

Белорусский государственный университет

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе и
образовательным инновациям

О.Н. Здрок

« 30 » марта 2020 г.

Регистрационный № УД- 8978/уч.

ТЕОРИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУПП

Учебная программа учреждения высшего образования
по учебной дисциплине для специальности

1-31 80 03 Математика и компьютерные науки
профилизация Математика

2020 г.

Учебная программа составлена на основе образовательного стандарта ОСВО 1-31 80 03-2019 и учебных планов: G31з-018/уч., G31-017/уч. от 11.04.2019.

СОСТАВИТЕЛИ:

Беняш-Кривец Валерий Вацлавович – заведующий кафедрой высшей алгебры и защиты информации механико-математического факультета Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор.

РЕЦЕНЗЕНТ:

И.О. Говорушко, научный сотрудник отдела алгебры Института математики Национальной Академии Наук Республики Беларуси, кандидат физико-математических наук.

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой высшей алгебры и защиты информации Белорусского государственного университета (протокол № 11 от 25.05.2020);

Научно-методическим советом Белорусского государственного университета (протокол № 5 от 17.06.2020).

Зав. кафедрой высшей алгебры
и защиты информации, профессор

В.В. Беняш-Кривец

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Цели и задачи учебной дисциплины

В современной теории групп наряду с абстрактными теоретико-групповыми методами исследования широко и плодотворно используются методы теории представлений. Кроме того, теория представлений широко используется в квантовой механике, кристаллографии и других областях физики. Дисциплина «Теория представлений групп» имеет цель расширения, систематизации и закрепления у магистрантов знаний, методов и приемов их использования, связанных с теорией представлений групп, повышение уровня профессиональной компетентности студентов, формирование понятия о возможностях одного из разделов современной алгебры.

Образовательная цель: изучить основные понятия и алгоритмы теории представлений, теорию представлений конечных групп над алгебраически замкнутыми полями, а также важнейшие классические результаты теории представлений, изложить некоторые нетривиальные конструкции и технику, используемые работающими специалистами.

Развивающая цель: формирование у студентов алгоритмического мышления и общей математической культуры, привитие студентам умения самостоятельно изучать учебную и научную литературу в области математики.

Основные задачи, решаемые в рамках изучения дисциплины «Теория групп и полей»:

- ознакомить студентов с фундаментальными понятиями и методами теории представлений групп;
- изучить теорию представлений конечных групп над полями нулевой характеристики;
- познакомиться с основами геометрической теории представлений конечно порожденных групп;
- развить у студентов аналитическое мышление и общую математическую культуру;
- привить студентам умение самостоятельно изучать учебную и научную литературу в области математики.

В результате изучения учебной дисциплины студент магистратуры должен:

знать:

- основные понятия и результаты теории представлений групп;
- методы доказательств важнейших результатов, изучаемых в рамках

учебной дисциплины «Теория представлений групп»;

– алгоритмы решения ряда задач, связанных с представлениями групп;

уметь:

– доказывать основные теоремы о представлениях групп;

– использовать основные результаты теории представлений групп в практической деятельности;

– строить представления заданных конечных групп;

– применять соотношения ортогональности для характеров в решении практических задач;

– **владеть:**

– основными навыками решения задач по теории представлений групп;

– методами доказательств основных теорем, встречающихся в курсе «Теория представлений групп»;

– навыками самообразования и способами использования аппарата теории представлений групп для проведения математических и междисциплинарных исследований.

Место учебной дисциплины в системе подготовки специалиста с высшим образованием (магистра).

Учебная дисциплина относится к модулю «Алгебра и геометрия», компонент учреждения высшего образования.

Связи с другими учебными дисциплинами, включая учебные дисциплины компонента учреждения высшего образования, дисциплины специализации и др. Наиболее тесной является связь данной дисциплины с такими дисциплинами как «Теория групп и полей», «Коммутативная алгебра и алгебраическая геометрия». Данная дисциплина опирается и использует изученные ранее сведения из дисциплин «Алгебра и теория чисел», «Дополнительные главы алгебры».

