УДК 517.968.73

# ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОГО СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ МЕТОДОМ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

***Г. А. РАСОЛЬКО*[1], *С. М. ШЕШКО*[1]**

[1]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*


Построены две вычислительные схемы решения граничной задачи для сингулярного интегро-дифференциального уравнения, которое описывает рассеяние *H*-поляризованных электромагнитных волн экраном с криволинейной границей. Данное уравнение включает три вида интегралов: сингулярный интеграл с ядром Коши, интегралы с логарифмической особенностью и с ядром из класса Гёльдера. Подынтегральные выражения наряду с искомой функцией содержат ее первую производную. Предлагаемые схемы приближенного решения задачи основаны на представлении искомой функции в виде линейной комбинации ортогональных многочленов Чебышева и спектральных соотношениях, позволяющих получить простые аналитические выражения для сингулярной составляющей уравнения. Коэффициенты разложения решения по базису полиномов Чебышева вычисляются как решение системы линейных алгебраических уравнений. Результаты численных экспериментов показывают, что на сетке из 20–30 узлов погрешность приближенного решения достигает минимального предела, обусловленного погрешностью представления действительных чисел с плавающей запятой.

***Ключевые слова:*** интегро-дифференциальное уравнение; спектральные соотношения; метод ортогональных многочленов.

**Образец цитирования:**
Расолько ГА, Шешко СМ. Приближенное решение одного сингулярного интегро-дифференциального уравнения методом ортогональных многочленов. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2020;2:86–96.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2020-2-86-96

**For citation:**
Rasolko GA, Sheshko SM. An approximate solution of one singular integro-differential equation using the method of orthogonal polynomials. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2020;2:86–96. Russian.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2020-2-86-96


**Авторы:**
***Галина Алексеевна Расолько*** – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования механико-математического факультета.
***Сергей Михайлович Шешко*** – старший преподаватель кафедры цифровой экономики экономического факультета.

**Authors:**
***Galina A. Rasolko***, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of web technologies and computer simulation, faculty of mechanics and mathematics.
*rasolka@bsu.by*
*https://orcid.org/0000-0002-4055-7343*
***Sergei M. Sheshko***, senior lecturer at the department of digital economy, faculty of economics.
*sheshkasm@bsu.by*
*https://orcid.org/0000-0001-6366-4961*

# AN APPROXIMATE SOLUTION OF ONE SINGULAR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION USING THE METHOD OF ORTHOGONAL POLYNOMIALS

***G. A. RASOLKO***[a]***, S. M. SHESHKO***[a]

[a]*Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*
*Corresponding author: S. M. Sheshko (sheshkasm@bsu.by)*

Two computational schemes for solving boundary value problems for a singular integro-differential equation, which describes the scattering of $H$-polarized electromagnetic waves by a screen with a curved boundary, are constructed. This equation contains three types of integrals: a singular integral with the Cauchy kernel, integrals with a logarithmic singularity and with the Helder type kernel. The integrands, along with the solution function, contain its first derivative. The proposed schemes for an approximate solution of the problem are based on the representation of the solution function in the form of a linear combination of the Chebyshev orthogonal polynomials and spectral relations that allows to obtain simple analytical expressions for the singular component of the equation. The expansion coefficients of the solution in terms of the Chebyshev polynomial basis are calculated by solving a system of linear algebraic equations. The results of numerical experiments show that on a grid of 20–30 points, the error of the approximate solution reaches the minimum limit due to the error in representing real floating-point numbers.

***Keywords:*** integro-differential equation; spectral relations; method of orthogonal polynomials.

## Введение

Аппарат сингулярных интегральных уравнений широко используется в задачах аэродинамики, дифракции и других областях естествознания [1]. Точность приближенного численного решения интегральных уравнений во многом определяется способом их дискретизации, т. е. выбором квадратурных формул, базисных функций и узлов аппроксимации, позволяющих свести исходную задачу к системе линейных алгебраических уравнений приемлемой размерности и обусловленности. При наличии особенностей в подынтегральных функциях, что характерно для сингулярных интегральных уравнений, требуется максимально учитывать специфику задачи.

