

УДК 519.4

## **D-ОПТИМАЛЬНЫЕ ПЛАНЫ ЭКСПЕРИМЕНТОВ ДЛЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ РЕГРЕССИИ НА ОТРЕЗКЕ С НЕРАВНОТОЧНЫМИ НАБЛЮДЕНИЯМИ**

**В. П. КИРЛИЦА<sup>1)</sup>**

<sup>1)</sup>Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Исследуется проблема построения непрерывных (число наблюдений не фиксируется)  $D$ -оптимальных планов экспериментов для тригонометрической регрессии в случае, когда дисперсия ошибок зависит от точки, в которой проводится наблюдение. Определен класс функций, описывающих изменение дисперсии неравноточных наблюдений, для которых можно построить непрерывные  $D$ -оптимальные планы экспериментов. Для тригонометрической регрессии с тремя факторами построены непрерывные  $D$ -оптимальные планы экспериментов с различными типами неравноточных наблюдений. Для каждого из этих типов выделен свой собственный класс функций, описывающих изменение дисперсии наблюдений.

**Ключевые слова:** непрерывные  $D$ -оптимальные планы экспериментов; тригонометрическая регрессия; равноточные наблюдения; неравноточные наблюдения.

## **D-OPTIMAL DESIGNS OF EXPERIMENTS FOR TRIGONOMETRIC REGRESSION ON INTERVAL WITH HETEROSCEDASTIC OBSERVATIONS**

**V. P. KIRLITSA<sup>a</sup>**

<sup>a</sup>Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

In article the problem of construction continuous (number of observations is not fixed)  $D$ -optimal designs of experiments for trigonometric regression in a case when variance of errors of observations depend on a point in which is made is investigated. Class of functions which describe change variance of heteroscedastic observations is defined for which it is possible construct continuous  $D$ -optimal designs of experiments. For trigonometric regression with three factors it is constructed continuous  $D$ -optimal designs of experiments with different types heteroscedastic observations. For each of these types the own class of functions describing change variance of observations is defined.

**Keywords:** continuous  $D$ -optimal designs of experiments; trigonometric regression; homoscedastic observations; heteroscedastic observations.

---

### **Образец цитирования:**

Кирлица В.П.  $D$ -оптимальные планы экспериментов для тригонометрической регрессии на отрезке с неравноточными наблюдениями. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2020;3:80–85. <https://doi.org/10.33581/2520-6508-2020-3-80-85>

### **For citation:**

Kirlitsa V.P.  $D$ -optimal designs of experiments for trigonometric regression on interval with heteroscedastic observations. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2020;3:80–85. Russian. <https://doi.org/10.33581/2520-6508-2020-3-80-85>

---

### **Автор:**

**Валерий Петрович Кирлица** – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры математического моделирования и анализа данных факультета прикладной математики и информатики.

### **Author:**

**Valery P. Kirlitsa**, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of mathematical modeling and data analysis, faculty of applied mathematics and computer science. [kirlitsa@bsu.by](mailto:kirlitsa@bsu.by)

Рассмотрим модель наблюдений

$$y_j = \theta_1 + \sum_{s=1}^k (\theta_{2s} \cos(sx_j) + \theta_{2s+1} \sin(sx_j)) + \varepsilon(x_j), \quad j \geq 2k+1, \quad (1)$$

где  $y_j$  – наблюдаемые переменные;  $x_j$  – контролируемые переменные, принадлежащие интервалу  $[0, 2\pi]$ ;  $\theta_1, \theta_{2s}, \theta_{2s+1}$  – неизвестные параметры, подлежащие оцениванию;  $\varepsilon(x_j)$  – некоррелированные ошибки наблюдений со средним значением, равным нулю, и дисперсией, зависящей от точки наблюдения:

$$D\{\varepsilon(x_j)\} = d(x_j) > 0, \quad j \geq 2k+1. \quad (2)$$

Функция  $d(x)$  – некоторая положительная функция.

В монографиях [1; 2] для модели равнооточных наблюдений ( $d(x) = \sigma^2$ ,  $\sigma^2 > 0$ ) доказано, что план экспериментов

$$\varepsilon_n^0 = \left\{ \begin{matrix} x_1^0, \dots, x_n^0 \\ \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \end{matrix} \right\} \quad (3)$$

является непрерывным  $D$ -оптимальным. В (3) точки спектра плана

$$x_i^0 = \frac{2\pi(i-1)}{n}, \quad i = \overline{1, n}, \quad n \geq 2k+1. \quad (4)$$

Для частного случая  $n = 2k+2$  оптимальный план (3) впервые был построен в публикации [3]. В статье [4] для модели тригонометрической регрессии (1) с равнооточными наблюдениями, в которой объясняющая переменная изменяется в интервале  $[-a, a]$ ,  $0 < a \leq \pi$ , рассматривается построение оптимальных планов экспериментов для оценки неизвестных параметров модели. В этой статье отмечено, что структура оптимального плана экспериментов существенно зависит от размера интервала планирования. Также в ней приведена обширная библиография работ, посвященных исследованию тригонометрических моделей наблюдений.