Требования к компетенциям специалиста

Освоение учебной дисциплины «Теория представлений групп» должно обеспечить формирование следующих **специализированных компетенций:**

СК-6. Быть способным применять актуальные методы геометрии и алгебры в математических моделях.

Структура учебной дисциплины.

Дисциплина изучается в 3 семестре. Всего на изучение учебной дисциплины «Теория представлений групп» отведено 108 часов, в том числе:

- для очной формы получения высшего образования – 36 аудиторных часов, из них: лекции – 18 часов, лабораторные занятия – 18 часов;

- для заочной формы получения высшего образования – 8 аудиторных часов, из них: лекции – 4 часа, лабораторные занятия – 4 часа.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 3 зачетные единицы.
Форма текущей аттестации по учебной дисциплине – зачет.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Тема 1. Общие сведения о линейных и матричных представлениях.

Определение линейных и матричных представлений, примеры. Инвариантные подпространства. Подпредставления и факторпредставления. Неприводимые, приводимые и вполне приводимые представления. Теорема Машке.

Тема 2. Основные операции над представлениями.

Сумма, произведение, тензорное произведение представлений. Сопряженное представление. Расширение основного поля.

Тема 3. Свойства неприводимых представлений.

Морфизмы представлений. Лемма Шура и следствия из нее. Неприводимые представления абелевых групп. Пространства матричных элементов.

Тема 4. Теория характеров.

Характеры представлений, их свойства. Соотношения ортогональности. Разложение регулярного представления. Число неприводимых представлений. Соотношение для степеней неприводимых представлений. Каноническое разложение представления.

Тема 5. Представления некоторых классов групп.

Представления циклических групп и групп диэдра. Представления абелевых групп.

Тема 6. Степени неприводимых представлений.

Групповые алгебры. Целые элементы колец. Свойство целозначности характеров. Степени неприводимых представлений.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Дневная форма получения образования

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов УСР	Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное		
1.	Общие сведения о линейных и матричных представлениях.	4			4			Отчет по лабораторной работе с устной защитой.
2.	Основные операции над представлениями.	4			4			Отчет по самостоятельной работе с устной защитой
3.	Свойства неприводимых представлений.	2			2			Отчет по лабораторной работе с устной защитой.
4.	Теория характеров.	4			4			Экспресс-опрос
5.	Представления некоторых классов групп.	2			2			Устный опрос
6.	Степени неприводимых представлений.	2			2			Отчет по лабораторной работе с устной защитой.
	Итого	18			18			

Заочная форма получения образования

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов УСР	Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное		
1.	Общие сведения о линейных и матричных представлениях.	1			1			Отчет по лабораторной работе с устной защитой.
2.	Основные операции над представлениями.	1						Экспресс-опрос
3.	Свойства неприводимых представлений.	1			1			Собеседование
4.	Теория характеров.	1						Экспресс-опрос
5.	Представления некоторых классов групп.				1			Отчет по лабораторной работе с устной защитой.
6.	Степени неприводимых представлений.				1			Экспресс-опрос
	Итого	4			4			

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ
Перечень основной литературы

1. P. Webb. A Course in Finite Group Representation Theory. Cambridge University Press, 2016.
2. Винберг Э.Б. Линейные представления групп. М.: Наука, 1985.
3. Серр Ж.-П. Линейные представления конечных групп. М.: Мир, 1970.
4. Белоногов В.А., Фомин А.Н. Матричные представления в теории конечных групп. М.: Наука, 1976.

Перечень дополнительной литературы

1. Кэртис Ч., Райнер И. Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. М.: Наука, 1969.

Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой оценки

Формой текущей аттестации по дисциплине «Теория представлений групп» учебным планом предусмотрен зачет.

Контроль работы магистранта проходит в форме собеседования, выполнения самостоятельных работ и практических упражнений в аудитории, а также самостоятельной работы вне аудитории с предоставлением отчета с его устной защитой. Задания к самостоятельным работам составляются согласно содержанию учебного материала.

Зачет по дисциплине выставляется в случае сдачи всех лабораторных работ.

Итоговая оценка формируется на основе 3-х документов:

1. Правила проведения аттестации студентов, курсантов, слушателей при освоении содержания образовательных программ высшего образования (Постановление Министерства образования Республики Беларусь №53 от 29.05.2012 г.).

