УДК 159.9:004

СУБЪЕКТИВНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ (ТЕОРИЯ РЕЙТИНГОВ)

В. М. РОМАНЧАК[1)]

[1)]*Белорусский национальный технический университет,*
пр. Независимости, 65, 220013, г. Минск, Беларусь

Рассматривается вариант теории измерений. Чтобы измерение удовлетворяло строгим математическим требованиям, необходимо подтвердить количественный характер атрибутов. Однако большинство измерений в психологии не соответствуют этому критерию. Высказывается предположение, что такое обстоятельство объясняется не отсутствием компетентности у специалистов, а отсутствием теории измерений, в рамках которой можно было бы выполнить данную проверку. Делается вывод о том, что в общепринятой теории репрезентативных измерений такая проверка не предусмотрена. В связи с этим предлагается использовать теорию рейтингов (дается ее краткая формулировка), с ее помощью можно эмпирически подтвердить количественный характер измеряемого атрибута. Разбирается реальный пример эффективного анализа данных. Применение теории рейтингов позволяет устранить парадоксальное противоречие между законами Фехнера и Стивенса и доказать количественный характер значений, полученных субъективными методами измерения.

Ключевые слова: экспертные оценки; рейтинг; закон Фехнера; закон Стивенса; теория измерений.

SUBJECTIVE MEASUREMENTS (RATING THEORY)

V. M. ROMANCHAK[a]

[a]*Belarusian National Technical University, 65 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220013, Belarus*

In this paper, a version of the theory of measurements is proposed. The introduction provides links to papers that discuss various measurement theories. In order for a measurement to satisfy strict mathematical criteria, it is necessary to confirm the quantitative nature of the attributes. However, most dimensions in psychology do not satisfy these strict criteria. The paper assumes that this state of affairs is explained not by the lack of competence among specialists, but by the lack of a measurement theory within which such a test could be performed. It is concluded that, within the framework of the existing theory of representative measurements, such a check is not provided. In this connection, the paper proposes to use the theory of ratings instead of a representative theory of measurements. A brief formulation of rating theory is given. It is emphasized that using the theory of ratings it is possible to empirically confirm the quantitative nature of the measured attribute. A real-world example of effective data analysis is analyzed. The application of rating theory allows us to eliminate the paradoxical contradiction between the laws of Fechner and Stevens and confirm the quantitative nature of the values obtained by subjective measurement methods.

Keywords: expert estimates; rating; Fechner law; Stevens law; measurement theory.

Введение

Развитие теории измерений психологических атрибутов привело к дискуссии вокруг определения измеримости [1–4]. Сторонники математической теории измерений считают, что в психометрии без доказательства принимается гипотеза о количественном характере психологических атрибутов, которые

Образец цитирования:
Романчак ВМ. Субъективные измерения (теория рейтингов). *Журнал Белорусского государственного университета. Философия. Психология.* 2020;3:87–98.

For citation:
Romanchak VM. Subjective measurements (rating theory). *Journal of the Belarusian State University. Philosophy and Psychology.* 2020;3:87–98. Russian.

Автор:
Василий Михайлович Романчак – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры инженерной математики инженерно-физического факультета.

Author:
Vasily M. Romanchak, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of engineering mathematics, faculty of engineering and physics.
romanchak@bntu.by

на самом деле являются порядковыми [3; 4]. Приверженцы операционализма думают, что если присвоение значений переменным происходит разумно и приводит к плодотворным результатам, то это вполне оправданно [5; 6]. В настоящей работе сформулирован такой вариант теории измерений, как теория рейтингов [7; 8], применение которой позволяет эмпирически подтвердить количественный характер измеряемого атрибута и устранить парадоксальное противоречие между законами Фехнера и Стивенса [9].

Обоснуем актуальность теории рейтингов. В 1946 г. Стэнли Смит Стивенс предложил рассматривать в качестве измерения «присвоение числительных объектам или событиям согласно правилам» [5]. Дальнейшее развитие идеи С. Стивенса получили в репрезентативной теории измерений (РТИ) [10; 11], в которой отношения, установленные для чисел, выполняются и на множестве реакций. В зависимости от того, какие именно отношения можно принять для данного множества реакций, строится и соответствующая шкала измерения. По общепринятой классификации обычно рассматривают четыре основных типа шкал: наименования и порядок (относятся к качественной шкале), интервалы и отношения (считаются количественными, так как позволяют установить количественные соотношения между элементами).

Но РТИ не нашла поддержки среди психологов. Вместо РТИ С. Стивенс и его коллеги использовали операционную теорию измерений, где вопрос о типе шкалы решается анализом значений, полученных в результате измерения без анализа свойств соответствующего атрибута. Разумеется, можно оценивать величину объектов A_1, A_2, ..., A_n в баллах (например, $r(A_1)=1, r(A_2)=3$). Однако без обоснования нельзя утверждать, что величина объекта A_2 в три раза или на две единицы больше объекта A_1. Дать количественную характеристику величине в некоторых случаях может специалист, но обычный человек не способен сказать, насколько или во сколько раз одно проявление свойства больше или меньше другого. Тем не менее С. Стивенс разработал и внедрил в практику психологических измерений ряд методов, которые нарушают это правило. Например, в методе деления испытуемому предъявляют стандартный стимул S и просят подобрать к нему среди предлагаемых для сравнения стимулов такой, величина которого составляет 1/2 или 1/3 и т. п. При этом вопрос о том, является ли субъективно измеряемая величина количественной, не рассматривается. Необходимо отметить, что метод деления входит в учебники по психологии [12; 13]. Это означает следующее: в психологических измерениях РТИ фактически применяется только для описания эмпирических структур, а не доказательства их существования. Мнения о несоответствии РТИ требованиям психологов расходятся. Одни из них считают, что РТИ не подходит для измерения психологических атрибутов [14; 15]. Другие же видят причину в сложности РТИ, поэтому психологам трудно понять, как общие математические принципы РТИ можно применить к конкретным эмпирическим вопросам [2].