В работе [1, с. 69] при решении задачи рассеяния волн криволинейным экраном в случае $H$-поляризации рассматривается метод приближенного решения интегро-дифференциального уравнения

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi'(t)}{t-x}dt+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\varphi(t)\ln|t-x|dt+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\varphi(t)K(x,t)dt=f(x),\ -1<x<1. \tag{1}$$

Здесь $K(x,t)$ и $f(x)$ – известные функции из класса Гёльдера $H$; $\varphi(x)$ – искомая функция. Там же показано, что решение данного уравнения в классе $H$ существует и единственно при выполнении условий

$$\varphi(\pm 1)=0 \tag{2}$$

и искомая функция представима в виде

$$\varphi(x)=\sqrt{1-x^2}\,v(x), \tag{3}$$

где $v(x)$ – ограниченная функция при $x\in[-1,1]$.

Вычислительная схема, предложенная в работе [1], основана на интерполировании искомого решения многочленом по узлам Чебышева $\tau_m=\cos\theta_m$, $\theta_m=\dfrac{m\pi}{n+1}$, $m=\overline{1,n}$, и привлечении известных спектральных соотношений для интеграла:

$$M_k(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{T_k(t)}{\sqrt{1-t^2}}\ln|t-x|dt=\begin{cases}-\ln 2, & k=0,\\ -\dfrac{1}{k}T_k(x), & k>0,\end{cases} \tag{4}$$

$$T_k(x)=\cos(k\arccos x).$$

Однако, как справедливо подчеркнуто в работе [2, с. 187], такой подход не всегда оправдан. Если требуется получить решение с высокой точностью, то целесообразно использовать его представление в виде линейной комбинации ортогональных многочленов (например, многочленов Чебышева).

В данной работе предлагается алгоритм численного решения уравнения (1) с неизвестной функцией $\varphi(x)$ методом ортогональных многочленов, основной идеей которого является применение спектральных или квазиспектральных соотношений для входящих в уравнение интегралов.

## Предварительные сведения

Наряду с (4) будем использовать известные спектральные соотношения [3]:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}}\frac{dt}{t-x}=U_{n-1}(x),\ -1<x<1,\ n=1,2,3,\ldots, \tag{5}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,U_{n-1}(t)\frac{dt}{t-x}=-T_n(x),\ -1<x<1,\ n=1,2,3,\ldots, \tag{6}$$

где $T_n(x)$, $U_{n-1}(x)$ – многочлены Чебышева первого и второго рода соответственно. Кроме того, получим некоторые дополнительные тождества, необходимые для построения эффективных алгоритмов численного решения поставленной задачи.

**Утверждение 1.** Для $|x|<1$ имеет место равенство

$$J_k(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,U_k(t)\ln|t-x|\,dt=\begin{cases}-\left(\frac{\ln 2}{2}+\frac{1}{8}\right)U_0(x)+\frac{1}{8}U_2(x),\ k=0,\\ \frac{1}{12}U_3(x)-\frac{1}{3}U_1(x),\ k=1,\\ \frac{U_{k-2}(x)}{4k}-\frac{k+1}{2k(k+2)}U_k(x)+\frac{1}{4(k+2)}U_{k+2}(x),\ k\ge 2.\end{cases} \tag{7}$$

Доказательство. С учетом соотношения $2(1-x^2)U_k(x)=T_k(x)-T_{k+2}(x)$ [4] подынтегральная функция в (7) сводится к виду (4), откуда следует истинность утверждения.

При построении вычислительной схемы используем интерполяционный многочлен для функции $f(x)$ по узлам Чебышева первого рода [4]:

$$f(x)\approx f_n(x)=\sum_{j=0}^{n}{}^{0}c_jT_j(x), \tag{8}$$

где $c_j=\frac{2}{n+1}\sum_{k=0}^{n}f(x_k)T_j(x_k),\ j=0,1,\ldots,n,\ x_k=\cos\frac{2k+1}{2n+2}\pi,\ k=0,1,\ldots,n.$

Здесь и далее $\sum_{j=0}^{n}{}^{0}a_j=\frac{1}{2}a_0+a_1+\ldots+a_n.$

Чтобы получить разложение функции $f(x)$ по многочленам Чебышева второго рода, применим в (8) тождества [4, с. 23]

$$T_0(x)=U_0(x),\ 2T_1(x)=U_1(x),\ 2T_j(x)=U_j(x)-U_{j-2}(x),\ j\ge 2,$$

и получим следующее равенство:

$$f_n(x)=\sum_{j=0}^{n}f_jU_j(x), \tag{9}$$

где

$$f_j=G_j-G_{j+2},\ j=0,1,\ldots,n-2,\ f_{n-1}=G_{n-1},\ f_n=G_n,$$

$$G_j = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f(x_k)T_j(x_k),\ j = 0, 1, \ldots, n,$$

