификация ошибок измерений. Абсолютная и относительная погрешность. ....	7
1.2. Оценка погрешностей функций приближенных аргументов. ....	10
1.3. Распределение случайных величин. Функция распределения и плотность распределения случайной величины. ..	13
ЛЕКЦИЯ 2 .....	16
2.1. Числовые характеристики случайной величины. Свойства математического ожидания и дисперсии. Нормированная случайная величина. ....	16
2.2. Нормальное и стандартное распределения случайной величины. Функция Лапласа. Задача об абсолютном отклонении. ....	20
ЛЕКЦИЯ 3 .....	24
3.1. Генеральная совокупность и случайная выборка. Выборочная функция распределения. Гистограммы. Понятие об оценках параметров генерального распределения. ....	24
3.2. Метод максимального правдоподобия. ....	27
3.3. Оценка математического ожидания и дисперсии нормально распределенной случайной величины. Дисперсия среднего серии измерений. ....	29
ЛЕКЦИЯ 4 .....	33
4.1. Доверительные интервалы и доверительная вероятность, уровень значимости. ....	33
4.2. Проверка статистических гипотез, критерии значимости, ошибки первого и второго рода. ....	35
4.3. Построение доверительного интервала для математического ожидания непосредственно измеряемой величины. Распределение Стьюдента. ....	38
ЛЕКЦИЯ 5 .....	41
5.1. Оценка случайной и суммарной ошибки косвенных измерений. ....	41

5.2. Оценка дисперсии нормально распределенной случайной величины. ....	44
5.3. Сравнение двух дисперсий. Распределение Фишера. ....	46
ЛЕКЦИЯ 6 .....	49
6.1. Определение дисперсии по текущим измерениям. Сравнение нескольких дисперсий. ....	49
6.2. Сравнение двух средних. Расчет средневзвешенного значения. ....	52
6.3. Проверка однородности результатов измерений. ....	54
6.4. Сравнение выборочного распределения и распределения генеральной совокупности. Критерии согласия Пирсона и Колмогорова. ....	55
ПРИЛОЖЕНИЯ .....	58
Приложение 1 .....	58
Приложение 2 .....	60
Приложение 3 .....	61
Приложение 4 .....	62
Приложение 5 .....	64
Приложение 6 .....	65
Приложение 7 .....	66
Приложение 8 .....	66