ISSN 1609–9672

ИЗВЕСТИЯ
Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины

№ 6 (123)
Естественные науки

2020

Гомельский государственный университет
имени Ф. Скорины

ИЗВЕСТИЯ

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь
(свидетельство о регистрации
№ 546 от 06.07.2009 года)

Журнал включен ВАК Республики Беларусь
в перечень научных изданий Республики Беларусь,
в которых публикуются результаты
диссертационных исследований
(приказы № 207 от 13.12.2005, № 9 от 15.01.2010,
№ 57 от 16.05.2013)

Журнал включен в библиографические базы данных
ВИНИТИ и Научную электронную библиотеку
eLIBRARY.RU

АДРЕС РЕДАКЦИИ:
246019, Беларусь, Гомель, ул. Советская, 104,
Телефоны: +375 (232) 51-03-21
E-mail: vesti@gsu.by
Интернет-адрес: http://vesti.gsu.by

Francisk Scorina Gomel State University

PROCEEDINGS

The Journal is registered in the Ministry of Information of Republic of Belarus
(registration certificate
number 546 dated 06.07.2009)

The Journal is included in the Republic of Belarus Higher Attestation Commission list of scientific publications of the Republic of Belarus, which publish the main results for the degree of Doctor (Candidate) of Sciences
(order number 207 dated 13.12.2005, number 9 dated 15.01.2010, number 57 dated 16.05.2013)

The Journal is included in bibliographic databases of the All-Russia Institute of Scientific and
Technical Information (VINITI), Scientific electronic library eLIBRARY.RU

EDITORIAL OFFICE ADDRESS:
246019, Belarus, Gomel, Sovetskaya Str., 104,
Tel: +375 (232) 51-03-21
E-mail: vesti@gsu.by
Site: http://vesti.gsu.by

Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (123), 2020

УДК 519.85

Двухкритериальные задачи потокового программирования

Л.А. Пилипчук, А.С. Пилипчук, Е.Н. Полячок

Рассматривается три типа двухкритериальных задач: нахождение кратчайшего пути во множестве путей максимальной ширины, путей максимальной ширины среди множества кратчайших путей и задача о максимальном потоке минимальной стоимости. Построены специальные графы, необходимые для доказательства основных свойств исследуемых моделей. Приведены конструктивные доказательства теорем об оптимальных решениях задач с учетом двух критериев оптимизации. Построены структурные и алгоритмические решения двухкритериальных задач потокового программирования.
Ключевые слова: математическое программирование, двухкритериальная задача оптимизации, допустимое решение, кратчайший путь в множестве путей максимальной ширины, максимальной ширины путь в множестве кратчайших путей, максимальный поток минимальной стоимости.

Three types of two-criteria problems are considered: finding the shortest path in the set of paths of maximum width, the paths of maximum width among the set of shortest paths and the problem of the maximum flow of minimum cost. The special graphs are constructed that are necessary to prove the basic properties of the models under study. Constructive proofs of theorems on optimal solutions to problems are given taking into account two optimization criteria. Structural and algorithmic solutions of two-criteria flow programming problems are constructed.
Keywords: mathematical programming, two-criteria problem of optimization, feasible solution, shortest path of maximum width, path of maximum width in shortest paths set, maximum flow of minimum cost.

Введение. Двухкритериальные задачи потокового программирования представляют собой класс сетевых моделей, в которых разработка математического аппарата, алгоритмических, структурных и технологических решений выполняется с учетом двух критериев оптимизации. Конструктивная теория, алгоритмические, структурные и технологические решения экстремальных сетевых задач, основанные на концепциях симплекс-метода [1]–[3] и опорного метода [4], [5] с использованием сетевых реализаций основных операций, теоретико-графовых свойств опоры (базиса) в синтезе с современными достижениями в области теоретической информатики применяются для создания эффективных вычислительных методов в различных технических, экономических, информационных, экологических, транспортных и других системах. При исследовании и создании методов решения двухкритериальных сетевых задач применяется конструктивная теория, эффективные вычислительные методы, алгоритмы и технологии, разработанные для решения сетевых задач поиска кратчайших путей [6], максимального потока и потока минимальной стоимости [7]–[9].