$$x_k = \cos\frac{2k+1}{2n+2}\pi,\ k = 0, 1, \ldots, n.$$

Для получения интерполяционного многочлена $K_{n,n}(x, t)$ функции двух переменных $K(x, t)$ в виде разложения по многочленам Чебышева второго рода используем аналогичный подход, в результате чего будем иметь

$$K_{n,n}(x, t) = \sum_{m=0}^{n} U_m(x)\sum_{j=0}^{n} k^*_{m,j} U_j(t),$$

$$k^*_{m,j} = \frac{1}{(n+1)^2}\sum_{l=0}^{n}\big(T_m(x_l) - \sigma_m T_{m+2}(x_l)\big)\sum_{r=0}^{n} K(x_l, x_r)\big(T_j(x_r) - \theta_j T_{j+2}(x_r)\big),$$

$$\theta_j = \begin{cases} 1,\ j = 0, 1, \ldots, n-2, \\ 0,\ j = n-1, n, \end{cases} \qquad \sigma_m = \begin{cases} 1,\ m = 0, 1, \ldots, n-2, \\ 0,\ m = n-1, n, \end{cases} \tag{10}$$

$$x_k = \cos\frac{2k+1}{2n+2}\pi,\ k = \overline{0, n}.$$

## Приближенное решение уравнения (1)

Рассмотрим две схемы численного решения уравнения (1) при условии (2).

**Схема 1.** Приближенное решение уравнения (1) будем искать как решение следующей задачи относительно новой неизвестной функции $\varphi_n(x)$:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_n'(t)}{t-x}dt + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\varphi_n(t)\ln|t-x|dt +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\varphi_n(t)K_{n,n}(x, t)dt = f_{n+2}(x),\ -1 < x < 1, \tag{11}$$

$$\varphi_n(\pm 1) = 0,$$

где $K_{n,n}(x, t)$ – интерполяционный многочлен (10) функции $K(x, t)$ степени $n$ по обеим переменным; $f_{n+2}(x)$ – интерполяционный многочлен функции $f(x)$ вида (9) степени $n+2$; $\varphi_n(x)$ – некоторое приближение к искомой функции.

Чтобы получить явное выражение для $\varphi_n(x)$, поступим следующим образом. Введем вспомогательную функцию

$$v_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_n'(t)}{t-x}dt. \tag{12}$$

Тогда, выполняя обращение интеграла (12) в классе неограниченных функций, имеем

$$\varphi_n'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-t^2}\,v_n(t)}{t-x}dt + \frac{c}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Далее, исходя из того, что $\varphi_n(-1) = 0$, получаем

$$\varphi_n(x) = \int_{-1}^{x}\varphi_n'(\tau)d\tau = -\int_{-1}^{x}\frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,\frac{v_n(t)}{t-\tau}dt + \frac{c}{\sqrt{1-\tau^2}}\right)d\tau =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} H(x, t)\,v_n(t)dt + \mu(x),\ \ \mu(x) = c\left(\arcsin x + \frac{\pi}{2}\right), \tag{13}$$

где

$$H(x,\ t) = -\sqrt{1-t^2}\int_{-1}^{x}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}}\frac{d\tau}{t-\tau}\right) =$$

$$= -\sqrt{1-t^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\ln\frac{1-xt+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-t^2}}{|t-x|}\right) = -\ln\frac{1-xt+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-t^2}}{|t-x|}.$$

Учитывая, что $H(-1,\ t) = H(1,\ t)$, находим $c = 0$. Кроме того, что функция $H(x,\ t)$ симметрическая, она также неположительная, и имеют место оценки

$$H(x,\ t) = H(\cos\theta,\ \cos\sigma) = -\ln\frac{1-\cos(\theta+\sigma)}{2\sin\frac{\theta+\sigma}{2}\left|\sin\frac{\theta-\sigma}{2}\right|} = -\ln\frac{\sin\frac{\theta+\sigma}{2}}{\left|\sin\frac{\theta-\sigma}{2}\right|} \le 0,\ \ 0 < \sigma,\ \theta \le \pi,$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}|H(x,\ t)|dt = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\int_{-1}^{x}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}}\frac{d\tau}{t-\tau}\right)dt = \sqrt{1-x^2} \le 1.$$

Для вспомогательной функции (12) используем разложение

$$v_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k U_k(x), \tag{14}$$

где $c_k$, $k = 0, 1, \ldots, n$, – пока неизвестные постоянные.