В данной статье покажем, что план (3) остается  $D$ -оптимальным для определенного класса неравнооточных наблюдений.

**Теорема 1.** Для модели наблюдений (1), (2) план (3) остается непрерывным  $D$ -оптимальным для неравнооточных наблюдений, дисперсии которых  $d(x)$  удовлетворяют неравенству

$$d(x) \geq \sigma^2, \quad \sigma \neq 0, \quad (5)$$

где равенство выполняется в точках (4) спектра плана (3).

**Доказательство.** Теорема будет доказана, если будет установлено, что для плана (3) справедливы условия теоремы эквивалентности Кифера – Вольфовица [1] для  $D$ -оптимальных планов:

$$\frac{1}{d(x)} f'(x) M^{-1}(\varepsilon_n^0) f(x) \leq 2k+1, \quad x \in [0, 2\pi], \quad (6)$$

где  $f(x) = (1, \cos x, \sin x, \dots, \cos kx, \sin kx)$  – вектор базисных функций;  $M(\varepsilon_n^0)$  – информационная матрица плана (3). В неравенстве (6) равенство должно выполняться в точках (4) спектра плана (3).

Вначале докажем, что информационная матрица плана (3) при ограничении (5) имеет диагональный вид:

$$M(\varepsilon_n^0) = \sigma^{-2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

В работах [1; 2] приводится доказательство утверждения (7) для равнооточных наблюдений. Однако оно фрагментарно и в монографии [1, с. 123] дано для четных значений  $n$ . Представим полное доказательство (7) для любых  $n$ .

Будем использовать формулы Эйлера и формулу для суммы геометрической прогрессии. Пусть  $m$  и  $l$  – натуральные числа, принимающие значения от 1 до  $k$ , причем  $m \neq l$ . Диагональные элементы информационной матрицы, начиная со второго, вычислим, используя формулы Эйлера.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \frac{1}{n} \cos^2 \frac{2m(j-1)\pi}{n} &= \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^n \left( 1 + \cos \frac{4m(j-1)\pi}{n} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4n} \sum_{j=1}^n \left( e^{i \frac{4m(j-1)\pi}{n}} + e^{-i \frac{4m(j-1)\pi}{n}} \right) = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4n} \left( \frac{1 - e^{i4m\pi}}{1 - e^{i \frac{4m\pi}{n}}} + \frac{1 - e^{-i4m\pi}}{1 - e^{-i \frac{4m\pi}{n}}} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4n} \left( \frac{(1 - e^{i4m\pi}) \left( 1 - e^{-i \frac{4m\pi}{n}} \right) + (1 - e^{-i4m\pi}) \left( 1 - e^{i \frac{4m\pi}{n}} \right)}{2 - 2 \cos \frac{4m\pi}{n}} \right) = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4n} \frac{2 - 2 \cos 4m\pi - 2 \cos \frac{4m\pi}{n} + 2 \cos 4m\pi \left( 1 - \frac{1}{n} \right)}{2 - 2 \cos \frac{4m\pi}{n}} = \frac{1}{2}, \\ \sum_{j=1}^n \frac{1}{n} \sin^2 \frac{2m(j-1)\pi}{n} &= \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^n \left( 1 - \cos \frac{4m(j-1)\pi}{n} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^n \cos \frac{4m(j-1)\pi}{n} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Недиагональные элементы равны нулю. Используя формулы Эйлера, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \frac{1}{n} \cos \frac{2m(j-1)\pi}{n} &= \frac{1}{2n} \left( \frac{1 - e^{i2m\pi}}{1 - e^{i \frac{2m\pi}{n}}} + \frac{1 - e^{-i2m\pi}}{1 - e^{-i \frac{2m\pi}{n}}} \right) = \frac{1}{2n} \frac{-2 \cos \frac{2m\pi}{n} + 2 \cos \frac{2m\pi}{n}}{2 - 2 \cos \frac{2m\pi}{n}} = 0, \\ \sum_{j=1}^n \frac{1}{n} \sin \frac{2m(j-1)\pi}{n} &= \frac{1}{2ni} \left( \frac{1 - e^{i2m\pi}}{1 - e^{i \frac{2m\pi}{n}}} - \frac{1 - e^{-i2m\pi}}{1 - e^{-i \frac{2m\pi}{n}}} \right) = \frac{1}{2n} \frac{2 \sin \frac{2m\pi}{n} + 2 \sin 2m\pi \left( 1 - \frac{1}{n} \right)}{2 - 2 \cos \frac{2m\pi}{n}} = 0, \\ \sum_{j=1}^n \frac{1}{n} \sin \frac{2m(j-1)\pi}{n} \cos \frac{2l(j-1)\pi}{n} &= \frac{1}{2n} \left( \sum_{j=1}^n \sin \frac{2(m+l)(j-1)\pi}{n} + \sum_{j=1}^n \sin \frac{2(m-l)(j-1)\pi}{n} \right) = 0. \end{aligned}$$

