Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2020;3:86–91
Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics. 2020;3:86–91

УДК 539.32:536.2

ВЛИЯНИЕ ПРОТЯЖЕННОСТИ ИСТОЧНИКОВ ТЕПЛА НА ВНЕШНЕЙ ГРАНИЦЕ НА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ В ПРОФИЛИРОВАННЫХ ПОЛЯРНО-ОРТОТРОПНЫХ КОЛЬЦЕВЫХ ПЛАСТИНАХ С УЧЕТОМ ТЕПЛООБМЕНА С ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДОЙ

В. В. КОРОЛЕВИЧ[1]***, Д. Г. МЕДВЕДЕВ***[2]

[1]*Международный центр современного образования, ул. Штепанска, 61, 110 00, г. Прага 1, Чехия*
[2]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*

Исследуется влияние N протяженных источников тепла на внешних границах на неосесимметричное распределение температуры в профилированных полярно-ортотропных кольцевых пластинах с учетом теплообмена с окружающей средой. Решение стационарной задачи теплопроводности для анизотропных кольцевых пластин произвольного профиля записывается через решение соответствующего интегрального уравнения Вольтерры 2-го рода. Приводится формула расчета температур в анизотропных кольцевых пластинах произвольного профиля. Записывается точное решение стационарной задачи теплопроводности для обратноконической полярно-ортотропной кольцевой пластины. Показано, что в такой анизотропной пластине распределение температуры от N протяженных источников тепла на ее внешней границе имеет более сложный характер, чем распределение температуры от N точечных источников тепла на внешнем контуре.

Ключевые слова: полярно-ортотропная кольцевая пластина; температура; стационарное уравнение теплопроводности; интегральное уравнение Вольтерры 2-го рода; обратноконическая кольцевая пластина.

THE INFLUENCE OF THE LENGTH OF HEAT SOURCES ON THE EXTERNAL BORDER ON THE TEMPERATURE DISTRIBUTION IN PROFILED POLAR-ORTHOTROPIC RING PLATES TAKING INTO ACCOUNT THERE HEAT EXCHANGE WITH THE EXTERNAL ENVIRONMENT

U. V. KARALEVICH[a]***, D. G. MEDVEDEV***[b]

[a]*International Center of Modern Education, 61 Štěpánská Street, Prague 1, PSČ 110 00, Czech*
[b]*Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*
Corresponding author: U. V. Karalevich (v.korolevich@mail.ru)

We study the influence of N extended heat sources at external boundaries on the nonaxisymmetric temperature distribution on profiled polar-orthotropic ring plates and take into account heat exchange with the external environment. The solution of the stationary heat conduction problem for anisotropic annular plates of a random profile is resolved through the solution of the corresponding Volterra integral equation of the second kind. The formula of a temperature

Образец цитирования:
Королевич ВВ, Медведев ДГ. Влияние протяженности источников тепла на внешней границе на распределение температуры в профилированных полярно-ортотропных кольцевых пластинах с учетом теплообмена с окружающей средой. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2020;3:86–91.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2020-3-86-91

For citation:
Karalevich UV, Medvedev DG. The influence of the length of heat sources on the external border on the temperature distribution in profiled polar-orthotropic ring plates taking into account there heat exchange with the external environment. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2020;3:86–91. Russian.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2020-3-86-91

Авторы:
Владимир Васильевич Королевич – преподаватель.
Дмитрий Георгиевич Медведев – доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, доцент; первый проректор.

Authors:
Uladzimir V. Karalevich, lecturer.
v.korolevich@mail.ru
Dmitrij G. Medvedev, doctor of science (pedagogics), PhD (physics and mathematics), docent; first vice-rector.
medvedev@bsu.by

calculations in anisotropic annular plates of an random profile is given. The exact solution of stationary heat conductivity problem for a reverse conical polar-orthotropic ring plate is recorded. The temperature distribution in such anisotropic plate from N extended heat sources at its outer border is more complex than in the case of temperature distribution from N point heat sources at their external border.