Тогда из (13) и (14) следует, что

$$\varphi_n(x) = -\sqrt{1-x^2}\sum_{k=0}^{n} c_k\frac{1}{k+1}U_k(x), \tag{15}$$

так как

$$\varphi_n(x) = -\int_{-1}^{x}\frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\frac{v_n(t)}{t-\tau}dt\right)d\tau = -\sum_{k=0}^{n} c_k\int_{-1}^{x}\frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\frac{U_k(t)}{t-\tau}dt\right)d\tau =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} c_k\int_{-1}^{x}\frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}}T_{k+1}(\tau)d\tau = \sum_{k=0}^{n} c_k A_k(x),$$

где

$$A_k(x) = \int_{-1}^{x}\frac{T_{k+1}(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}d\tau = -\frac{1}{k+1}\sin\big((k+1)\arccos(x)\big) = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{k+1}U_k(x),\ \ k \ge 0.$$

Введем далее операторы

$$I(\varphi_n;\ x) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\varphi_n(t)\ln|t-x|dt, \tag{16}$$

$$k(\varphi_n;\ x) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\varphi_n(t)K_{n,\,n}(x,\ t)dt. \tag{17}$$

Уравнение (11) с учетом (14), (16), (17) принимает вид

$$v_n(x) + I(\varphi_n;\ x) + k(\varphi_n;\ x) = f_{n+2}(x). \tag{18}$$

На основании полученного представления (15) выполним эквивалентные преобразования и упростим входящие в (16) и (17) интегралы.

$$I\left(\varphi_n;\, x\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \varphi_n\left(t\right)\ln\left|t - x\right| dt = -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - t^2} \sum_{k=0}^{n} c_k \frac{1}{k+1} U_k\left(t\right)\ln\left|t - x\right| dt =$$

$$= -\sum_{k=0}^{n} c_k \frac{1}{k+1}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1 - t^2}\, U_k\left(t\right)\ln\left|t - x\right| dt = -\sum_{k=0}^{n} c_k \frac{1}{k+1} J_k\left(x\right),$$

при этом $J_k\left(x\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1 - t^2}\, U_k\left(t\right)\ln\left|t - x\right| dt$ вычисляются в соответствии с формулами (7). С учетом данного соотношения имеем

$$I\left(\varphi_n;\, x\right) = c_0\left(\left(\frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{8}\right)U_0\left(x\right) - \frac{1}{8}U_2\left(x\right)\right) + c_1\left(-\frac{1}{12}U_3\left(x\right) + \frac{1}{3}U_1\left(x\right)\right) +$$

$$+\sum_{k=2}^{n} c_k \frac{1}{k+1}\left(-\frac{U_{k-2}\left(x\right)}{4k} + \frac{k+1}{2k\left(k+2\right)}U_k\left(x\right) - \frac{1}{4\left(k+2\right)}U_{k+2}\left(x\right)\right). \tag{19}$$

Перегруппировав это выражение, получим разложение интеграла с логарифмической особенностью по многочленам Чебышева второго рода:

$$I\left(\varphi_n;\, x\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\varphi_n\left(t\right)\ln\left|t - x\right| dt = \sum_{k=0}^{n+2} D_k U_k\left(x\right). \tag{20}$$

Значения $D_k$ нетрудно выписать на основании (19).
Преобразуем (17) с учетом представления (10):

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\varphi_n\left(t\right)K_{n,\,n}\left(x,\, t\right)dt = -\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}c_k\sum_{m=0}^{n}U_m\left(x\right)\sum_{j=0}^{n}k^*_{m,\,j}\,\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1 - t^2}\,U_k\left(t\right)U_j\left(t\right)dt =$$

$$= -\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}c_k\sum_{m=0}^{n}U_m\left(x\right)\sum_{j=0}^{n}k^*_{m,\,j}M_{k,\,j},\;\; M_{k,\,j} = \begin{cases}\frac{1}{2},\;\; k = j,\\ 0,\;\; k \neq j.\end{cases} \tag{21}$$

Тем самым из (21) получим разложение интеграла (17) по многочленам Чебышева второго рода:

$$k\left(\varphi_n;\, x\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\varphi_n\left(t\right)K_{n,\,n}\left(x,\, t\right)dt = \sum_{m=0}^{n}E_m\,U_m\left(x\right), \tag{22}$$

где

$$E_m = \sum_{k=0}^{n}c_k\omega_{m,\,k},\;\; \omega_{m,\,k} = -\frac{k^*_{m,\,k}}{2k + 2}. \tag{23}$$