В силу (5), (7) имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{d(x)} f'(x) M^{-1}(\epsilon_n^0) f(x) &= \frac{\sigma^2}{d(x)} \left( 1 + 2(\sin^2 x + \cos^2 x + \dots + \sin^2 kx + \cos^2 kx) \right) = \\ &= \frac{\sigma^2}{d(x)} (1 + 2k) \leq 2k + 1, \end{aligned} \quad (8)$$

причем в неравенстве (8) равенство достигается в точках (4) спектра плана (3). Условия теоремы эквивалентности Кифера – Вольфовица выполнены. Теорема 1 доказана.

Множество функций, удовлетворяющих неравенству (5), обширно. Ему соответствуют равнооточные наблюдения с дисперсиями  $d(x) = \sigma^2$  и, например, функции

$$d(x) = \sigma^2 + \beta \cdot |\sin(2nx)|, \quad \beta > 0; \quad d(x) = \sigma^2 + \beta \cdot ((x) \bmod \Delta), \quad \beta > 0, \quad \Delta = \frac{2\pi}{n};$$

$$d(x) = \sigma^2 \sqrt{\frac{\Delta^2}{4} - \left( x - s\Delta + \frac{\Delta}{2} \right)^2}, \quad x \in [(s-1)\Delta, s\Delta], \quad s = \overline{1, n}, \quad \Delta = \frac{2\pi}{n}.$$

Можно предложить и ряд других функций.

*Замечание.* Доказанная теорема верна и для планов экспериментов (3), в которых точки спектра (4) сдвинуты на угол  $\varphi$ , т. е.

$$x_i^0 = \frac{2\pi(i-1)}{n} + \varphi, \quad i = \overline{1, n}, \quad n \geq 2k+1.$$

Доказательство проводится по той же схеме с незначительными изменениями.

Особенность построенных планов экспериментов (3) с неравноточными наблюдениями состоит в том, что в точках (4) спектров этих планов дисперсии наблюдений принимают одни и те же значения, равные  $\sigma^2$ . Возникает вопрос, можно ли построить планы экспериментов для неравноточных наблюдений, для которых дисперсии наблюдений в точках спектра планов экспериментов принимали бы различные значения. Ответ утвердительный. Для частного случая модели наблюдений (1)

$$y_j = \theta_1 + \theta_2 \cos x_j + \theta_3 \sin x_j + \varepsilon(x_j), \quad j \geq 3, \quad (9)$$

можно сконструировать так называемые насыщенные планы экспериментов с тремя наблюдениями, для которых в точках спектра  $0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$  дисперсии наблюдений будут принимать положительные значения  $d_1, d_2, d_3$  соответственно.

**Теорема 2.** Для модели наблюдений (9) с некоррелированными ошибками наблюдений, имеющими среднее значение, равное нулю, и дисперсии  $d(x)$ , удовлетворяющие неравенству

$$d(x) \geq \frac{1}{9} \left( (4d_1 + d_2 + d_3) \cos^2 x + 3(d_2 + d_3) \sin^2 x + \sqrt{3}(d_3 - d_2) \sin 2x + \right. \\ \left. + 2(2d_1 - d_2 - d_3) \cos x + 2\sqrt{3}(d_2 - d_3) \sin x + d_1 + d_2 + d_3 \right), \quad (10)$$

в котором равенство достигается в точках  $0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ , насыщенный  $D$ -оптимальный план экспериментов имеет вид

$$\varepsilon_3^0 = \left\{ \begin{array}{ccc} 0, & \frac{2\pi}{3}, & \frac{4\pi}{3} \\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{3} \end{array} \right\}. \quad (11)$$

*Доказательство.* Для  $D$ -оптимального плана  $\varepsilon_3^0$  по теореме эквивалентности Кифера – Вольфовица [1] должно выполняться неравенство

$$\frac{1}{d(x)} (1, \cos x, \sin x) M^{-1}(\varepsilon_3^0) \begin{pmatrix} 1 \\ \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} \leq 3, \quad x \in [0, 2\pi), \quad (12)$$

причем (12) должно обращаться в равенство в точках спектра плана (11). Проверим справедливость этого утверждения.