Keywords: polar-orthotropic annular plate; temperature; stationary equation of heat conductivity; Volterra integral equation of the second kind; reverse conical ring plate.

Введение

Данная статья посвящена исследованию неосесимметричного распределения температуры $T(r, \theta)$ в полярно-ортотропных кольцевых пластинах переменной толщины $h(r)$ с учетом теплообмена с окружающей средой, когда на внутреннем контуре (при $r = r_0$) пластины поддерживается постоянная температура T_1^*, а на внешнем контуре (при $r = R$) приложено N источников тепла с температурой T_2^* каждый.

В отличие от работы [1] в настоящей статье при изучении распределения температуры в профилированной анизотропной кольцевой пластине учитывается *дискретность* расположения *протяженных источников тепла* на внешнем контуре. Полученные результаты имеют практическую значимость при проектировании и расчете на прочность дисков высокоскоростных газотурбинных авиационных двигателей, изготавливаемых из современных композитных материалов, так как возникающие в них термоупругие напряжения могут существенно влиять на напряженно-деформированное состояние диска турбины. Расчетная схема, учитывающая протяженность конечного числа источников тепла на внешней границе профилированных анизотропных дисков, позволяет реально оценить вклад термоупругих напряжений в общую картину распределения напряжений во вращающемся диске турбины.

Постановка задачи и основные уравнения

В работе исследуется влияние протяженности источников тепла на внешней границе на распределение температуры в анизотропной кольцевой пластине переменной толщины с учетом теплообмена с окружающей средой через оба основания. Теплообмен через боковую цилиндрическую поверхность пренебрежимо мал, и его можно не учитывать в расчетах. Температура пластины больше температуры окружаюшей среды T_0 ($T_0 < T_1^* < T_2^*$). Предполагается, что температура в тонкой кольцевой пластине не меняется по толщине. Внутренних источников тепла в ней не имеется. Тепловое поле в такой полярно-ортотропной кольцевой пластине будет неосесимметричным.

Теплофизические характеристики материала пластины полагаются постоянными и не зависящими от температуры.

Конечно, идеальных точечных источников тепла в природе нет. Все они имеют какую-то протяженность. Частично эта задача рассматривалась нами в работе [1]. Так, в ней было получено распределение температуры $T^{\text{внеш}}$ на внешнем контуре кольцевой пластины, если N источников тепла приложены на равноотстоящих одинаковых дугах длиной l и с центральным углом φ ($l = \varphi R$) каждая:

$$T^{\text{внеш}}(R, \theta, \varphi) = NT_2^*\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\varphi}{n\varphi} \cos Nn\theta\right).$$

Здесь углом φ будет определяться протяженность источника тепла.

Количество N источников тепла не может быть произвольным, а ограничивается температурой плавления $T_{\text{плавл}}$ материала пластины: $N_{\max} = \left[\dfrac{T_{\text{плавл}}}{T_2^*}\right]$, где квадратные скобки означают целую часть дробного выражения.

В цилиндрической системе координат r, θ, z уравнение стационарной теплопроводности для полярно-ортотропной кольцевой пластины переменной толщины $h(r)$ с учетом теплообмена с внешней средой через оба основания запишется в виде [2]

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rh(r)\lambda_r \frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(h(r)\lambda_\theta \frac{\partial T}{\partial \theta}\right) - 2H\left(T(r, \theta) - T_0\right)\left(1 + \frac{1}{4}\left(\frac{dh}{dr}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} = 0, \qquad (1)$$

где $T(r, \theta)$ – функция температуры в анизотропной кольцевой пластине; λ_r и λ_θ – радиальный и тангенциальный коэффициенты теплопроводности соответственно; H – коэффициент теплоотдачи. Эти коэффициенты полагаются постоянными и не зависящими от температуры.