2. ПОЛОЖЕНИЕ о рейтинговой системе оценки знаний студентов по дисциплине в Белорусском государственном университете (Приказ ректора БГУ-№ 189-ОД от 31.03.2020).

3. Критерии оценки знаний и компетенций студентов по 10-балльной шкале (Письмо Министерства образования Республики Беларусь от 22.12.2003 г. № 21-04-1/105).

Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины (эвристический, проектный, практико-ориентированный)

При организации образовательного процесса используется **эвристический подход**, который предполагает:

- осуществление студентами лично-значимых открытий окружающего мира;
- демонстрацию многообразия решений большинства профессиональных задач и жизненных проблем;
- творческую самореализацию обучающихся в процессе создания образовательных продуктов;
- индивидуализацию обучения через возможность самостоятельно ставить цели, осуществлять рефлексию собственной образовательной деятельности.

При организации образовательного процесса используется **практико-ориентированный подход**, который предполагает:

- освоение содержания образования через решения практических задач;
- приобретение навыков эффективного выполнения разных видов профессиональной деятельности;
- ориентацию на генерирование идей, реализацию групповых студенческих проектов, развитие предпринимательской культуры;
- использованию процедур, способов оценивания, фиксирующих сформированность профессиональных компетенций.

При организации образовательного процесса **используется метод проектного обучения**, который предполагает:

- способ организации учебной деятельности студентов, развивающий актуальные для учебной и профессиональной деятельности навыки планирования, самоорганизации, сотрудничества и предполагающий создание собственного продукта;
- приобретение навыков для решения исследовательских, творческих, социальных, предпринимательских и коммуникационных задач.

Методические рекомендации по организации и выполнению самостоятельной работы студентов

Самостоятельная работа студентов - это любая деятельность, связанная с воспитанием мышления будущего профессионала. В широком смысле под самостоятельной работой следует понимать совокупность всей самостоятельной деятельности студентов как в учебной аудитории, так и вне её, в контакте с преподавателем и в его отсутствии.

Самостоятельная работа реализуется:

1. Непосредственно в процессе аудиторных занятий - на лекциях.

2. В контакте с преподавателем вне рамок расписания - на консультациях по учебным вопросам, в ходе творческих контактов, при ликвидации задолженностей, при выполнении индивидуальных заданий и т.д.

3. В библиотеке, дома, в общежитии, на кафедре при выполнении студентом учебных и творческих задач.

При изучении дисциплины организация самостоятельной работы студентов должна представлять единство трех взаимосвязанных форм:

1. Внеаудиторная самостоятельная работа;
2. Аудиторная самостоятельная работа, которая осуществляется под непосредственным руководством преподавателя;
3. Творческая, в том числе научно-исследовательская работа.

ПРИМЕРНЫЙ ПЕРЕЧЕНЬ ЗАДАНИЙ

для самостоятельной работы обучающихся

1. Пусть G – неабелева группа. Докажите, что тогда любое двумерное точное представление группы G неприводимо.
2. Пусть группа G имеет точное неприводимое представление. Докажите, что тогда центр группы G – циклическая группа.
3. Определим представление ρ группы \mathbb{Z} в пространстве \mathbb{C}^2 по формуле $\rho(k) = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ для всех $k \in \mathbb{Z}$. Докажите, что тогда ρ содержит единственное нетривиальное подпредставление.
4. Пусть ρ – n -мерное представление группы G . Докажите, что тогда ρ содержит одномерное и $(n-1)$ -мерное подпредставления.
5. Пусть $S_3 : V = \mathbb{C}^{\otimes 3}$ – представление, задающееся перестановкой базисных векторов. Разложите представление $V^{\otimes n}$ на неприводимые.
6. Пусть $S_5 : V = \mathbb{C}^{\otimes 5}$ – представление, задающееся перестановкой базисных векторов, $W \subset V$ – неприводимое $(n-1)$ -мерное представление. Верно ли, что $S^2(W)$ неприводимо.
7. Может ли у группы быть ровно пять одномерных и два двумерных неприводимых представления?
8. Предположим, что все комплексные представления группы G одномерны. Верно ли, что G абелева?
9. Пусть G – конечная группа и ρ – представление этой группы. Докажите, что если для элемента $g \in G$ справедливо $g^2 = e$, то $\chi_\rho(g)$ – целое число.
10. Пусть G – конечная группа и ρ – представление этой группы. Докажите, что $|\chi_\rho(g)| = \chi_\rho(1) \Leftrightarrow \rho(g)$ – скалярный оператор.
11. Докажите, что $\text{Ker } \rho = \{g \in G \mid \chi_\rho(g) = \chi_\rho(1)\}$.