Здесь можно высказать предположение о принципиальном недостатке самой РТИ: существующая аксиоматизация РТИ обеспечивает описание процесса измерений, но не может служить в качестве обоснования количественного характера измеряемой величины. В РТИ отсутствует встроенный механизм проверки адекватности числовых отношений эмпирической структуре, однако он есть в классической теории измерений для аддитивных фундаментальных физических величин (например, массы или площади) [3]. Аксиоматическое определение аддитивности позволяет предложить конструктивный способ измерения и подтвердить количественный характер измеряемой величины. Например, соединив два стержня, длина которых равна одной единице измерения, получим стержень длиной две единицы измерения. Этот теоретический результат можно проверить с помощью объективного опыта, но величины, измеряемые в психологии, не являются аддитивными. Так, для получения значений субъективной величины в психологии широко применяется метод парных сравнений, с помощью которого оценивают, в частности, привлекательность объектов, проводя парные сравнения и используя для аппроксимации параметрические модели Терстоуна – Мостеллера и Брэдли – Терри [12; 16]. Вместе с тем вопрос, являются ли результаты измерения количественной или качественной характеристикой, не рассматривается. Считается, что такой подход будет приемлем при проведении психологических измерений [3].

Несмотря на то что психофизические законы Фехнера и Стивенса приводят к различным значениям субъективно измеряемой величины, психологи по-прежнему используют операционную теорию измерений и игнорируют РТИ. Такая практика психологических исследований подтверждает, что стандартная РТИ, базирующаяся на работах А. Тарского [11], не может служить основой для проведения измерений в психологии.

В настоящей статье рассматривается математическая модель измерения некоторой величины (свойства атрибута) – теория рейтингов [7; 8], идея которой взята из теории категорий [17]. Введение рейтинга позволяет отделить процедуру измерения от выбора шкалы измерения. Чтобы установить существование рейтинга, который является критерием количественного характера измеряемой величины, достаточно проверить соответствие эмпирических данных математической модели рейтинга. На основании теории рейтингов получена естественная интерпретация психофизических законов Фехнера и Стивенса: оба закона оказываются эквивалентными.

Цель исследования – кратко изложить теорию рейтингов. Дополнительно рассматривается метод проверки адекватности математической модели измерения рейтинга эмпирическим данным. Вначале представлены классическое и аксиоматическое определения рейтинга [7; 8].

Классическое определение рейтинга

В определении классической вероятности понятие симметрии исходов является аксиоматическим и принимается на основании мнения эксперта. Например, при подбрасывании монеты эксперт интуитивно полагает, что стороны монеты достаточно симметричны, поэтому с одинаковой вероятностью может выпасть любая из сторон. Классическое определение вероятности сводит вычисление вероятности к понятию событий, одинаковых по вероятности. В классическом определении рейтинга аксиоматически рассматриваются особые объекты измерения. В книге А. А. Фридмана «Мир как пространство и время» предлагается находить величину «интенсивности» объекта с помощью особой группы объектов A_1, A_2, A_3, ..., A_n, обладающих характерным свойством «равноотстоящей интенсивности» [18]. Введем понятие объектов, величина которых изменяется равномерно от объекта к объекту, если их расположить в порядке возрастания этой величины. Приведем примеры таких объектов.

1. Астроном Гиппарх, наблюдая за звездами, разделил их по яркости на шесть величин, где первая – самый яркий объект, а шестая – наиболее тусклый. Промежуточные величины он распределил равномерно между оставшимися звездами.

2. Густав Теодор Фехнер рассматривал едва заметные различия субъективных ощущений [9]. Например, эксперт может сравнивать вес двух объектов. Вес второго объекта увеличивается до тех пор, пока эксперт не скажет, что тот «стал больше». Таким образом, последовательно строятся объекты, которые упорядочены по возрастанию веса и едва заметно различаются. Едва заметные различия Г. Фехнер считал равными: эксперт только отличает наступление едва заметного различия, а все различия для него (субъективно) одинаковые.

3. Луис Леон Терстоун использовал шкалу равнокажущихся интервалов для измерения исследуемых психологических и социальных характеристик [13]. Отличительной особенностью шкалы Терстоуна является то, что интервалы между показателями соседних высказываний с субъективной точки зрения примерно одинаковы. Такое свойство шкалы достигается за счет метода ее построения.

В приведенных примерах рассматривается последовательность объектов, величины которых изменяются равномерно (распределены равномерно, имеют едва заметные различия, принадлежат равнокажущимся интервалам). Будем считать, что эксперт может указать последовательность объектов, величина которых изменяется равномерно от одного объекта к другому.

Пусть *величина* объектов A_1, A_2, A_3, ..., A_n *изменяется равномерно* в зависимости от номера объекта. Тогда значения этой величины должны изменяться тоже равномерно. Существуют два основных способа сравнить значения величины. Обычно находят разность значений или отношение значений. В первом случае постоянна разность значений величины $\left(u_{i+1} - u_i = const\right)$, а во втором случае постоянно отношение значений величины $\left(v_{i+1}/v_i = const\right)$, тогда значения $u_i = u\left(A_i\right)$ и $v_i = v\left(A_i\right)$ можно получить из решения системы уравнений вида

$$u_i - u_j = \lambda_1 r\left(A_i, A_j\right), \tag{1}$$

$$\ln v_i - \ln v_j = \lambda_2 r\left(A_i, A_j\right), \tag{2}$$

где $i, j = 1, 2, ..., n$; $r\left(A_i, A_j\right) = i - j$; λ_1, λ_2 – неизвестные постоянные, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$; $u_i \in \Re$, $\Re$ – множество действительных чисел; $v_i \in \Re^+$, $\Re^+$ – множество положительных действительных чисел. В (1) и (2) участвует отображение вида $R\left(A_i, A_j\right) = \lambda r\left(A_i, A_j\right)$, где λ – неизвестная постоянная масштаба. Отображение $R\left(A_i, A_j\right)$ будет называться рейтингом. Кроме того, определим отображение $R\left(A_i\right)$ с помощью равенства $R\left(A_i, A_j\right) = R\left(A_i\right) - R\left(A_j\right)$. Отображение $R\left(A_i\right)$ также будем называть рейтингом (рейтингом объектов). Если рейтинг $R\left(A_i, A_j\right)$ определен с точностью до постоянной масштаба λ, то рейтинг объектов – с точностью до линейного преобразования, и выполняется равенство $R\left(A_i\right) = \lambda r\left(A_i\right) + C$, где $r\left(A_i\right) = i$, причем $r\left(A_i\right)$ – численное значение рейтинга; C – произвольная постоянная. Такое определение рейтинга назовем классическим.