Подставляя в (18) представления (14), (20), (22) и (9), приходим к уравнению

$$\sum_{k=0}^{n}\left(c_k + D_k + E_k\right)U_k\left(x\right) + \sum_{k=n+1}^{n+2}D_kU_k\left(x\right) = \sum_{k=0}^{n+2}f_kU_k\left(x\right).$$

Полученное равенство выполняется, когда коэффициенты разложения удовлетворяют системе уравнений $c_k + D_k + E_k = f_k$, $k = \overline{0,\, n}$, $D_k = f_k$, $k = \overline{n+1,\, n+2}$, из которой после несложных преобразований приходим к следующей системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $c_k$, $k = \overline{0,\, n}$:

$$\left(\beta_k + 1\right)c_k + \gamma_k c_{k+2} + \sum_{q=0}^{n}c_q\,\omega_{k,\,q} = f_k,\;\; k = \overline{0,\, 1},$$

$$\alpha_k c_{k-2} + \left(\beta_k + 1\right)c_k + \gamma_k c_{k+2} + \sum_{q=0}^{n}c_q\,\omega_{k,\,q} = f_k,\;\; k = \overline{2,\, n-2},$$

$$\begin{gathered}\alpha_k c_{k-2} + (\beta_k + 1)c_k + \sum_{q=0}^{n} c_q \omega_{k,q} = f_k,\ k = \overline{n-1, n},\\ \alpha_k c_{k-2} = f_k,\ k = \overline{n+1, n+2},\end{gathered} \tag{24}$$

где коэффициенты $\omega_{k,q}$ вычисляются согласно (23),

$$\alpha_k = -\frac{1}{4k(k-1)},\ \beta_k = \begin{cases}\dfrac{\ln 2}{2} + \dfrac{1}{8},\ k = 0,\\ \dfrac{1}{2k(k+2)},\ k > 0,\end{cases}\quad \gamma_k = -\frac{1}{4(k+2)(k+3)}.$$

Решая систему (24) относительно неизвестных $c_k$, $k = 0, 1, \ldots, n$, при $n \geq 4$, приближенное решение уравнения (1) получим по формуле (15).

**Схема 2.** Построим еще одну схему численного решения уравнения (1). Рассмотрим вначале следующие утверждения.

**Утверждение 2.** Для $|x| < 1$ имеет место равенство

$$J_k(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\sqrt{1-t^2}T_k(t)\right)'\frac{dt}{t-x} = \begin{cases}-U_0(x),\ k = 0,\\ \dfrac{k-1}{2}U_{k-2}(x) - \dfrac{k+1}{2}U_k(x),\ k \geq 1.\end{cases} \tag{25}$$

Доказательство. При $k = 0$ формула (25) очевидно верна на основании (5). Пусть $k \geq 1$. Вычислим производную от подынтегральной функции и используем соотношение $xT_k(x) = (1-x^2)U_{k-1}(x) - T_{k-1}(x)$ [4].

Тогда $J_k(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^{1}\left((k+1)\sqrt{1-t^2}U_{k-1}(t) - \frac{T_{k-1}(t)}{\sqrt{1-t^2}}\right)\frac{dt}{t-x}$. Принимая во внимание (5), (6) и соотношение $2T_k(x) = U_k(x) - U_{k-2}(x)$, получим $J_k(x) = -(k+1)T_k(x) - U_{k-2}(x) = \dfrac{k-1}{2}U_{k-2}(x) - \dfrac{k+1}{2}U_k(x)$, что и требовалось доказать.

**Утверждение 3.** Для $|x| < 1$ имеет место равенство

$$I_k(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}T_k(t)\ln|t-x|\,dt =$$

$$= \begin{cases}-\left(\dfrac{\ln 2}{2} + \dfrac{1}{8}\right)U_0(x) + \dfrac{1}{8}U_2(x),\ k = 0,\\ -\dfrac{1}{6}U_1(x) + \dfrac{1}{24}U_3(x),\ k = 1,\\ \left(\dfrac{\ln 2}{4} + \dfrac{1}{8}\right)U_0(x) - \dfrac{5}{32}U_2(x) + \dfrac{1}{32}U_4(x),\ k = 2,\\ -\dfrac{U_{k-4}(x)}{8(k-2)} + \dfrac{3k-4}{8k(k-2)}U_{k-2}(x) - \dfrac{3k+4}{8k(k+2)}U_k(x) + \dfrac{1}{8(k+2)}U_{k+2}(x),\ k \geq 3.\end{cases} \tag{26}$$

Доказательство. С учетом соотношений $2T_k(x) = U_k(x) - U_{k-2}(x)$, $k \geq 1$, $U_{-1}(x) = 0$, $T_0 = U_0$, левая часть (26) сводится к вычислению интегралов вида (7), и тождества (26) проверяются непосредственными вычислениями.