Введем в рассмотрение новую функцию $\Theta(r, \theta)$, которая тоже имеет смысл функции температуры:

$$\Theta(r, \theta) = T(r, \theta) - T_0. \tag{2}$$

С учетом выражения (2) уравнение (1) запишется в виде

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial r^2} + \left(\frac{h'(r)}{h(r)} + \frac{1}{r}\right)\frac{\partial \Theta}{\partial r} + \frac{\lambda_\theta}{\lambda_r}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta^2} - \frac{2H}{\lambda_r h(r)}\left(1 + \frac{1}{4}\left(\frac{dh}{dr}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\Theta(r, \theta) = 0. \tag{3}$$

Разложим функцию $\Theta(r, \theta)$ в тригонометрический ряд Фурье:

$$\Theta(r, \theta) = \Theta_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty}\Theta_n^{(1)}(r)\cos Nn\theta + \sum_{n=1}^{\infty}\Theta_n^{(2)}(r)\sin Nn\theta. \tag{4}$$

Первый член $\Theta_0(r)$ разложения (4) учитывает осесимметричную составляющую $\Theta(r, \theta)$. Слагаемые, содержащие $\cos Nn\theta$, соответствуют симметричным составляющим функции $\Theta(r, \theta)$ относительно плоскости $\theta = 0$, а слагаемые, содержащие $\sin Nn\theta$, – обратносимметричным.

Подстановка разложения (4) в уравнение (3) приводит к бесконечной системе однородных обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка с переменными коэффициентами:

$$\begin{cases} (n=0) \quad \dfrac{d^2\Theta_0}{dr^2} + \left(\dfrac{h'(r)}{h(r)} + \dfrac{1}{r}\right)\dfrac{d\Theta_0}{dr} - \dfrac{2H}{\lambda_r h(r)}\left(1 + \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{dh}{dr}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\Theta_0(r) = 0, & (5) \\ (n \geq 1,\ j = \overline{1, 2}) \quad \dfrac{d^2\Theta_n^{(j)}}{dr^2} + \left(\dfrac{h'(r)}{h(r)} + \dfrac{1}{r}\right)\dfrac{d\Theta_n^{(j)}}{dr} - \left(\dfrac{\lambda_\theta}{\lambda_r}\dfrac{(Nn)^2}{r^2} + \dfrac{2H}{\lambda_r h(r)}\left(1 + \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{dh}{dr}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)\Theta_n^{(j)}(r) = 0. & (6) \end{cases}$$

Дифференциальное уравнение (5), описывающее осесимметричное распределение температуры в профилированных полярно-ортотропных кольцевых пластинах с учетом теплообмена с внешней средой при несколько иных граничных условиях, исследовалось нами в работе [3].

Получим теперь граничные условия для функции температуры $\Theta(r, \theta)$. Из формулы (2) следует

$$T(r, \theta) = \Theta(r, \theta) + T_0.$$

Подставив в последнее равенство разложение функции $\Theta(r, \theta)$ в тригонометрический ряд Фурье (см. формулу (4)), получим

$$T(r, \theta) = T_0 + \Theta_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty}\Theta_n^{(1)}(r)\cos Nn\theta + \sum_{n=1}^{\infty}\Theta_n^{(2)}(r)\sin Nn\theta. \tag{7}$$

Удовлетворим функцию температуры $T(r, \theta)$ граничным условиям

$$\begin{cases} T(r_0, \theta) = T_0 + \Theta_0(r_0) + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\Theta_n^{(1)}(r_0)\cos Nn\theta + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\Theta_n^{(2)}(r_0)\sin Nn\theta = \\ = T^{\text{внутр}}(r_0, \theta) = T_1^* + \sum\limits_{n=1}^{\infty} 0 \cdot \cos Nn\theta + \sum\limits_{n=1}^{\infty} 0 \cdot \sin Nn\theta, \\ T(R, \theta) = T_0 + \Theta_0(R) + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\Theta_n^{(1)}(R)\cos Nn\theta + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\Theta_n^{(2)}(R)\sin Nn\theta = \\ = T^{\text{внеш}}(R, \theta) = NT_2^* + \sum\limits_{n=1}^{\infty} 2NT_2^*\dfrac{\sin n\varphi}{n\varphi}\cos Nn\theta + \sum\limits_{n=1}^{\infty} 0 \cdot \sin Nn\theta. \end{cases}$$