Информационная матрица плана  $\varepsilon_3^0$  равна

$$M(\varepsilon_3^0) = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{d_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (1, 1, 0) + \frac{1}{d_2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \left( 1, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \frac{1}{d_3} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \left( 1, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & k & e \\ c & e & m \end{pmatrix},$$

где

$$a = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \frac{1}{d_3}, \quad b = \frac{1}{d_1} - \frac{1}{2d_2} - \frac{1}{2d_3}, \quad c = \frac{\sqrt{3}}{2d_2} - \frac{\sqrt{3}}{2d_3}, \quad e = -\frac{\sqrt{3}}{4d_2} + \frac{\sqrt{3}}{4d_3}, \quad (13)$$

$$k = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{4d_2} + \frac{1}{4d_3}, \quad m = \frac{3}{4d_2} + \frac{3}{4d_3}.$$

Матрица, обратная к матрице  $M(\epsilon_3^0)$ , имеет вид

$$M^{-1}(\epsilon_3^0) = \frac{3}{akm + 2bce - c^2k - e^2a - b^2m} \begin{pmatrix} km - e^2, & ce - bm, & be - kc \\ ce - bm, & am - c^2, & bc - ae \\ be - kc, & bc - ae, & ak - b^2 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Используя (13), преобразуем элементы матрицы (14).

$$\begin{aligned} km - e^2 &= \frac{3(d_1 + d_2 + d_3)}{4d_1d_2d_3}, \quad ce - bm = \frac{3(2d_1 - d_2 - d_3)}{4d_1d_2d_3}, \quad be - kc = \frac{3\sqrt{3}(d_2 - d_3)}{4d_1d_2d_3}, \\ am - c^2 &= \frac{3(d_2 + 4d_1 + d_3)}{4d_1d_2d_3}, \quad bc - ae = \frac{3\sqrt{3}(d_3 - d_2)}{4d_1d_2d_3}, \quad ak - b^2 = \frac{9(d_3 + d_2)}{4d_1d_2d_3}, \\ akm + 2bce - c^2k - e^2a - b^2m &= \frac{27}{4d_1d_2d_3}. \end{aligned} \quad (15)$$

Разрешая неравенство (12) относительно функции  $d(x)$  и учитывая соотношения (14), (15), получаем требуемое неравенство (10). Легко проверить, что неравенство (10) обращается в равенство в точках спектра плана (11). Условия теоремы эквивалентности Кифера – Вольфовица выполнены. Теорема 2 доказана.

Есть предположение, что точки спектра плана (11) можно сдвинуть на угол  $\varphi$ , т. е.

$$x_1^0 = \varphi, \quad x_2^0 = \frac{2\pi}{3} + \varphi, \quad x_3^0 = \frac{4\pi}{3} + \varphi, \quad (16)$$

при этом изменится вид функций  $d(x)$  в неравенстве (10). Расчеты, проведенные для угла  $\varphi = \frac{\pi}{6}$ , подтверждают это. Пусть в соответствии с (16)  $D_1 = d(x_1^0)$ ,  $D_2 = d(x_2^0)$ ,  $D_3 = d(x_3^0)$ . Получим выражение для дисперсии  $d(x)$  наблюдений, соответствующих оптимальному плану экспериментов с точками спектра (16), равными весами  $\frac{1}{3}$  и углом  $\varphi = \frac{\pi}{6}$ :

$$\begin{aligned} d(x) &\geq \frac{1}{9} (3(D_1 + D_2)\cos^2 x + (D_1 + D_2 + 4D_3)\sin^2 x + \\ &+ \sqrt{3}(D_1 - D_2)\sin 2x + 2\sqrt{3}(D_1 - D_2)\cos x + 2(D_1 + D_2 - 2D_3)\sin x + D_1 + D_2 + D_3). \end{aligned} \quad (17)$$

В точках (16) спектра плана с углом  $\varphi = \frac{\pi}{6}$  неравенство (17) обращается в равенство. Было бы интересно установить закон преобразования значений  $d_1, d_2, d_3$  в значения  $D_1, D_2, D_3$  для произвольных углов  $\varphi$ .