В левую часть уравнения (1) входит разность значений $u_i - u_j$, а в уравнение (2) – логарифм отношения значений $\ln\left(v_i / v_j\right)$, поэтому будем говорить о двух основных способах сравнения значений величины (разности или отношении значений). Рейтинг не зависит от выбора способа сравнения, но меняется при

изменении значений величины, поэтому его можно рассматривать как обобщенную характеристику изменения значений величины.

Пример 1. Пусть площадь шести непересекающихся кругов $A_1, A_2, \ldots, A_6$ (табл. 1, строка 2), с точки зрения респондента, изменяется равномерно. Для $\lambda = 1$, $C = 0$ значение рейтинга объекта A_i совпадает с номером объекта – $r(A_i) = i$, а значение рейтинга пары объектов (A_i, A_j) равно разнице номеров объектов – $r(A_i, A_j) = i - j$. Значения величины можно найти по формулам $u_i = i$ и $v_i = 2^{i-1}$, где i – номер объекта.

Таблица 1

Круги, площадь которых изменяется равномерно

Table 1

The area of the circles changes evenly

r_i	1	2	3	4	5	6
A_i	●	●	●	●	●	●

Рейтинг объекта $R(A_i)$ можно интерпретировать как номера деления на шкале прибора измерения, а рейтинг $R(A_i, A_j)$ – как расстояние между делениями этой шкалы. Значения рейтинга $R(A_i, A_j)$ характеризуют различие в проявлении некоторого свойства.

Аксиоматическое определение рейтинга

В общем случае введем аксиоматическое определение рейтинга для множества объектов $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Областью определения рейтинга являются объекты $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и пары объектов (A_i, A_j), где $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $i \geqslant j$.

Определение. Рейтинг $R(A_i, A_j)$ – это отображение на множество действительных чисел, для которого выполняется свойство

$$R(A_i, A_j) = R(A_i, A_k) + R(A_k, A_j), \tag{3}$$

где $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$, $i \geqslant j \geqslant k$. Чтобы сравнивать объекты в любом порядке, дополнительно считаем, что выполняется равенство

$$R(A_i, A_j) = -R(A_j, A_i), \tag{4}$$

где $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Если определен рейтинг $R(A_i, A_j)$, то можно найти рейтинг $R(A_i)$ (объектов) как функцию, значения которой удовлетворяют уравнению

$$R(A_i, A_j) = R(A_i) - R(A_j). \tag{5}$$

Отметим, что если известен рейтинг $R(A_i, A_j)$ который удовлетворяет равенствам (3) и (4), то существует рейтинг объектов $R(A_i)$. Если предположить обратное (установлен рейтинг объектов $R(A_i)$, и выполняется равенство (5)), тогда равенства (3) и (4) выполняются тождественно. В зависимости от того, какой рейтинг считается известным, приходим к теории рейтингов или РТИ. В теории рейтингов экспериментально получают значения рейтинга $R(A_i, A_j)$ и проверяют адекватность аксиом рейтинга (3) и (4) эмпирическим данным. Далее находят рейтинг объектов $R(A_i)$ из равенства (5). Если рассматривать обратную ситуацию, когда экспериментально определены значения рейтинга объектов $R(A_i)$, а рейтинг $R(A_i, A_j)$ находится по формуле (5), то вопрос об адекватности рейтинга $R(A_i, A_j)$ эмпирическим данным остается открытым. Аналогичный подход используется в РТИ.

Классическое определение рейтинга для объектов $A_1, A_2, \ldots, A_n$ можно конструктивно задать на основании аксиоматического. Для этого достаточно считать, что выполняется равенство $R(A_{i+1}, A_i) = \lambda$, в котором $i = 1, 2, \ldots, n - 1$; λ – неизвестная постоянная, $\lambda > 0$.

Замечание. Рейтинг можно определить, используя теорию категорий. Категория, в которую входит множество объектов $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и упорядоченных пар объектов (морфизмов) (A_i, A_j), $i \geqslant j$ [10], является областью определения рейтинга, а категория, состоящая из множества числовых значений $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и раз-

ностей значений (морфизмов) $a_i - a_j$, $i \geq j$, – областью значений. Рейтинг отображает объекты на множество действительных чисел и сохраняет структуру отношений между объектами: $a_i = R(A_i)$, $a_i - a_j = R(A_i, A_j)$. Таким образом, рейтинг является функтором, и этим теория рейтингов принципиально отличается от РТИ. В основе РТИ лежит теория множеств. В теории рейтингов базовым понятием выступает не величина объектов, а функция взаимодействия объектов по величине (например, результат взаимосвязи двух грузов при взвешивании на рычажных весах). Используя взаимодействие, проводят эксперименты и получают значения рейтинга $R(A_i, A_j)$. В дальнейшем определения теории категорий в работе не применяются.

Если найдены численные значения рейтинга $r_{ij} = r(A_i, A_j)$, где $i, j = 1, 2, \ldots, n$, то можно полагать, что $R(A_i, A_j) = \lambda r_{ij}$, где λ – неизвестная постоянная масштаба. Тогда на основании равенства (5) рейтинг объектов $R_i = R(A_i)$ находится из решения системы уравнений

$$\lambda r_{ij} = R_i - R_j, \tag{6}$$

здесь $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Решение системы (6) определено с точностью до линейного преобразования, поэтому в дальнейшем будет удобно считать, что рейтинг объектов определен с точностью до линейного преобразования. Используя определение рейтинга, дадим определение значениям величины.