Принимая во внимание (3), приближенное решение уравнения (1) будем искать как решение следующего уравнения:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\left(\sqrt{1-t^2}\,v_n(t)\right)'}{t-x}dt+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,v_n(t)\ln|t-x|\,dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,v_n(t)K_{n,n}(x,t)\,dt=f_{n+2}(x),\ -1<x<1, \tag{27}$$

где $K_{n,n}(x, t)$ – интерполяционный многочлен (10) функции $K(x, t)$ степени $n$ по обеим переменным; $f_{n+2}(x)$ – интерполяционный многочлен функции $f(x)$ вида (9) степени $n + 2$; $\varphi_n(x)=\sqrt{1-x^2}\,v_n(x)$ – некоторое приближение к искомой функции.

Положим далее

$$v_n(x)=\sum_{k=0}^{n}c_kT_k(x), \tag{28}$$

где $c_k$, $k = 0, 1, \ldots, n$, – пока неизвестные постоянные.

Упростим первый интеграл, входящий в (27). С учетом (28) и (25) имеем

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\left(\sqrt{1-t^2}\,v_n(t)\right)'}{t-x}dt=\sum_{k=0}^{n}c_k\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\left(\sqrt{1-t^2}\,T_k(t)\right)'}{t-x}dt=$$

$$=-c_0U_0(x)+\sum_{k=1}^{n}c_k\frac{k-1}{2}U_{k-2}-\sum_{k=1}^{n}c_k\frac{k+1}{2}U_k=$$

$$=-c_0U_0(x)+\sum_{k=0}^{n-2}c_{k+2}\frac{k+1}{2}U_k(x)-\sum_{k=1}^{n}c_k\frac{k+1}{2}U_k(x)=$$

$$=-c_0U_0(x)+c_2\frac{U_0(x)}{2}+\sum_{k=1}^{n-2}\frac{k+1}{2}\left(c_{k+2}-c_k\right)U_k(x)-\sum_{k=n-1}^{n}c_k\frac{k+1}{2}U_k(x)=\sum_{k=0}^{n}A_kU_k(x). \tag{29}$$

Тем самым получено разложение первого интеграла в (27) по многочленам Чебышева второго рода:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\left(\sqrt{1-t^2}\,v_n(t)\right)'}{t-x}dt=\sum_{k=0}^{n}A_kU_k(x), \tag{30}$$

где $A_k$ на основании (29) имеют вид

$$A_k=\begin{cases}0{,}5c_2-c_0,\ k=0,\\ 0{,}5(k+1)\left(c_{k+2}-c_k\right),\ k=\overline{1,\ n-2},\\ -0{,}5nc_{n-1},\ k=n-1,\\ -0{,}5(n+1)c_n,\ k=n,\\ 0,\ k>n.\end{cases}$$

Рассмотрим второй интеграл в (27) с учетом представления (28):

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,v_n(t)\ln|t-x|\,dt=\sum_{k=0}^{n}c_k\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,T_k(t)\ln|t-x|\,dt=\sum_{k=0}^{n}c_kI_k(x).$$

Подставив вместо $I_k(x)$ его значение согласно (26), получим

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,v_n(t)\ln|t-x|\,dt = c_0\left(\frac{1}{8}U_2(x)-\left(\frac{\ln 2}{2}+\frac{1}{8}\right)U_0(x)\right)+$$

$$+\,c_1\left(-\frac{1}{6}U_1(x)+\frac{1}{24}U_3(x)\right)+c_2\left(\left(\frac{\ln 2}{4}+\frac{1}{8}\right)U_0(x)-\frac{5}{32}U_2(x)+\frac{1}{32}U_4(x)\right)+$$

$$+\sum_{k=3}^{n}c_k\left(-\frac{U_{k-4}(x)}{8(k-2)}+\frac{3k-4}{8k(k-2)}U_{k-2}(x)-\frac{3k+4}{8k(k+2)}U_k(x)+\frac{1}{8(k+2)}U_{k+2}(x)\right). \tag{31}$$

Перегруппировав это выражение, будем иметь разложение второго интеграла в (27) по многочленам Чебышева второго рода:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,v_n(t)\ln|t-x|\,dt = \sum_{k=0}^{n+2}B_kU_k(x). \tag{32}$$

Выражения для $B_k$ несложно получить из (31).