12. Пусть ρ – неприводимое представление группы G , а z – элемент центра этой группы, причем $z^m = 1$. Докажите, что тогда существует $\lambda \in \mathbb{C}, \lambda^m = 1$, такое, что $\chi_\rho(zg) = \lambda \chi_\rho(g)$.
13. Найти одномерные представление группы S_4 . Напомним, что эта группа порождается элементами S, T , для которых выполняются соотношения $S^4 = T^2 = (ST)^3 = 1$.
14. Найти одномерные представление группы A_4 . Напомним, что эта группа порождается элементами S, R , для которых выполняются соотношения $S^3 = R^2 = (SR)^3 = 1$.
15. Найти одномерные представление группы A_5 . Напомним, что эта группа порождается элементами S, R , для которых выполняются соотношения $S^3 = R^2 = (RS)^5 = 1$.
16. Найти одномерные представление группы Q_8 . Напомним, что эта группа порождается элементами a, b , для которых выполняются соотношения $a^4 = 1, b^2 = a^2, bab^{-1} = a^3$.
17. Найти одномерные представления циклической группы порядка n .
18. Найти одномерные представления бесконечной циклической группы.
19. Как выражаются одномерные представления группы $G_1 \times G_2$ через одномерные представления G_1 и G_2 ?
20. Докажите, что представление конечной группы изоморфно своему сопряженному тогда и только тогда, когда все значения его характера вещественны.

Примерный перечень вопросов к зачету по дисциплине

«Теория представлений групп»

1. Определение линейных и матричных представлений групп, связь между ними. Примеры.
2. Инвариантные подпространства. Сумма и пересечение инвариантных подпространств. Подпредставление. Факторпредставление. Матричный вид представления при наличии инвариантного подпространства.
3. Неприводимые представления, примеры. Вполне приводимые представления. Матричная реализация вполне приводимого представления. Теорема о подпредставлении вполне приводимого представления.
4. Теоремы о разложении пространства вполне приводимого представления.
5. Теорема о единственности разложения представления в сумму неприводимых представлений.
6. Теорема Машке.
7. Операции над представлениями: подпредставление, факторпредставление, сумма представлений, сопряженное представление.

8. Произведение представлений, композиция представления и гомоморфизма, поднятие и факторизация представлений. Одномерные линейные представления.
9. Тензорное произведение представлений двух групп. Расширение поля. Комплексификация. Теорема об изоморфных представлениях.
10. Теорема о комплексификации неприводимого вещественного представления.
11. Характеры представлений и их свойства. Центральные функции на группе.
12. Лемма Шура и следствия из нее.
13. Скалярное произведение функций на группе. Первое соотношение ортогональности для характеров и следствия из него.
14. Второе соотношение ортогональности для характеров.
15. Теорема о разложении регулярного представления и следствие о соотношении между степенями неприводимых представлений.
16. Теорема о базисе пространства центральных функций на группе и следствие о числе неприводимых представлений.
17. Представления абелевых групп.
18. Представления группы диэдра.

**ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ
ПО ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ
С ДРУГИМИ ДИСЦИПЛИНАМИ СПЕЦИАЛЬНОСТИ**

Название дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы по изучаемой учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
Теория групп и полей	Высшей алгебры и защиты информации	нет	Изменения не требуются (протокол № 11 от 25.05.2020)

**ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ
ПО ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ**

на ____ / ____ учебный год

п/п	№ Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры Высшей алгебры и защиты информации (протокол № ____ от _____ 20__ г.)

Заведующий кафедрой

(степень, звание)

(подпись)

(И.О.Фамилия)

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета

(степень, звание)

(подпись)

(И.О.Фамилия)