Значения величины

Пусть $r(A_i, A_j)$ – значения рейтинга. Аксиоматически установим, что значения величины и рейтинга должны удовлетворять системе уравнений (1) и (2), где $u(A_i) = u(A_i)$; $v_i = v(A_i)$ – значения величины объекта A_i при $i, j = 1, 2, \ldots, n$; λ_1, λ_2 – неизвестные постоянные масштаба, $\lambda_1, \lambda_2 > 0$; $u_i \in \Re$, $\Re$ – множество всех действительных чисел; $v_i \in \Re^+$, $\Re^+$ – множество всех положительных чисел. Пусть заданы значения рейтинга $r(A_i, A_j)$. Тогда значения величины являются решением системы уравнений (1) и (2). Если известны значения величины $u_i \in \Re$ и $v_i \in \Re^+$, то должно выполняться условие совместности.

Теорема (условие совместности). Для того чтобы система уравнений (1) и (2) была совместна, необходимо и достаточно выполнить условие

$$u_i - u_j = \lambda \ln(v_i / v_j), \tag{7}$$

где $i, j = 1, 2, \ldots, n$; $u_i, u_j \in \Re$; $v_i, v_j \in \Re^+$; $\lambda > 0$, λ – постоянная. Доказательство следует непосредственно из определения значений величины (см. (1) и (2)).

Пусть определена разность $u_i - u_j$ или отношение v_i/v_j значений некоторой величины, где $i, j = 1, 2, \ldots, n$, тогда можно найти рейтинг по формулам (1) или (2). Верно и обратное утверждение: если задан рейтинг $r(A_i, A_j)$, то для него можно определить разность или отношения значений величины по формулам (1) и (2). В связи с этим существование рейтинга будем рассматривать как критерий количественного характера измеряемой величины.

Дополнительно разберем алгебраическую интерпретацию условия совместности (7) (для простоты считаем, что $\lambda = 1$). Пусть выполняются равенства $u_i = \ln(u_i)$, $u_j = \ln(v_j)$ тогда выражение (7) есть тождество, которое является следствием того, что группа положительных чисел $\Re^+$ по умножению изоморфна группе действительных чисел $\Re$ по сложению. Следовательно, можно перейти от разности чисел u_i, u_j к отношению чисел v_i, v_j с помощью изоморфизма $u = \ln(v)$. В теории групп изоморфные группы принято не различать. Это означает, что значения величины определены с точностью до изоморфизма и каждому объекту соответствует два значения величины.

Пример 2. Пусть m_i – численное значение массы объекта A_i в классической теории измерений. В теории рейтингов каждому объекту A_i с массой m_i можно поставить в соответствие два значения: $u_i = m_i$ и $v_i = \exp(m_i)$, причем в первом случае определена разность значений $(u_i - u_j)$, во втором – отношение значений (v_i / v_j).

В классической теории измерений значения величины определяются однозначно. Так проще, и такова традиция. При проведении психологических измерений исследователи продолжают считать, что значение величины должно быть единственным. Если разные способы сравнения приводят к различным значениям величины, возникает серьезная проблема [9], которую можно решить, несмотря на традиционные представления, с помощью теории рейтингов. Например, масса объектов в теории рейтингов может быть мультипликативной или аддитивной величиной. Подчеркнем, что решение этой проблемы не сводится к тривиальной замене переменных, а опирается на такое фундаментальное понятие алгебры, как изоморфизм.

Модель измерения рейтинга

Будем рассматривать множества объектов $A_1, A_2, \ldots, A_n$, для которых необходимо найти рейтинг. Обозначим $R_{ik}(A_i, A_k)$ как значение рейтинга. Выберем объект A_k, который назовем единицей измерения. Пусть уравнение измерения рейтинга R_{ik} имеет вид

$$R_{ik} = \beta_k r_{ik}, \tag{8}$$

где $i = 1, \ldots, n$; r_{ik} – значение (числовое) рейтинга, полученное при выполнении операции измерения; β_k – постоянная масштаба, $\beta_k > 0$. Равенство (8) означает, что рейтинг R_{ik} совпадает с числовым значением рейтинга r_{ik} с точностью до постоянной масштаба β_k. В физике обычно фиксируют единицу измерения. Особенностью субъективных измерений является отсутствие фиксированной единицы измерения. Вполне естественно считать, что разным единицам измерения могут соответствовать разные постоянные масштаба β_k, где $k = 1, 2, \ldots, m$. Наша задача – установить условия существования рейтинга, для этого нужны по крайней мере две единицы измерения ($m \geqslant 2$). Используя определение (5) и уравнение измерения (8), получим систему уравнений

$$R_i - R_k = \beta_k r_{ik} \tag{9}$$

для определения неизвестных параметров β_k и значений рейтинга R_i, где $i = 1, 2, \ldots, n$; $k = 1, 2, \ldots, m$. Так как значения рейтинга R_i определены с точностью до постоянной, можно считать, что выполняется равенство $\sum_{i=1}^{n} R_i = 0$. Из системы уравнений (9) следует условие

$$R_i = \beta_k \left(r_{ik} - \bar{r}_k\right), \tag{10}$$

где $i = 1, \ldots, n$; $k = 1, 2, \ldots, m$; r_{ik} – значение рейтинга; $r_{kk} = 0$; $\beta_k > 0$; $\bar{r}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r_{ik}$; β_k, R_i – неизвестные, $i = 1, 2, \ldots, n$, $k = 1, 2, \ldots, m$.

Если известны значения r_{ik}, $i = 1, \ldots, n$, $k = 1, 2, \ldots, m$, причем $r_{kk} = 0$ и для таких значений выполняется условие (10), тогда существует рейтинг, определенный на подмножестве упорядоченных пар по формуле $R_{ik} = \beta_k r_{ik}$. Действительно, для $i = k$, с учетом равенства $r_{kk} = 0$, получим $R_k = -\beta_k \bar{r}_k$. В таком случае из уравнения (10) следует уравнение (9) и для отображения $R_{ik} = \beta_k r_{ik}$ выполняются свойства рейтинга для $i = 1, \ldots, n$ и $k = 1, 2, \ldots, m$.