Из сравнения коэффициентов тригонометрических рядов при одинаковых гармониках левых и правых частей приведенных выражений следуют граничные условия

$$(n=0)\quad \begin{cases}\Theta_0(r_0)=T_1^*-T_0,\\ \Theta_0(R)=NT_2^*-T_0,\end{cases} \tag{8}$$

$$(n\ge 1)\quad \begin{cases}\Theta_n^{(1)}(r_0)=0,\\ \Theta_n^{(1)}(R,\,\varphi)=2NT_2^*\,\dfrac{\sin n\varphi}{n\varphi},\end{cases} \tag{9}$$

$$(n\ge 1)\quad \begin{cases}\Theta_n^{(2)}(r_0)=0,\\ \Theta_n^{(2)}(R)=0.\end{cases} \tag{10}$$

При нулевых граничных условиях (10) однородное дифференциальное уравнение (6) имеет тривиальное решение, следовательно, функция $\Theta_n^{(2)}(r)$ равна нулю, т. е. обратносимметричная составляющая в разложении (4) для функции $\Theta(r,\,\theta)$ отсутствует.

Решение неосесимметричной задачи стационарной теплопроводности методом линейных интегральных уравнений Вольтерры 2-го рода

Для профилированной анизотропной кольцевой пластины общие решения уравнений (5), (6) системы выразим через решения соответствующих им интегральных уравнений Вольтерры 2-го рода:

$$\Theta_0(r)=\int_{r_0}^{r}(r-s)\eta_0(s)\,ds+\dot{\Theta}_0(r_0)(r-r_0)+\Theta_0(r_0), \tag{11}$$

$$\Theta_n^{(1)}(r)=\int_{r_0}^{r}(r-s)\eta_n^{(1)}(s)\,ds+\dot{\Theta}_n^{(1)}(r_0)(r-r_0)+\Theta_n^{(1)}(r_0). \tag{12}$$

Разрешающие функции $\eta_0(r)$ и $\eta_n^{(1)}(r,\,\varphi)$ удовлетворяют следующим интегральным уравнениям:

$$\eta_0(r)=\lambda\int_{r_0}^{r}K_0(r,\,s)\eta_0(s)\,ds+f_0(r),\;\; \eta_n^{(1)}(r,\,\varphi)=\lambda\int_{r_0}^{r}K_n(r,\,s)\eta_n^{(1)}(s,\,\varphi)\,ds+f_n^{(1)}(r), \tag{13}$$

где $\lambda=-1$ есть числовой параметр; $K_0(r,\,s)=\dfrac{h'(r)}{h(r)}+\dfrac{1}{r}-\left(\dfrac{H}{\lambda_r}\sqrt{\dfrac{4}{h^2(r)}+\left(\dfrac{h'(r)}{h(r)}\right)^2}\right)(r-s)$, $K_n(r,\,s)=\dfrac{h'(r)}{h(r)}+$ $+\dfrac{1}{r}-\left(\dfrac{\lambda_\theta}{\lambda_r}\dfrac{(Nn)^2}{r^2}+\dfrac{H}{\lambda_r}\sqrt{\dfrac{4}{h^2(r)}+\left(\dfrac{h'(r)}{h(r)}\right)^2}\right)(r-s)$ – ядра интегральных уравнений; $f_0(r)=\dfrac{\partial K_0(r,\,s)}{\partial s}\times$ $\times\,\Theta_0(r_0)-K_0(r,\,r_0)\dot{\Theta}_0(r_0)$, $f_n^{(1)}(r)=\dfrac{\partial K_n(r,\,s)}{\partial s}\Theta_n^{(1)}(r_0)-K_n(r,\,r_0)\dot{\Theta}_n^{(1)}(r_0)$ – свободные члены интегральных уравнений.