1. Двухкритериальные задачи. Задан конечный ориентированный связный граф $G=(I,U)$ с множеством узлов I и множеством дуг U, $|I|<\infty$, $|U|<\infty$. Каждая дуга $(i,j)\in U$ характеризуется следующими параметрами: $x_{i,j}$ – величина дугового потока, $c_{i,j}$ – стоимость перемещения единицы дугового потока $x_{i,j}$ по дуге (i,j), $d_{i,j}$ – пропускная способность (ширина) дуги (i,j). Обозначим $x=\left(x_{i,j},(i,j)\in U\right)$ – вектор дуговых потоков. Определим соответственно ширину $d\left(L_{s,t}\right)$ и стоимость $c\left(L_{s,t}\right)$ пути $L_{s,t}$ из узла s в достижимый узел t следующим образом:

$$d\left(L_{s,t}\right)\overset{def}{=}\min\left\{d_{i,j},(i,j)\in L_{s,t}\right\},\ c\left(L_{s,t}\right)\overset{def}{=}\sum_{(i,j)\in L_{s,t}} c_{i,j}x_{i,j}\ .$$

Для графа G рассмотрим следующие задачи оптимизации по двум критериям:

Задача 1. Среди всех путей максимальной ширины из узла s в достижимый узел t графа G найти путь минимальной стоимости (кратчайший путь).

Задача 2. Среди всех путей минимальной стоимости (кратчайших путей) из узла s в достижимый узел t графа G найти путь максимальной ширины.

Задача 3. Найти максимальный поток минимальной стоимости из узла s в достижимый узел t графа G.

2. Кратчайший путь в множестве путей максимальной ширины. Рассмотрим *задачу 1* определения в графе G среди всех путей максимальной ширины из узла s в достижимый узел t кратчайшего пути.

Математическая модель задачи поиска кратчайшего пути в графе $G=\{I,U\}$ между двумя узлами s и t имеет следующий вид:

$$\sum_{(i,j)\in U} c_{i,j}x_{i,j} \to \min, \tag{1}$$

$$\sum_{j\in I_i^+(U)} x_{i,j} - \sum_{j\in I_i^-(U)} x_{j,i} = \begin{cases} 1, & i=s, \\ -1, & i=t, \\ 0, & i\in I\setminus\{s,t\}, \end{cases} \tag{2}$$

$$x_{i,j}\in\{0,1\}, (i,j)\in U. \tag{3}$$

где $I_i^+(U)=\{j\in I:(i,j)\in U\}$, $I_i^-(U)=\{j\in I:(j,i)\in U\}$.

Для создания метода решения *задачи 1* определения в графе G среди всех путей максимальной ширины кратчайшего пути применяются алгоритмические, структурные и технологические решения задачи (1)–(3) поиска кратчайшего пути из узла s в достижимый узел t графа G, представленные в [3], [5], [6].

Рассмотрим алгоритм формирования специальных графов, необходимых для доказательства основных свойств и создания конструктивной теории решения двухкритериальных задач потокового программирования 1–3.

1) Упорядочим дуги U графа $G=\{I,U\}$ по не возрастанию ширины $d_{i,j}, (i,j)\in U$.

2) Построим подмножества дуг $U^1,\ldots,U^k$ множества U таким образом, чтобы дуги любого множества U^i имели одинаковую ширину, $i=1,\ldots,k$, и если $(p,q)\in U^i$ и $(r,t)\in U^{i+1}$, то $d_{p,q}>d_{r,t}$, $i=1,\ldots,k-1$.