Чтобы подтвердить существование рейтинга, вместо системы (10) будем рассматривать систему уравнений вида

$$W_i = b_k \left(w_{ik} - \bar{w}_k\right), \tag{11}$$

где w_{ik} – наблюдаемые значения рейтинга; $\bar{w}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} w_{ik}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $k = 1, 2, \ldots, m$; b_k, W_i – неизвестные параметры (W_i – оценки рейтинга R_i). Квазирешение системы (11) найдем методом наименьших квадратов. Минимизируя выражение

$$S = \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\left(W_i - b_k\left(w_{ik} - \bar{w}_k\right)\right)^2,$$

получим равенство

$$W_i = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} b_k \left(w_{ik} - \bar{w}_k\right). \tag{12}$$

Значения W_i можно определять с точностью до постоянного множителя, поэтому можно считать, что $b_m = 1$, а оставшиеся неизвестные значения b_k получим из решения системы линейных уравнений

$$m b_p \sum_{i=1}^{n}\left(w_{ip} - \bar{w}_p\right)^2 - \sum_{k=1}^{m} b_k \sum_{i=1}^{n}\left(w_{ik} - \bar{w}_k\right)\left(w_{ip} - \bar{w}_p\right) = 0, \tag{13}$$

где $p = 1, 2, \ldots, m-1$, $m \geqslant 2$. В частном случае, когда $m = 2$, система (13) принимает вид

$$b_1 \sum_{i=1}^{n}\left(w_{i1} - \bar{w}_1\right)^2 = b_2 \sum_{i=1}^{n}\left(w_{i2} - w_1\right)\left(w_{i1} - w_1\right).$$

Если значения W_i удовлетворяют системе уравнений (11) и $w_{ik} = 0$, тогда существует рейтинг, определенный на подмножестве упорядоченных пар по формуле $R_{ik} = \beta_k\left(W_i - W_k\right)$, где $i = 1, 2, \ldots, n$; $k = 1, 2, \ldots, m$.

Для проверки выполнения уравнений (11) (при наличии случайных ошибок) будем рассматривать модель регрессии вида

$$W_i = \alpha_k \left(w_{ik} - \bar{w}_k \right) + \varepsilon_{ik}, \tag{14}$$

где $i = 1, \ldots, n$; k – фиксировано, $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$; w_{ik} – эмпирическая оценка значения рейтинга r_{ik}; $\bar{w}_k$ – среднее значение для w_{ik}, причем $w_{kk} = 0$; W_i – оценки рейтинга, полученные по формуле (12); a_k – постоянные; ε_{ik} – случайные ошибки. В модели (14) уравнение регрессии соответствует уравнениям системы (11). Предположительно, ε_{ik} – независимые нормально распределенные случайные величины с математическим ожиданием $E(\varepsilon_{ik}) = 0$ и постоянной дисперсией для каждого фиксированного k. В таком случае можно ограничиться проверкой значимости коэффициента корреляции Пирсона $\rho_k = \rho(W, w_k)$. Если коэффициент корреляции значим, то уравнение регрессии соответствует тому же уровню значимости. Таким образом, получено экспериментальное подтверждение существования рейтинга для заданного k.

Пример 3. Объектами измерения являлись девять знаменитостей ($n = 9$), в том числе три политика, три спортсмена и три актера. В исследовании участвовали $n(n-1)/2 = 36$ пар объектов и 234 респондента, которых спрашивали, с кем они предпочли бы поговорить в течение одного часа. Результаты парных сравнений (f_{ij}) представлены табл. 2.

Таблица 2

Результаты парных сравнений

Table 2

The results of the pairwise comparisons

	L. B. J.	H. W.	C. d. G.	J. U.	C. Y.	A. J. F.	B. B.	E. T.	S. L.
L. B. J.	0	159	163	175	183	179	173	160	142
H. W.	75	0	138	164	172	160	156	122	122
C. d. G.	71	96	0	145	157	138	140	122	120
J. U.	59	70	89	0	176	115	124	86	61
C. Y.	51	62	77	58	0	77	95	72	61
A. J. F.	55	74	96	119	157	0	134	92	71
B. B.	61	78	94	110	139	100	0	67	48
E. T.	74	112	112	148	162	142	167	0	87
S. L.	92	112	114	173	173	163	186	147	0

Примечание. Пример и значения f_{ij} взяты из работы [16]. В первых строке и столбце находятся инициалы знаменитостей.

Таблица 3

Матрица парных сравнений объектов

Table 3

The matrix of pairwise comparisons of objects

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9
A_1	0	84	92	116	132	124	112	86	50
A_2	–84	0	42	94	110	86	78	10	10
A_3	–92	–42	0	56	80	42	46	10	6
A_4	–116	–94	–56	0	118	–4	14	–62	–112
A_5	–132	–110	–80	–118	0	–80	–44	–90	–112
A_6	–124	–86	–42	4	80	0	34	–50	–92
A_7	–112	–78	–46	–14	44	–34	0	–100	–138
A_8	–86	–10	–10	62	90	50	100	0	–60
A_9	–50	–10	–6	112	112	92	138	60	0

Оценка значений рейтинга w_{ij} в табл. 3 рассчитывается по формуле $w_{ij} = f_{ij} - f_{ji}$, где f_{ij} – разница частот, с которой знаменитость с номером i более предпочтительна, чем знаменитость с номером j.

В табл. 4 приведены центрированные оценки рейтинга $\dot{w}_{ik} = w_{ik} - \bar{w}_k$, полученные на основании табл. 3, и оценки рейтинга W_i, рассчитанные по формуле (12).