Решения интегральных уравнений (13) с помощью резольвент описаны в статье [1]. Удовлетворим решения (11), (12) граничным условиям (8), (9). В результате имеем

$$\Theta_0(r)=\int_{r_0}^{r}(r-s)\eta_0(s)\,ds-\frac{r-r_0}{R-r_0}\int_{r_0}^{R}(R-s)\eta_0(s)\,ds+T_1^*\,\frac{R-r}{R-r_0}+NT_2^*\,\frac{r-r_0}{R-r_0}-T_0, \tag{14}$$

$$\Theta_n^{(1)}(r,\,\varphi)=\int_{r_0}^{r}(r-s)\eta_n^{(1)}(s)\,ds-\frac{r-r_0}{R-r_0}\int_{r_0}^{R}(R-s)\eta_n^{(1)}(s)\,ds+2NT_2^*\,\frac{r-r_0}{R-r_0}\,\frac{\sin n\varphi}{n\varphi}. \tag{15}$$

Исходя из решений (14), (15), по формуле (7) получим следующее распределение температуры $T(r,\theta)$ в профилированной полярно-ортотропной кольцевой пластине с учетом теплообмена с внешней средой:

$$T(r,\theta)=\int_{r_0}^{r}(r-s)\eta_0(s)ds-\frac{r-r_0}{R-r_0}\int_{r_0}^{R}(R-s)\eta_0(s)ds+T_1^*\frac{R-r}{R-r_0}+NT_2^*\frac{r-r_0}{R-r_0}+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{r_0}^{r}(r-s)\eta_n^{(1)}(s)ds-\frac{r-r_0}{R-r_0}\int_{r_0}^{R}(R-s)\eta_n^{(1)}(s)ds+2NT_2^*\frac{r-r_0}{R-r_0}\frac{\sin n\varphi}{n\varphi}\right)\cos Nn\theta. \quad (16)$$

Для обратноконической кольцевой пластины, толщина которой меняется по закону $h(r)=h_0\left(\frac{r}{r_0}\right)$, где h_0 – толщина пластины на внутреннем контуре (при $r=r_0$), система уравнений (5), (6) стационарной задачи теплопроводности имеет точное решение [1]:

$$\Theta_0(r)=\frac{1}{\sqrt{r}}\left(\tilde{C}_1^{(0)}I_1\left(2\sqrt{b}\sqrt{r}\right)+\tilde{C}_2^{(0)}K_1\left(2\sqrt{b}\sqrt{r}\right)\right), \quad (17)$$

$$\Theta_n^{(1)}(r)=\frac{1}{\sqrt{r}}\left(\tilde{C}_1^{(1)}I_\mu\left(2\sqrt{b}\sqrt{r}\right)+\tilde{C}_2^{(1)}K_\mu\left(2\sqrt{b}\sqrt{r}\right)\right). \quad (18)$$

Здесь $b=\frac{H\sqrt{h_0^2+4r_0^2}}{\lambda_r h_0}$; $\mu=\sqrt{1+4N^2\left(\frac{\lambda_\theta}{\lambda_r}\right)n^2}$; $I_1\left(2\sqrt{b}\sqrt{r}\right)$ – модифицированная функция Бесселя 1-го рода 1-го порядка; $K_1\left(2\sqrt{b}\sqrt{r}\right)$ – модифицированная функция Бесселя 2-го рода 1-го порядка (функция Макдональда); $I_\mu\left(2\sqrt{b}\sqrt{r}\right)$ – модифицированная функция Бесселя 1-го рода μ-го порядка; $K_\mu\left(2\sqrt{b}\sqrt{r}\right)$ – модифицированная функция Бесселя 2-го рода μ-го порядка (функция Макдональда).