3). Для каждого $i=1,\ldots,k$ сформируем множества дуг $\tilde{U}^i$ следующим образом

$$\tilde{U}^i=\bigcup_{j=1}^{i} U^j, \quad где \quad i=1,\ldots,k. \tag{4}$$

Теорема 1. *Пусть* $L_{s,t}^p$ *– некоторый путь в графе* $G^p=\left(I,\tilde{U}^p\right)$ *из узла* s *в достижимый узел* t*, где* $p\in\{1,\ldots,h\}$. *Путь* $L_{s,t}^p$ *может быть не единственным в графе* $G^p=\left(I,\tilde{U}^p\right)$. *Если для ширины каждого пути* $L_{s,t}^1,\ldots,L_{s,t}^p$ *графа* $G^p=\left(I,\tilde{U}^p\right)$ *выполняются условия*

$$d\left(L_{s,t}^1\right)=d\left(L_{s,t}^2\right)=\ldots=d\left(L_{s,t}^p\right)>d\left(L_{s,t}^{p+1}\right) \tag{5}$$

то $\left\{L_{s,t}^1,\ldots,L_{s,t}^p\right\}$ – множество путей максимальной ширины из узла s в достижимый узел t в начальном графе $G=(I,U)$.

Доказательство. Строим графы $G^1=\left(I,\tilde{U}^1\right)$, $G^2=\left(I,\tilde{U}^2\right)$, ..., $G^p=\left(I,\tilde{U}^p\right)$ до тех пор, пока не построим некоторый граф $G^p=\left(I,\tilde{U}^p\right)$, для которого узел t достижим из узла s. Другими словами, пока не сформируем множество дуг $\tilde{U}^p$ графа $G^p=\left(I,\tilde{U}^p\right)$, в котором существует путь $L_{s,t}^p$ из узла s в узел t. По построению, путь $L_{s,t}^p$ в графе $G^p=\left(I,\tilde{U}^p\right)$ имеет максимальную ширину $d\left(L_{s,t}^p\right)$ и может быть не единственным. Все пути в графе $G^p=\left(I,\tilde{U}^p\right)$ из s в достижимый узел t имеют максимальную ширину, равную $d\left(L_{s,t}^p\right)$, и проходят только через те дуги, ширина которых не меньше ширины $d\left(L_{s,t}^p\right)$ самого широкого пути. Условия (5) определяют множество путей $\left\{L_{s,t}^1,\ldots,L_{s,t}^p\right\}$ максимальной ширины $d\left(L_{s,t}^p\right)$ из узла s в достижимый узел t в графе $G=(I,U)$. Следовательно, кратчайший путь $L_{s,t}^0$, построенный в графе $G^p=\left(I,\tilde{U}^p\right)$, имеет максимальную ширину и является кратчайшим путем максимальной ширины в начальном графе $G=(I,U)$. Теорема доказана.

Конструктивный метод построения множества путей $\left\{L_{s,t}^{1},\ldots,L_{s,t}^{p}\right\}$ максимальной ширины $d\left(L_{s,t}^{p}\right)$ из узла s в достижимый узел t в графе $G^{p}=\left(I,\tilde{U}^{p}\right)$ изложен при доказательстве теоремы 1.

Математическая модель задачи поиска кратчайшего пути $L_{s,t}^{0}$ из узла s в достижимый узел t графа $G^{p}=\left(I,\tilde{U}^{p}\right)$, который содержит множество путей максимальной ширины $d\left(L_{s,t}^{p}\right)$, имеет следующий вид:

$$\sum_{(i,j)\in\tilde{U}^{p}} c_{i,j}x_{i,j}\to\min, \tag{6}$$

$$\sum_{j\in I_i^{+}\left(\tilde{U}^{p}\right)} x_{i,j}-\sum_{j\in I_i^{-}\left(\tilde{U}^{p}\right)} x_{j,i}=\begin{cases}1, & i=s,\\ -1, & i=t,\\ 0, & i\in I\setminus\{s,t\},\end{cases} \tag{7}$$

$$x_{i,j}\in\{0,1\},(i,j)\in\tilde{U}^{p}. \tag{8}$$

где $I_i^{+}\left(\tilde{U}^{p}\right)=\left\{j\in I:(i,j)\in\tilde{U}^{p}\right\}$, $I_i^{-}\left(\tilde{U}^{p}\right)=\left\{j\in I:(j,i)\in\tilde{U}^{p}\right\}$.

Приведем алгоритм поиска в графе G среди всех путей максимальной ширины из узла s в достижимый узел t пути минимальной стоимости (кратчайшего пути).

1) Полагаем $i=1$.