Таблица 4

Центрированные оценки рейтинга

Table 4

Centered rating scores

$\dot{w}_1$	$\dot{w}_2$	$\dot{w}_3$	$\dot{w}_4$	$\dot{w}_5$	$\dot{w}_6$	$\dot{w}_7$	$\dot{w}_8$	$\dot{w}_9$	W
88,4	122,4	103,8	81,3	46,9	93,3	58,9	101,1	99,8	88,9
4,4	38,4	53,8	59,3	24,9	55,3	24,9	25,1	59,8	38,8
–3,6	–3,6	11,8	21,3	–5,1	11,3	–7,1	25,1	55,8	15,1
–27,6	–55,6	–44,2	–34,7	32,9	–34,7	–39,1	–46,9	–62,2	–35,7
–43,6	–71,6	–68,2	–152,7	–85,1	–110,7	–97,1	–74,9	–62,2	–79,6
–35,6	–47,6	–30,2	–30,7	–5,1	–30,7	–19,1	–34,9	–42,2	–31,4
–23,6	–39,6	–34,2	–48,7	–41,1	–64,7	–53,1	–84,9	–88,2	–55,0
2,4	28,4	1,8	27,3	4,9	19,3	46,9	15,1	–10,2	11,3
38,4	28,4	5,8	77,3	26,9	61,3	84,9	75,1	49,8	47,6

Коэффициенты парной корреляции $\rho_k = \rho(W, \dot{w}_k)$, где $k = 1, \ldots, m$, вместе с достигаемым уровнем значимости приведены в табл. 5.

Таблица 5

Коэффициенты корреляции

Table 5

Correlation coefficients

$\dot{w}_1$	$\dot{w}_2$	$\dot{w}_3$	$\dot{w}_4$	$\dot{w}_5$	$\dot{w}_6$	$\dot{w}_7$	$\dot{w}_8$	$\dot{w}_9$
0,0004	0,0001	0,0002	0,0001	0,0092	0,0000	0,0006	0,0000	0,0002

Коэффициент корреляции значим по критерию Стьюдента, и модель регрессии (14) адекватна по критерию Фишера для всех $\dot{w}_k$ (при уровне значимости 0,05), поэтому считаем, что получено экспериментальное подтверждение существования рейтинга.

Таблица 6

Значения рейтинга

Table 6

The value of the rating

Инициалы знаменитостей	Tversky & Sattath	OptiPt	Теория рейтингов
L. B. J.	1,00	1,0000	1,00
S. L.	0,66	0,6401	0,78
H. W.	0,57	0,5416	0,73
C. d. G.	0,40	0,3927	0,60
E. T.	0,43	0,4165	0,58
A. J. F.	0,19	0,1795	0,35
J. U.	0,19	0,1803	0,33

Окончание табл. 6
Ending table 6

Инициалы знаменитостей	Tversky & Sattath	OptiPt	Теория рейтингов
В. В.	0,17	0,1641	0,22
C. Y.	0,09	0,0729	0,09

Примечание. Программа *OptiPt* доступна как функция, встроенная в язык *R* [16].

В табл. 6 приведены оценки рейтинга, выполненные А. Тверски и С. Саттахом (*Tversky & Sattath)* с использованием программы *OptiPt* [16] и на основании теории рейтингов. Для удобства значения рейтинга u_i с помощью линейной замены отображены на интервал [0,09–1,00]. Данное преобразование позволяет легче сопоставить оценки рейтинга, выполненные различными методами [16].

Закон Фехнера и Стивенса

Ощущения вполне обоснованно можно выражать числовыми значениями. В этом заключается фундаментальная проблема психофизики [9]. В течение многих лет считалось, что предложенная Г. Фехнером в 1860 г. логарифмическая функция правильно описывает зависимость между ощущением и физической величиной:

$$u = \eta_1 \ln\left(\frac{q}{q_0}\right), \tag{15}$$

где η_1 – постоянная; u – значения величины, полученные субъективно; q – значения величины, полученные объективно; q_0 – нижнее граничное значение интенсивности раздражителя, $q > q_0$. Например, u – значение ощущения веса тела, найденное на основании субъективного мнения респондента, q – значение веса, полученное взвешиванием. В 1961 г. была опубликована статья С. Стивенса, в которой он доказывал, что между интенсивностью ощущения и физической величиной существует не логарифмическая, а степенная зависимость:

$$v = \alpha(q)^{\eta_2}, \tag{16}$$

где α, η_1 – постоянные; v – значения величины, полученные субъективно; q – значения величины, полученные объективно [9]. На основании модифицированного психофизического закона, предложенного Ю. М. Забродиным, в психофизический закон С. Стивенса вводится параметр, в зависимости от значения которого можно выявить три различные формы психофизического закона [9], включая классические законы Фехнера и Стивенса. Задача выбора между законами Фехнера и Стивенса и в настоящее время не имеет однозначного ответа, и попытки их объединить продолжаются до сих пор [19]. Между тем эту проблему в теории рейтингов можно решить просто, поскольку оба закона адекватно описывают психофизический эксперимент и эквиваленты.

Поясним это на примере кругов $A_1, A_2, \ldots, A_6$ (см. табл. 1, строка 2), площадь которых изменяется равномерно. Можно найти значение величины методом Стивенса или считать, что значение площади равно номеру объекта. В итоге с помощью методов субъективного измерения получаем два значения площади для каждого объекта. Такой вывод соответствует теории рейтингов, но расходится с общепринятыми представлениями. Чтобы подтвердить интерпретацию проблемы, можно обратиться к основным психофизическим законам (15) и (16).

Существует основание полагать, что Г. Фехнер проводил измерения в линейной шкале, так как использовал последовательность объектов, величина которых изменяется равномерно. Выполняя измерения, ученый подсчитывал, сколько едва заметных различий находится между объектами A_i и A_0 (объекту A_0 соответствует порог чувствительности). Выберем множество объектов $A_1, A_2, \ldots, A_n$, для которых можно определить значения величины субъективно (на основании закона Фехнера и Стивенса) и объективно. Используя закон Фехнера (15), получим соотношение

$$u_i - u_j = \eta_1\left(\ln q_i - \ln q_j\right), \tag{17}$$

где $i, j = 1, 2, \ldots, n$; η_1 – постоянная; $u_i = u(A_i)$, u_i – значения величины, полученные субъективно; $q_i = q(A_i)$, q_i – значения, полученные объективно. Проводя эксперименты, С. Стивенс непосредственно находил отношения значений величины. На основании закона (16) получим