Теперь исследуем вопрос, можно ли для модели (9) с четырьмя наблюдениями построить оптимальный план

$$\epsilon_4^0 = \left\{ \begin{matrix} 0, & \frac{\pi}{2}, & \pi, & \frac{3\pi}{2} \\ \frac{1}{4}, & \frac{1}{4}, & \frac{1}{4}, & \frac{1}{4} \end{matrix} \right\} \quad (18)$$

с неравноточными наблюдениями, для которого дисперсии наблюдений в точках спектра плана (18) будут различными.

Введем для плана (18) обозначения для дисперсий наблюдений:  $d_1 = d(0^\circ)$ ,  $d_2 = d(90^\circ)$ ,  $d_3 = d(180^\circ)$ ,  $d_4 = d(270^\circ)$ . Проводя для плана (18) рассуждения, аналогичные тем, что были изложены при доказательстве теоремы 2, получим неравенство, которому должна удовлетворять дисперсия  $d(x)$  наблюдений:

$$d(x) \geq \frac{1}{3(d_1 + d_2 + d_3 + d_4)} \left( (d_2 d_3 + 4d_1 d_3 + d_1 d_2 + d_3 d_4 + d_1 d_4) \cos^2 x + \right. \\ \left. + (4d_2 d_4 + d_1 d_4 + d_1 d_2 + d_2 d_3 + d_3 d_4) \sin^2 x + (d_3 d_4 - d_1 d_4 - d_2 d_3 + d_1 d_2) \sin 2x + \right. \\ \left. + 2(d_1 d_2 - d_2 d_3 + d_1 d_4 - d_3 d_4) \cos x + 2(d_1 d_2 - d_1 d_4 + d_2 d_3 - d_3 d_4) \sin x + \right. \\ \left. + d_1 d_2 + d_2 d_3 + d_1 d_4 + d_3 d_4 \right). \quad (19)$$

Условия выполнения в (19) равенства в точках  $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$  приводят к системе уравнений

$$4(d_2 + d_3 + d_4) = 3(d_1 + d_2 + d_3 + d_4), \quad 4(d_1 + d_3 + d_4) = 3(d_1 + d_2 + d_3 + d_4), \\ 4(d_1 + d_2 + d_4) = 3(d_1 + d_2 + d_3 + d_4), \quad 4(d_1 + d_2 + d_3) = 3(d_1 + d_2 + d_3 + d_4). \quad (20)$$

Решая систему уравнений (20), получаем  $d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = \sigma^2$ ,  $\sigma \neq 0$ . Таким образом, неравенство (19) сводится к ранее полученному неравенству (5). Следовательно, для модели (9) с четырьмя наблюдениями можно строить оптимальные планы экспериментов, дисперсии наблюдений которых удовлетворяют неравенству (5).

### Библиографические ссылки

1. Ермаков СМ, Жиглявский АА. *Математическая теория оптимального эксперимента*. Москва: Наука; 1987. 320 с.
2. Федоров ВВ. *Теория оптимального эксперимента*. Москва: Наука; 1971. 312 с.
3. Hoel PG. Minimax designs in two dimensional regression. *Annals of Mathematical Statistics*. 1965;36(4):1097–1106. DOI: 10.1214/aoms/1177699984.
4. Dette H, Melas VB. Optimal designs for estimating individual coefficients in Fourier regression models. *Annals of Statistics*. 2003;31(5):1669–1692. DOI: 10.1214/aos/1065705122.

### References

1. Ermakov SM, Zhiglyavskii AA. *Matematicheskaya teoriya optimal'nogo eksperimenta* [The mathematical theory of optimal design]. Moscow: Nauka; 1987. 320 p. Russian.
2. Fedorov VV. *Teoriya optimal'nogo eksperimenta* [Optimal experiment theory]. Moscow: Nauka; 1971. 312 p. Russian.
3. Hoel PG. Minimax designs in two dimensional regression. *Annals of Mathematical Statistics*. 1965;36(4):1097–1106. DOI: 10.1214/aoms/1177699984.
4. Dette H, Melas VB. Optimal designs for estimating individual coefficients in Fourier regression models. *Annals of Statistics*. 2003;31(5):1669–1692. DOI: 10.1214/aos/1065705122.

Статья поступила в редколлегию 29.06.2020.  
Received by editorial board 29.06.2020.