2) Проверяем, достижим ли узел t из узла s в графе $G^{i}=\left(I,\tilde{U}^{i}\right)$.

3) Если узел t недостижим из узла s в графе $G^{i}=\left(I,\tilde{U}^{i}\right)$, то полагаем $i=i+1$. Переходим к шагу 2.

4) Узел t достижим из узла s в графе $G^{i}=\left(I,\tilde{U}^{i}\right)$. Полагаем $p=i$. Завершаем процесс построения графов. Переходим к шагу 5.

5) Для графа $G^{p}=\left(I,\tilde{U}^{p}\right)$ решаем задачу (1)–(3) поиска кратчайшего пути из узла s в достижимый узел t. Кратчайший путь $L_{s,t}^{0}$, построенный в графе $G^{p}=\left(I,\tilde{U}^{p}\right)$, имеет ширину $d\left(L_{s,t}^{0}\right)=min\left\{d_{i,j},(i,j)\in L_{s,t}^{0}\right\}$ и является кратчайшим путем максимальной ширины $d\left(L_{s,t}^{0}\right)$ в начальном графе $G=(I,U)$.

3. Путь максимальной ширины среди множества кратчайших путей. Рассмотрим *задачу 2* определения среди всех путей минимальной стоимости (кратчайших путей) из узла s в достижимый узел t графа G пути максимальной ширины. Упорядочим множество дуг U графа G по не возрастанию ширины $d_{i,j},(i,j)\in U$. Построим множества дуг $\tilde{U}^{i}$ согласно (4): $\tilde{U}^{i}=\bigcup_{j=1}^{i}U^{j}$, $i=1,\ldots,k$, где дуги каждого подмножества $U^{1},\ldots,U^{k}$ множества U имеют одинаковую ширину, и, если $(p,q)\in U^{i}$ и $(r,t)\in U^{i+1}$, то $d_{p,q}>d_{r,t}$, $i=1,\ldots,k-1$.

Теорема 2. *Пусть* $L_{s,t}^{i}$ *– кратчайший путь в графе* $G^{i}=\left(I,\tilde{U}^{i}\right)$ *из узла* s *в достижимый узел* t*, где дуги множества* $\tilde{U}^{i}$ *сформированы согласно* $(4), i\in\{1,\ldots,k\}$. *Если выполняются условия*

$$c\left(L_{s,t}^{k}\right)=c\left(L_{s,t}^{k-1}\right)=\ldots=c\left(L_{s,t}^{l}\right)<c\left(L_{s,t}^{l-1}\right), \tag{9}$$

то путь $L_{s,t}^{l}$ *имеет наибольшую ширину среди всех кратчайших путей из узла* s *в достижимый узел* t *в графе* $G=(I,U)$.

Доказательство. Поскольку $\tilde{U}^{k}=U$, то $c\left(L_{s,t}^{k}\right)$ – стоимость кратчайшего пути из узла s в достижимый узел t в начальном графе $G=(I,U)$. Из (9) следует, что при выполнении равенств $c\left(L_{s,t}^{k}\right)=c\left(L_{s,t}^{k-1}\right)=\ldots=c\left(L_{s,t}^{l}\right)$ удаление дуг соответственно из графов $G^{k}=G$, G^{k-1}, …, G^{l} с меньшей шириной не повлияет на стоимости кратчайших путей из узла s в достижимый узел t в полученных графах. При удалении дуг из графа $G^l = \left(I, \tilde{U}^l\right)$ с меньшей шириной увеличивается стоимость $c\left(L_{s,t}^{l-1}\right)$ кратчайшего пути в исходном графе G. Теорема доказана.

Алгоритм решения *задачи 2* нахождения среди всех путей минимальной стоимости (кратчайших путей) из узла s в достижимый узел t графа G пути максимальной ширины.

1) Положим $i = k$.

2) Для начального графа $G = \left(I, U\right), U = \tilde{U}^i$ решаем задачу (1)–(3) поиска кратчайшего пути из узла s в достижимый узел t.

3) $i = i - 1$.