$$\ln v_i - \ln v_j = \eta_2\left(\ln q_i - \ln q_j\right), \tag{18}$$

где $i, j = 1, 2, \ldots, n$; $v_i = v(A_i)$, v_i – значения величины, полученные субъективно; $q_i = q(A_i)$, q_i – значение, найденное объективно; η_2 – постоянная. В выражениях (17) и (18) правые части совпадают, тем самым доказано, что выполняется условие совместности (7) для системы уравнений (1) и (2). Следовательно, поскольку существование рейтинга не ставится под сомнение, значения величины в законах Фехнера и Стивенса являются количественными. С помощью равенства (1) и соотношения (17) или равенства (2) и соотношения (18) приходим к выражению

$$r_i - r_j = \eta\left(\ln q_i - \ln q_j\right), \tag{19}$$

где $i, j = 1, 2, \ldots, n$; η – постоянная; $r_i = r(A_i)$, r_i – значения рейтинга; $q_i = q(A_i)$, q_i – значения величины, полученные объективно. Соотношение (19) подтверждает взаимную адекватность основных психофизических законов.

Заключение

Таким образом, в настоящем исследовании показано, почему развитие теории психологических измерений является актуальным. Приводится определение измерения, данное С. Стивенсом, которое подвергается критическому анализу с современной точки зрения. Идея С. Стивенса о том, что человек может непосредственно численно оценить величину своего ощущения, выглядит притягательно и разумно. В связи с развитием РТИ идея С. Стивенса получила мощную теоретическую поддержку. Анализ современной литературы показывает, что большинство психологов верят в существование математического обоснования методики психологических измерений. Наличие такого обоснования выглядит тем более убедительным, если эмпирические данные удается аппроксимировать какой-либо параметрической моделью. При этом никак не объясняется, почему созданная усилиями многих математиков теория меры не находит никакого применения в теории измерений. Кроме того, в современных работах по теории психологических измерений показано, что определение С. Стивенса не подходит для проведения психологических измерений, поскольку не позволяет обосновать количественный характер измеряемой величины. Сторонники и противники идеи С. Стивенса обращаются к РТИ как теоретической основе современной теории измерений. Одним не нравится, что в РТИ нет доказательства количественного характера измеряемой величины. Другие считают, что такие доказательства РТИ и не должна рассматривать. Характер дискуссии между ними позволяет предположить, что в рамках РТИ этот вопрос решать нецелесообразно. В подтверждение этому можно отметить, что дальнейшие попытки развития РТИ нельзя назвать успешными. В частности, РТИ и теорию совместного измерения некоторые специалисты оценивают как революцию, которая не сможет произойти [15].

Чтобы найти выход из создавшейся ситуации, автор настоящей статьи предлагает изменить концепцию такого фундаментального понятия, как измерение, которое в настоящее время называется присвоением чисел объектам по определенным правилам, и рассматривает измерение как операцию присвоения чисел взаимодействию объектов. Ведь известно, что всякое измерение есть сравнение, т. е. оценка взаимного влияния. В связи со сменой концепции меняется и математическая основа теории измерений. Так, если РТИ базируется на теории множеств, то теория рейтингов основывается на теории категорий. Хотя теория рейтингов использует только некоторые элементы теории категорий, все-таки они составляют фундамент предлагаемой теории.

Теория рейтингов не отвергает результаты психологических измерений и может служить дополнением, способным усилить выводы, полученные по итогам проведения различных исследований. Одной из проблем, рассматриваемых в настоящей работе, является формулировка способа проверки количественного характера психологических атрибутов. С помощью модели измерения рейтинга изучаются результаты оценки рейтинга известных личностей, которые получены некоторыми исследователями методом парных сравнений. Ранее эти эмпирические данные применялись в различных работах для параметрической аппроксимации [16]. В настоящем исследовании получено подтверждение, что анализируемый рейтинг является количественной характеристикой.

Важный элемент теории рейтингов – аксиоматическое определение понятия «значение величины». В психологических исследованиях значения величины принято находить, применяя различные способы сравнения, среди них выделяют два основных – разность и отношение значений, которые приводят к разным значениям величины. В теории рейтингов значения, найденные разными способами сравнения, рассматриваются как результат измерения одной и той же величины, наличие различных значений которой является фундаментальной психологической проблемой. Анализ законов Фехнера и Стивенса с применением методов теории рейтингов позволяет установить эквивалентность этих законов и найти решение проблемы.

Важно добавить, что существует радикальная оценка измерений, выполняемых в психологии. Она сводится к следующему: если не доказано, что результаты какого-либо измерения являются количественными, значит, от них мало пользы. Психологи ничего не делают, чтобы обосновать количественный характер атрибутов, поэтому психология является бесполезной, «патологической» наукой [4]. Собственно, такая постановка вопроса и послужила поводом для написания настоящей статьи. Тем не менее предлагаемая математическая теория не является основанием для новой критики психологической науки, скорее наоборот. Причина заключается в следующем: когда результаты измерения представлены в шкале порядка, это не означает, что они бесполезны. Кроме того, проанализированы данные реального психологического измерения. Показано, что измеряемый атрибут является количественным. Аналогичное заключение можно получить из теории рейтингов применительно к основным психологическим законам. Выполненный в работе математический анализ психологического исследования и эмпирических законов говорит скорее о высоком научном уровне и удивительной интуиции Г. Фехнера и С. Стивенса. Такой вывод, по-видимому, можно отнести и к другим измерениям в психологии.