Рассмотрим третий интеграл в (27) и также учтем представления (10) и (28):

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,v_n(t)K_{n,n}(x,t)\,dt = \sum_{k=0}^{n}c_k\sum_{m=0}^{n}U_m(x)\sum_{j=0}^{n}k^*_{m,j}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,T_k(t)U_j(t)\,dt=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}c_k\sum_{m=0}^{n}U_m(x)\sum_{j=0}^{n}k^*_{m,j}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\left(U_{j+k}(t)+U_{j-k}(t)\right)dt\right)=$$

$$=\sum_{m=0}^{n}U_m(x)\frac{1}{4}\left(\sum_{k=0}^{n}c_kk^*_{m,k}+c_0k^*_{m,0}\right)=\sum_{m=0}^{n}U_m(x)\sum_{k=0}^{n}c_k\omega^*_{m,k}, \tag{33}$$

$$\omega^*_{m,k}=\begin{cases}\dfrac{k^*_{m,k}}{2}, & k=0,\\[2mm] \dfrac{k^*_{m,k}}{4}, & k>0.\end{cases} \tag{34}$$

Тем самым из (33) приходим к разложению третьего интеграла в (27) по многочленам Чебышева второго рода:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,v_n(t)K_{n,n}(x,t)\,dt = \sum_{m=0}^{n}D_mU_m(x), \tag{35}$$

где $D_m=\sum_{k=0}^{n}c_k\omega^*_{m,k}$.

Собирая вместе разложение каждого из трех интегралов по формулам (30), (32), (35), слева имеем линейную комбинацию многочленов Чебышева второго рода, а справа – функцию $f_{n+2}(x)$ в виде (9):

$$\sum_{k=0}^{n}\left(A_k+B_k+D_k\right)U_k(x)+\sum_{k=n+1}^{n+2}B_kU_k(x)=\sum_{k=0}^{n+2}f_kU_k(x).$$

Это равенство верно тогда и только тогда, когда коэффициенты удовлетворяют системе уравнений $A_k+B_k+D_k=f_k,\ k=\overline{0,n},\ B_k=f_k,\ k=\overline{n+1,n+2}$. После несложных преобразований приходим к следующей системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $c_k,\ k=\overline{0,n}$:

$$\beta_k c_k+\gamma_k c_{k+2}+\delta_k c_{k+4}+\sum_{q=0}^{n}c_q\omega^*_{k,q}=f_k,\ k=\overline{0,1},$$

$$\alpha_k c_{k-2}+\beta_k c_k+\gamma_k c_{k+2}+\delta_k c_{k+4}+\sum_{q=0}^{n}c_q\omega^*_{k,q}=f_k,\ k=\overline{2,n-4},$$

$$\alpha_k c_{k-2} + \beta_k c_k + \gamma_k c_{k+2} + \sum_{q=0}^{n} c_q \omega^*_{k,q} = f_k,\ k = \overline{n-3,\ n-2},$$
$$\alpha_k c_{k-2} + \beta_k c_k + \sum_{q=0}^{n} c_q \omega^*_{k,q} = f_k,\ k = \overline{n-1,\ n}, \tag{36}$$
$$\alpha_k c_{k-2} = f_k,\ k = \overline{n+1,\ n+2},$$

где коэффициенты $\omega^*_{k,q}$ вычисляются согласно (34),

$$\alpha_k = \begin{cases} \dfrac{1}{8},\ k = 2, \\ \dfrac{1}{8k},\ k = \overline{3,\ 4}, \\ \dfrac{1}{8(k-2)},\ k > 4, \end{cases} \qquad \beta_k = \begin{cases} -\dfrac{\ln 2}{2} - \dfrac{9}{8},\ k = 0, \\ -\dfrac{7}{6},\ k = 1, \\ -\dfrac{4(k+1)^3 - k}{8k(k+2)},\ k > 1, \end{cases}$$

$$\gamma_k = \begin{cases} \dfrac{\ln 2}{4} + \dfrac{5}{8},\ k = 0, \\ \dfrac{4(k+1)^3 - k - 2}{8k(k+2)},\ k > 0, \end{cases} \qquad \delta_k = \begin{cases} -\dfrac{1}{16},\ k = 0, \\ -\dfrac{1}{8(k+2)},\ k > 0. \end{cases}$$