4) Для графа $G^i = \left(I, \tilde{U}^i\right)$ решаем задачу (1)–(3) поиска кратчайшего пути из узла s в достижимый узел t.

5) Если $c\left(L_{s,t}^{i}\right) = c\left(L_{s,t}^{i-1}\right)$, то переходим к шагу 3.

6) $i = l$. Выполняется условие (9) теоремы 2: $c\left(L_{s,t}^{l}\right) < c\left(L_{s,t}^{l-1}\right)$. Кратчайший путь $L_{s,t}^{l}$ из узла s в достижимый узел t в графе $G^l = \left(I, \tilde{U}^l\right)$ имеет минимальную стоимость $c\left(L_{s,t}^{l}\right)$ среди всех путей из узла s в достижимый узел t в исходном графе G и максимальную ширину $d\left(L_{s,t}^{l}\right) = min\left\{d_{i,j}, (i,j) \in L_{s,t}^{l}\right\}$.

4. Максимальный поток минимальной стоимости. Рассмотрим *задачу 3* определения максимального потока минимальной стоимости.

Задан орграф (сеть) $G = \left(I, U\right)$. Каждая дуга $(i, j) \in U$ имеет следующие характеристики: $x_{i,j}$ – величина дугового потока дуги (i, j), $c_{i,j}$ – стоимость перемещения единицы дугового потока $x_{i,j}$ по дуге (i, j), $d_{i,j}$ – пропускная способность дуги (i, j) (максимальная величина дугового потока дуги (i, j)). Нижняя граница дугового потока каждой дуги $(i, j) \in U$ равна 0. Обозначим $x = \left(x_{i,j}, (i, j) \in U\right)$ – вектор дуговых потоков. В сети G выделены два узла: s (не содержит входящих дуг) и t (не содержит исходящих дуг). Сумма дуговых потоков по дугам, исходящим из узла s, равна суммарному потоку по входящим в узел t дугам. Величина потока v – суммарный поток по дугам, исходящим из узла s. Узел s – источник, создает поток, узел t – сток, поглощает поток.

Математическая модель задачи определения *максимального потока* v в сети $G = \left\{I, U\right\}$ имеет следующий вид:

$$v \to \max, \tag{10}$$

$$\sum_{j \in I_i^+(U)} x_{i,j} - \sum_{j \in I_i^-(U)} x_{j,i} = \begin{cases} v, & i = s, \\ -v & i = t, \\ 0, & i \in I \setminus \left\{s, t\right\} \end{cases} \tag{11}$$

$$0 \le x_{i,j} \le d_{i,j}, (i, j) \in U, \tag{12}$$

где $I_i^+\left(U\right) = \left\{j \in I : (i, j) \in U\right\}$, $I_i^-\left(U\right) = \left\{j \in I : (j, i) \in U\right\}$.

Матрица системы (11) – абсолютно унимодулярна, что гарантирует целочисленность оптимального решения $\left\{x, v\right\}$.

Задача (10)–(12) определения максимального потока v в сети $G = \left\{I, U\right\}$ является частным случаем экстремальной задачи математического программирования вида

$$\sum_{(i,j) \in U} c_{i,j} x_{i,j} + \sum_{i \in I^*} c_i x_i \to \min, \tag{13}$$

$$\sum_{j \in I_i^+(U)} x_{i,j} - \sum_{j \in I_i^-(U)} x_{j,i} = \begin{cases} x_i, & i \in I^*, \\ a_i, & i \in I \setminus I^*, \end{cases} \tag{14}$$

$$\begin{gathered} 0 \le x_{i,j} \le d_{i,j}, (i,j) \in U, \\ b_{*i} \le x_i \le b_i^*, i \in I^*, \end{gathered} \tag{15}$$

при следующих предположениях:

$$\begin{gathered} I^* = \{s,t\} \subseteq I, c_{i,j} = 0, (i,j) \in U; c_s = -1, c_t = 0; \\ x_s = v, x_t = -v; a_i = 0, \ i \in I \setminus I^*. \end{gathered} \tag{16}$$

Конструктивная теория решения разреженных систем линейных алгебраических уравнений (14) с дополнительными ограничениями на дуговые потоки $x_{ij}, (i,j) \in U$ и переменные $x_i, i \in I^*$, основанная на принципах декомпозиции, впервые была опубликована в [7]. В работах [8], [9] представлены структурные и алгоритмические решения экстремальной задачи (13)–(15), получены аналитические решения системы (14) и применены в прикладных исследованиях интеллектуальных транспортных систем [10], [11].