Библиографические ссылки

1. Bandalos DL. *Measurement theory and applications for the social sciences.* New York: The Guilford Press; 2018. 686 p.
2. Vessonen E. Psychometrics versus representational theory of measurement. *Philosophy of the Social Sciences.* 2017; 47(4–5):330–350. DOI: 10.1177/0048393117705299.
3. Michell J. *Measurement in psychology: a critical history of a methodological concept.* Cambridge: Cambridge University Press; 1999. 250 p. DOI: 10.1017/CBO9780511490040.
4. Michell J. Is psychometrics pathological science? *Measurement.* 2008;6:7–24. DOI: 10.1080/15366360802035489.
5. Stevens SS. On the theory of scales of measurement. *Science.* 1946;103(7):677–680.
6. Barrett P. The consequence of sustaining a pathology: scientific stagnation – a commentary on the target article «Is psychometrics a pathological science?» by Joel Michell. *Measurement.* 2008;6:78–123. DOI: 10.1080/1536636080-2035521.
7. Романчак ВМ. Измерение нефизической величины. *Системный анализ и прикладная информатика.* 2017;4: 39–44. DOI: 10.21122/2309-4923-2017-4-39-44.
8. Романчак ВМ. Субъективное оценивание вероятности. *Информатика*. 2018;2(15):74–82.
9. Забродин ЮМ, Лебедев АН. *Психофизиология и психофизика*. Москва: Наука; 1977. 288 с.
10. Толстова ЮН. Краткая история развития репрезентативной теории измерений. *Заводская лаборатория.* 1999; 3:49–57.
11. Luce RD, Suppes P. Representational measurement theory. In: Wixted J, Pashler H, editors. *Stevens' handbook of experimental psychology. Methodology in experimental psychology.* New York: Wiley; 2004. p. 1–41. DOI: 10.1002/0471214426.pas0401.
12. Гусев АН, Измайлов ЧА, Михалевская МБ. *Измерение в психологии. Общий психологический практикум*. Москва: Смысл; 1997. 287 с.
13. Гусев АН, Уточкин ИС. *Психологические измерения. Теория. Методы*. Москва: Аспект Пресс; 2011. 317 с.
14. Cliff N. Abstract measurement theory and the revolution that never happened. *Psychological Science.* 1992;3(3): 186–190. DOI: 10.1111/j.1467-9280.1992.tb00024.x.
15. Trendler G. Measurement theory, psychology and the revolution that cannot happen. *Theory & Psychology.* 2009; 19(5):579–599. DOI: 10.1177/0959354309341926.
16. Wickelmaier F, Schmid C. A Matlab function to estimate choice model parameters from paired-comparison data. *Behavior Research Methods, Instruments, and Computers Comput.* 2004;36(1):29–40. DOI: 10.3758/BF03195547.
17. Bell JL. Category theory and the foundations of mathematics. *British Journal for the Philosophy of Science.* 1981;32: 349–358. DOI: 10.1093/bjps/32.4.349.
18. Фридман АА. Мир как пространство и время. Москва: Наука; 1965. 112 с.
19. Lubashevsky I. Psychophysical laws as reflection of mental space properties. *Physics of Life Reviews.* 2019;31:276–303. DOI: 10.1016/j.plrev.2018.10.003.

References

1. Bandalos DL. *Measurement theory and applications for the social sciences.* New York: The Guilford Press; 2018. 686 p.
2. Vessonen E. Psychometrics versus representational theory of measurement. *Philosophy of the Social Sciences.* 2017; 47(4–5):330–350. DOI: 10.1177/0048393117705299.
3. Michell J. *Measurement in psychology: a critical history of a methodological concept.* Cambridge: Cambridge University Press; 1999. 250 p. DOI: 10.1017/CBO9780511490040.
4. Michell J. Is psychometrics pathological science? *Measurement.* 2008;6:7–24. DOI: 10.1080/15366360802035489.
5. Stevens SS. On the theory of scales of measurement. *Science.* 1946;103(7):677–680.
6. Barrett P. The consequence of sustaining a pathology: scientific stagnation – a commentary on the target article «Is psychometrics a pathological science?» by Joel Michell. *Measurement.* 2008;6:78–123. DOI: 10.1080/1536636080-2035521.
7. Romanchak VM. Model of rating of non physical quantity. *System Analysis and Applied Information Science.* 2017;4: 39–44. DOI: 10.21122/2309-4923-2017-4-39-44. Russian.
8. Romanchak VM. The subjective measurement of probability. *Informatics.* 2018;2(15):74–82. Russian.

9. Zabrodin JuM, Lebedev AN. *Psikhofiziologiya i psikhofizika* [Psychophysiology and psychophysics]. Moscow: Nauka; 1977. 288 p. Russian.

10. Tolstova YuN. [A brief history of the development of representative measurement theory]. *Zavodskaja laboratorija*. 1999;3:49–57. Russian.

11. Luce RD, Suppes P. Representational measurement theory. In: Wixted J, Pashler H, editors. *Stevens' handbook of experimental psychology. Methodology in experimental psychology.* New York: Wiley; 2004. p. 1–41. DOI: 10.1002/0471214426.pas0401.

12. Gusev AN, Izmailov ChA, Mikhalevskaya MB. *Izmerenie v psikhologii. Obshchii psikhologicheskii praktikum* [Measurement in psychology. General psychological workshop]. Moscow: Smysl; 1997. 287 p. Russian.

13. Gusev AN, Utochkin IS. *Psikhologicheskie izmereniya. Teoriya. Metody* [Psychological measurements. Theory. Methods]. Moscow: Aspekt Press; 2011. 317 p. Russian.

14. Cliff N. Abstract measurement theory and the revolution that never happened. *Psychological Science.* 1992;3(3): 186–190. DOI: 10.1111/j.1467-9280.1992.tb00024.x.

15. Trendler G. Measurement theory, psychology and the revolution that cannot happen. *Theory & Psychology.* 2009; 19(5):579–599. DOI: 10.1177/0959354309341926.

16. Wickelmaier F, Schmid C. A Matlab function to estimate choice model parameters from paired-comparison data. *Behavior Research Methods, Instruments, and Computers Comput.* 2004;36(1):29–40. DOI: 10.3758/BF03195547.

17. Bell JL. Category theory and the foundations of mathematics. *British Journal for the Philosophy of Science.* 1981;32: 349–358. DOI: 10.1093/bjps/32.4.349.

18. Friedman AA. *Mir kak prostranstvo i vremya* [The world is like space and time]. Moscow: Nauka; 1965. 112 p. Russian.

19. Lubashevsky I. Psychophysical laws as reflection of mental space properties. *Physics of Life Reviews.* 2019;31:276–303. DOI: 10.1016/j.plrev.2018.10.003.

Статья поступила в редколлегию 10.02.2020.
Received by editorial board 10.02.2020.