Удовлетворяя решения (17), (18) граничным условиям (8), (9), получим следующие выражения для неизвестных постоянных $\tilde{C}_1^{(0)}$, $\tilde{C}_2^{(0)}$, $\tilde{C}_1^{(1)}$, $\tilde{C}_2^{(1)}$:

$$\tilde{C}_1^{(0)}=T_1^*\frac{\sqrt{r_0}}{\Delta_2}K_1\left(2\sqrt{b}\sqrt{R}\right)-NT_2^*\frac{\sqrt{R}}{\Delta_2}K_1\left(2\sqrt{b}\sqrt{r_0}\right)-T_0\left(\frac{\sqrt{r_0}}{\Delta_2}K_1\left(2\sqrt{b}\sqrt{R}\right)-\frac{\sqrt{R}}{\Delta_2}K_1\left(2\sqrt{b}\sqrt{r_0}\right)\right),$$

$$\tilde{C}_2^{(0)}=-T_1^*\frac{\sqrt{r_0}}{\Delta_2}I_1\left(2\sqrt{b}\sqrt{R}\right)+NT_2^*\frac{\sqrt{R}}{\Delta_2}I_1\left(2\sqrt{b}\sqrt{r_0}\right)+T_0\left(\frac{\sqrt{r_0}}{\Delta_2}I_1\left(2\sqrt{b}\sqrt{R}\right)-\frac{\sqrt{R}}{\Delta_2}I_1\left(2\sqrt{b}\sqrt{r_0}\right)\right),$$

$$\tilde{C}_1^{(1)}=-2NT_2^*\frac{\sqrt{R}}{\Delta_\mu}K_\mu\left(2\sqrt{b}\sqrt{r_0}\right)\frac{\sin n\varphi}{n\varphi},\ \ \tilde{C}_2^{(1)}=2NT_2^*\frac{\sqrt{R}}{\Delta_\mu}I_\mu\left(2\sqrt{b}\sqrt{r_0}\right)\frac{\sin n\varphi}{n\varphi},$$

где Δ_2, Δ_μ – определители 2-го порядка:

$$\Delta_2=I_1\left(2\sqrt{b}\sqrt{r_0}\right)K_1\left(2\sqrt{b}\sqrt{R}\right)-I_1\left(2\sqrt{b}\sqrt{R}\right)K_1\left(2\sqrt{b}\sqrt{r_0}\right),$$

$$\Delta_\mu=I_\mu\left(2\sqrt{b}\sqrt{r_0}\right)K_\mu\left(2\sqrt{b}\sqrt{R}\right)-I_\mu\left(2\sqrt{b}\sqrt{R}\right)K_\mu\left(2\sqrt{b}\sqrt{r_0}\right).$$

Подставляя выражения для постоянных $\tilde{C}_1^{(0)}$, $\tilde{C}_2^{(0)}$, $\tilde{C}_1^{(1)}$, $\tilde{C}_2^{(1)}$ в решения (17), (18) и затем их в формулу (7), получим распределение температуры $T(r,\theta)$ в обратноконической полярно-ортотропной кольцевой пластине с учетом теплообмена с внешней средой:

$$T(r,\theta)=T_1^*\left(\frac{1}{\Delta_2}\sqrt{\frac{r_0}{r}}\left(I_1\left(2\sqrt{b}\sqrt{r}\right)K_1\left(2\sqrt{b}\sqrt{R}\right)-I_1\left(2\sqrt{b}\sqrt{R}\right)K_1\left(2\sqrt{b}\sqrt{r}\right)\right)\right)+$$

$$+NT_2^*\left(\frac{1}{\Delta_2}\sqrt{\frac{R}{r}}\left(I_1\left(2\sqrt{b}\sqrt{r_0}\right)K_1\left(2\sqrt{b}\sqrt{r}\right)-I_1\left(2\sqrt{b}\sqrt{r}\right)K_1\left(2\sqrt{b}\sqrt{r_0}\right)\right)\right)+$$