Начальный опорный поток [7], [8] $\{(x;v), R\}$ задачи (13)–(15) при введенных предположениях (16) состоит из допустимого решения $(x;v)$, $x = (x_{ij}, (i,j) \in U)$ – выполняются ограничения (14)–(15) и опоры $R = \{U_R, I_R^*\}$ сети G для системы (14), $U_R \subset U$, $I_R^* \subseteq \{s,t\}$. Опора R состоит из леса не более чем двух деревьев T^s, T^t, который покрывает все узлы сети G, при этом, для каждого дерева леса выполняются условия: $\left| I_R^* \cap I(T^s) \right| = 1$, $\left| I_R^* \cap I(T^t) \right| = 1$.

С учетом (16) начальное допустимое решение (x,v) экстремальной задачи (13)–(15) сформируем следующим образом. В сети $G = (I,U)$ построим произвольный путь $L_{s,t}$ из узла s в достижимый узел t. Дуговые потоки дуг пути $L_{s,t}$ положим равными величине пропускной способности $d(L_{s,t})$ пути $L_{s,t}$:

$$d(L_{s,t}) = min\{d_{i,j}, (i,j) \in L_{s,t}\}.$$

Дуговые потоки по остальным дугам сети положим равными нулю: $x_{i,j} = 0$, $(i,j) \in U \setminus L_{s,t}$. Для начального допустимого решения $(x;v)$ экстремальной задачи (13)–(15) величина v начального потока в сети G равна

$$v = \sum_{j \in I_s^+(U)} x_{s,j} = d(L_{s,t})$$

В результате применения конструктивной теория декомпозиции, вычислительных методов, алгоритмических, структурных и технологических решений [5], [8], [9] экстремальной задачи (13)–(15) находим оптимальное решение (x^0, v^0):

$$b = \sum_{j \in I_s^+(U)} x_{s,j}^0 \quad x^0 = (x_{i,j}^0, (i,j) \in U), \tag{17}$$

где $v^0 = b$ – величина *максимального потока* в сети $G = (I,U)$.

Пусть известно численное значение b величины *максимального потока* в сети G. Математическая модель задачи нахождения *потока минимальной стоимости максимальной величины* b в сети $G = (I,U)$ имеет следующий вид:

$$f(x) = \sum_{(i,j) \in U} c_{i,j} x_{i,j} \to \min, \tag{18}$$

$$\sum_{j \in I_i^+(U)} x_{i,j} - \sum_{j \in I_i^-(U)} x_{j,i} = \begin{cases} b, & i = s, \\ -b & i = t, \\ 0, & i \in I \setminus \{s,t\}, \end{cases} \tag{19}$$

$$0 \le x_{i,j} \le d_{i,j}, (i,j) \in U, \tag{20}$$

где $\{s,t\} \subset I$, $x_{i,j}$ – дуговой поток дуги (i,j), $c_{i,j}$ – стоимость перемещения единицы дугового потока $x_{i,j}$ по дуге (i,j), $d_{i,j}$ – пропускная способность дуги (i,j) (максимальная величина дугового потока дуги (i,j)). Нижняя граница дугового потока каждой дуги $(i,j) \in U$ равна нулю, $x = (x_{i,j}, (i,j) \in U)$ – вектор дуговых потоков, b – *численное значение величины максимального потока* в сети G.

Вектор $x = (x_{i,j}, (i,j) \in U)$ – допустимое решение экстремальной задачи (18)–(20), если выполняются ограничения (19)–(20).

Замечание. Вектор $x^0 = (x_{ij}^0, (i,j) \in U)$ оптимального решения $(x^0, v^0 = b)$ экстремальной задачи (13)–(15) является начальным допустимым решением задачи (18)–(20), где $v^0 = b$ – величина численного значения максимального потока в сети $G = (I,U)$.