Решив систему (36) относительно неизвестных $c_k$, $k = 0, 1, \ldots, n$, при $n \geq 7$, приближенное решение уравнения (1) получим по формуле

$$\varphi_n(x) = \sqrt{1-x^2} \sum_{k=0}^{n} c_k T_k(x). \tag{37}$$

Предложенные схемы протестированы на примере решения модельной задачи для уравнения (1) при $K(x,\ t) = \dfrac{x^3 t}{(x^2+1)(t^2+1)}$, $f(x) = \dfrac{2}{3}x^3 - 5x - \dfrac{(2\sqrt{2}-3)x^3}{x^2+1}$. Известно, что решением задачи (1), (2) в данном случае является функция $\varphi(x) = 2x\sqrt{1-x^2}$. Как показывают расчеты, проведенные в среде компьютерной алгебры *Mathcad*, уже при сравнительно небольших значениях $n$ достигается достаточно высокая точность вычисления приближенного решения.

**Схема 1.** Решая систему (24) при $n$, равных 7, 14 и 35, видим, что точное решение $\varphi(x)$ отличается от приближенного $\varphi_n(x)$, вычисленного по формуле (15), в системе точек $x = -0{,}99,\ -0{,}98,\ \ldots,\ 0{,}99$ не более чем на $1{,}0 \cdot 10^{-5}$, $2{,}2 \cdot 10^{-8}$ и $8{,}0 \cdot 10^{-16}$ соответственно.

**Схема 2.** Решая систему (36) при $n$, равных 7, 14 и 21, видим, что точное решение $\varphi(x)$ отличается от приближенного $\varphi_n(x)$, вычисленного по формуле (37), в системе точек $x = -0{,}99,\ -0{,}98,\ \ldots,\ 0{,}99$ не более чем на $1{,}0 \cdot 10^{-5}$, $2{,}2 \cdot 10^{-8}$ и $1{,}5 \cdot 10^{-15}$ соответственно.

Обоснование сходимости и оценки погрешности приближенного решения можно получить по аналогии с представленными в статье [5].

## Библиографические ссылки

1. Панасюк ВВ, Саврук МП, Назарчук ЗТ. *Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции.* Киев: Наукова думка; 1984. 344 с.

2. Бахвалов НС, Жидков НП, Кобельков ГМ. *Численные методы.* Москва: Наука; 1987. 598 с.

3. Бейтмен Г, Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены.* Виленкин НЯ, переводчик. Москва: Наука; 1966. 295 с. (Справочная математическая библиотека).

4. Пашковский С. *Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева.* Лебедев ВИ, редактор; Киро СН, переводчик. Москва: Наука; 1983. 384 с.

5. Расолько ГА. Численное решение сингулярного интегро-дифференциального уравнения Прандтля методом ортогональных многочленов. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2018;3:68–74.

## References

1. Panasyuk VV, Savruk MP, Nazarchuk ZT. *Metod singulyarnykh integral'nykh uravnenii v dvumernykh zadachakh difraktsii* [The method of singular integral equations in two-dimensional diffraction problems]. Kyiv: Naukova dumka; 1984. 344 p. Russian.

2. Bakhvalov NS, Zhidkov NP, Kobel'kov GM. *Chislennye metody* [Numerical methods]. Moscow: Nauka; 1987. 598 p. Russian.

3. Bateman H. *Higher transcendental functions. Volume 2*. Erdélyi A, editor. New York: McGraw-Hill Book Company; 1953. XIV, 396 p.

Russian edition: Bateman H, Erdélyi A. *Vysshie transtsendentnye funktsii. Funktsii Besselya, funktsii parabolicheskogo tsilindra, ortogonal'nye mnogochleny.* Vilenkin NYa, translator. Moscow: Nauka; 1966. 295 p. (Spravochnaya matematicheskaya biblioteka).

4. Pashkovskii S. *Vychislitel'nye primeneniya mnogochlenov i ryadov Chebysheva* [Computational applications of polynomials and Chebyshev series]. Lebedev VI, editor; Kiro SN, translator. Moscow: Nauka; 1983. 384 p. Russian.

5. Rasolko GA. Numerical solution of singular integro-differential Prandtl equation by the method of orthogonal polynomials. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2018;3:68–74. Russian.

*Статья поступила в редколлегию 06.03.2020.*
*Received by editorial board 06.03.2020.*