$$+T_0\left(1+\frac{1}{\Delta_2}\left(\sqrt{\frac{R}{r}}K_1\left(2\sqrt{b}\sqrt{r_0}\right)-\sqrt{\frac{r_0}{r}}K_1\left(2\sqrt{b}\sqrt{R}\right)\right)I_1\left(2\sqrt{b}\sqrt{r}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\Delta_2}\left(\sqrt{\frac{r_0}{r}}I_1\left(2\sqrt{b}\sqrt{R}\right)-\sqrt{\frac{R}{r}}I_1\left(2\sqrt{b}\sqrt{r_0}\right)\right)K_1\left(2\sqrt{b}\sqrt{r}\right)\right)-$$

$$-2NT_2^*\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\Delta_\mu}\sqrt{\frac{R}{r}}\left(I_\mu\left(2\sqrt{b}\sqrt{r}\right)K_\mu\left(2\sqrt{b}\sqrt{r_0}\right)-I_\mu\left(2\sqrt{b}\sqrt{r_0}\right)K_\mu\left(2\sqrt{b}\sqrt{r}\right)\right)\frac{\sin n\varphi}{n\varphi}\cos Nn\theta. \quad (19)$$

Совершая предельный переход $\varphi\to 0$ $\left(\lim\limits_{\varphi\to 0}\frac{\sin n\varphi}{n\varphi}=1\right)$ в формулах (16), (19), получим неосесимметричное распределение температуры в анизотропных кольцевых пластинах переменной толщины от N точечных источников тепла на ее внешней границе [1].

Заключение

Заметим, что в профилированных анизотропных кольцевых пластинах распределение температуры от N протяженных источников тепла на внешней границе имеет более сложный характер, чем распределение температуры от N точечных источников тепла на внешнем контуре. Поскольку формулы (16) и (19) содержат ряды, в которые входит тригонометрическая функция $\sin n\varphi$, то эти ряды будут знакопеременными. Более того, ввиду быстрого стремления к нулю осциллирующей функции $\frac{\sin n\varphi}{n\varphi}$ с увеличением n, в формулах (16), (19) при практических расчетах можно ограничиться только несколькими первыми членами рядов.

Библиографические ссылки

1. Королевич ВВ. Решение неосесимметричной стационарной задачи теплопроводности для полярно-ортотропной кольцевой пластины переменной толщины с учетом теплообмена с внешней средой. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2020;1:47–58. DOI: 10.33581/2520-6508-2020-1-47-58.
2. Уздалев АИ, Брюханова ЕН. Уравнение теплопроводности для пластин переменной толщины с неоднородными теплофизическими свойствами. В: Уздалев АИ, редактор. *Задачи прикладной теории упругости.* Саратов: Саратовский политехнический институт; 1985. с. 3–7.
3. Королевич ВВ. Стационарные температурные поля в анизотропных пластинах переменной толщины с учетом теплообмена с внешней средой. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2018;2:58–66.

References

1. Karalevich UV. Solution of nonaxisymmetric stationary problem of heat conductivity for polar-orthotropic ring plate of variable thickness with account of heat transfer with external environment. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2020;1:47–58. Russian. DOI: 10.33581/2520-6508-2020-1-47-58.
2. Uzdalev AI, Bryukhanova EN. [Equations of thermal conductivity for plates of variable thickness with inhomogeneous thermophysical properties]. In: Uzdalev AI, editor. *Zadachi prikladnoi teorii uprugosti* [Problems of applied theory of elasticity]. Saratov: Saratovskii politekhnicheskii institut; 1985. p. 3–7. Russian.
3. Karalevich UV. Stationary temperature fields in the anisotropic ring plates of variable thickness considering the heat exchange with external environment. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2018;2:58–66. Russian.

Статья поступила в редколлегию 05.11.2020.
Received by editorial board 05.11.2020.