Максимальный поток величины b, определенный согласно (17), стоимость (18) которого минимальна, называется *максимальным потоком минимальной стоимости*.

Начальный опорный поток $\{x, U_D\}$ задачи (18)–(20) состоит из допустимого решения x и опоры $U_D \subset U$ сети $G = (I,U)$ для системы (19), где U_D – покрывающее дерево графа G (включает все узлы множества I) [5].

Теорема 3. *Пусть $(x^0, v^0 = b)$ – оптимальное решение задачи (13)–(15), где $v^0 = b$ – численное значение (17) максимального потока в сети G. Если для любого допустимого решения $x = (x_{i,j}, (i,j) \in U)$ задачи (18)–(20) условия сохранения потока (19) для узлов $\{s,t\} \subset I$ выполняются для величины максимального потока b и для узлов $I \setminus \{s,t\}$ равны нулю, то оптимальное решение $\tilde{x}^0 = (\tilde{x}_{i,j}^0, (i,j) \in U)$ экстремальной задачи (18)–(20) является потоком минимальной стоимости $f(\tilde{x}^0)$ для максимального потока $v^0 = b$:*

$$f(\tilde{x}^0) = \sum_{(i,j)\in U} c_{i,j} \tilde{x}_{i,j}^0 \qquad b = \sum_{j \in I_s^+(U)} \tilde{x}_{s,j}^0 .$$

Доказательство. Вектор $x = x^0$ оптимального решения $\{x^0, v^0 = b\}$ задачи (13)–(15) является начальным допустимым решением задачи (18)–(20). На итерации $\{x, U_D\} \to \{\bar{x}, \bar{U}_D\}$ опорного метода [5] решения задачи (18)–(20) при переходе к новому допустимому решению $\bar{x} = x + \Delta x$, $\bar{x} = (\bar{x}_{i,j}, (i,j) \in U)$, $\Delta x = (\Delta x_{i,j}, (i,j) \in U)$ и новому покрывающему дереву $\bar{U}_D$ величина максимального потока в сети G вычисляется согласно $\sum_{j \in I_s^+(U)} \bar{x}_{s,j}$. Из условий сохранения потока (19) следует $\sum_{j \in I_s^+(U)} \bar{x}_{s,j} = b$, где $v^0 = b$ – численное значение величины максимального потока (17) в сети G. Следовательно, оптимальное решение $\tilde{x}^0 = (\tilde{x}_{i,j}^0, (i,j) \in U)$ экстремальной задачи (18)–(20) является потоком минимальной стоимости $f(\tilde{x}^0) = \sum_{(i,j)\in U} c_{i,j} \tilde{x}_{i,j}^0$ для максимального потока $\sum_{j \in I_s^+(U)} \tilde{x}_{s,j}^0$ в сети $G = (I,U)$. Теорема доказана.

Приведем алгоритм построения в сети $G = (I,U)$ *максимального потока минимальной стоимости*.

1) Положим $I^* = \{s,t\}$, $c_s = -1$, $c_t = 0$; $x_s = v, x_t = -v$; $a_i = 0,\ i \in I \setminus I^*$; $c_{i,j} = 0, (i,j) \in U$.

2) Построим начальное допустимое решения (x,v) экстремальной задачи (13)–(15) следующим образом:

а) определим произвольный путь $L_{s,t}$ из узла s в достижимый узел t;

б) дуговые потоки дуг пути $L_{s,t}$ положим равными величине пропускной способности $d(L_{s,t})$ пути $L_{s,t}$, где $d(L_{s,t}) = min\{d_{i,j}, (i,j) \in L_{s,t}\}$;

в) положим $x_{i,j} = 0, (i,j) \in U \setminus L_{s,t}$.

3) Положим $v = \sum_{j \in I_s^+(U)} x_{s,j} = d(L_{s,t})$ где v – величина начального потока в сети G.

4) Решаем задачу (13)–(15) поиска оптимального решения $\left(x^0, v^0 = b\right)$, где $v^0 = b$ – численное значение (17) максимального потока в сети G, x^0 – вектор дуговых потоков оптимального решения.

5) Выберем вектор $x^0 = \left(x^0_{ij}, (i, j) \in U\right)$ оптимального решения $\left(x^0, v^0 = b\right)$ экстремальной задачи (13)–(15) в качестве начального допустимого решения задачи (18)–(20);

6) Сформируем правую часть системы сохранения потока (19), где $v^0 = b$ – величина численного значения максимального потока в сети $G = \left(I, U\right)$.

7) Находим оптимальное решение $\tilde{x}^0 = \left(\tilde{x}^0_{i,j}, (i, j) \in U\right)$ задачи (18)–(20). Построен максимальный поток $\sum_{j \in I^+_s(U)} \tilde{x}^0_{s,j} = b$ минимальной стоимости $f\left(\tilde{x}^0\right) = \sum_{(i,j) \in U} c_{i,j} \tilde{x}^0_{i,j}$.

С применением результатов теоретической информатики [2], [3], теоретико-графовых и технологических аспектов структурных преобразований базисов и фундаментальной системы циклов [5] разработаны алгоритмические, структурные и технологические решения задачи построения максимального потока минимальной стоимости.

Заключение. В ориентированных графах исследованы модели и построены методы решения экстремальных задач с учетом двух критериев оптимизации. Для двухкритериальных задач потокового программирования доказаны теоремы об оптимальных решениях, разработаны конструктивная теория и алгоритмы нахождения кратчайшего пути во множестве путей максимальной ширины, пути максимальной ширины среди множества кратчайших путей и решена задача построения максимального потока минимальной стоимости. Структурные и алгоритмические решения двухкритериальных задач могут быть применены в прикладных исследованиях интеллектуальных транспортных систем.

Литература

1. Maros, I. Computational techniques of the simplex method / I. Maros. – Boston, 2003. – 325 p.
2. Йенсен, П. Потоковое программирование / П. Йенсен, Д. Барнес. – М. : Радио и связь, 1984. – 392 с.
3. Ahuja, R. K. Network Flows: theory, algorithms, and applications / R. K. Ahuja, T. L. Magnanti, J. B. Orlin. – New Jersey : Prentice Hall, 1993. – 864 p.
4. Габасов, Р. Методы линейного программирования : в 3 ч. / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова. – Минск : БГУ, 1980. – Ч. 3 : Специальные задачи. – 368 с.
5. Пилипчук, Л. А. Линейные неоднородные задачи потокового программирования / Л. А. Пилипчук. – Минск : БГУ, 2009. – 222 с.
6. Пилипчук, Л. А. Оптимальные пути: алгоритмические, структурные и технологические решения / Л. А. Пилипчук, А. С. Пилипчук, Е. Н. Полячок // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Сер. 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2020. – Т. 10, № 3. – С. 143−151.
7. Pilipchuk, L. A. Algorithms of solving large sparse underdetermined linear systems with embedded network structure / L. A. Pilipchuk, Y. V. Malakhouskaya, D. R. Kincaid, M. Lai // East-West J. of Mathematics. – 2002. – Vol. 4, № 2. – P. 191–201.
8. Pilipchuk, L. A. Sparse linear systems and their applications / L. A. Pilipchuk. – Minsk, 2013. – 235 p.
9. Pilipchuk, L. The general solutions of sparse systems with rectangular matrices in the problem of sensors optimal location in the nodes of a generalized graph / L. Pilipchuk, O. German, A. Pilipchuk // Vestnik BGU. Ser. 1. Fiz. Mat. Inform. – 2015. – № 2. – P. 91–96.
10. Пилипчук, Л. А. Идентификация сенсорной конфигурации и управление потоками / Л. А. Пилипчук [и др.] // Журнал Белорусского государственного университета. Сер. Математика. Информатика. – 2018. – № 2. – С. 67–76.
11. Pilipchuk, A. Sensor location problem's software optimization / A. Pilipchuk, L. Pilipchuk, E. Polyachok // Open Semantic Technologies for Intelligent System. – Minsk : Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, 2019. – Issue 3. – P. 261–264.

Белорусский государственный университет

Поступила в редакцию 12.06.2020