УДК 519.24

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА М-ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ GARCH(1, 1)

В. С. ТЕРЕХ[1)]

[1)]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*

Модель GARCH(1, 1) используется для анализа и прогнозирования финансовых и экономических временных рядов. В классическом варианте для оценки параметров модели применяется метод максимального правдоподобия, однако он неудобен при анализе моделей, остатки которых имеют распределения, отличные от нормального. Рассматривается метод М-оценки параметров модели GARCH(1, 1), представляющий собой обобщение метода максимального правдоподобия. Описан алгоритм построения М-оценок, исследованы их асимптотические свойства. Сформулирован ряд условий, при выполнении которых оценка является строго состоятельной и имеет асимптотически нормальное распределение. С помощью такого метода можно анализировать модели с различными распределениями остатков. В частности, модели с устойчивыми и умеренно устойчивыми распределениями, позволяющие учесть особенности реальных финансовых данных: кластеризацию волатильности, тяжелые хвосты, несимметричность.

Ключевые слова: модель GARCH; оценка параметров; М-оценка; состоятельность; асимптотическое распределение.

ASYMPTOTIC PROPERTIES OF M-ESTIMATOR FOR GARCH(1, 1) MODEL PARAMETERS

U. S. TSERAKH[a]

[a]*Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*

GARCH(1, 1) model is used for analysis and forecasting of financial and economic time series. In the classical version, the maximum likelihood method is used to estimate the model parameters. However, this method is not convenient for analysis of models with residuals distribution different from normal. In this paper, we consider M-estimator for the GARCH(1, 1) model parameters, which is a generalization of the maximum likelihood method. An algorithm for constructing an M-estimator is described and its asymptotic properties are studied. A set of conditions is formulated under which the estimator is strictly consistent and has an asymptotically normal distribution. This method allows to analyze models with different residuals distributions; in particular, models with stable and tempered stable distributions that allow to take into account the features of real financial data: volatility clustering, heavy tails, asymmetry.

Keywords: GARCH model; parameter estimation; M-estimator; consistency; asymptotic distribution.

Образец цитирования:
Терех ВС. Асимптотические свойства М-оценки параметров модели GARCH(1, 1). *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2020; 2:69–78.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2020-2-69-78

For citation:
Tserakh US. Asymptotic properties of M-estimator for GARCH(1, 1) model parameters. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2020;2:69–78. Russian.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2020-2-69-78

Автор:
Владимир Сергеевич Терех – аспирант кафедры теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и информатики. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор Н. Н. Труш.

Author:
Uladzimir S. Tserakh, postgraduate student at the department of probability theory and mathematical statistics, faculty of applied mathematics and computer science.
vladimir.terekh@gmail.com
https://orcid.org/0000-0003-0034-7672

Введение

Исследования многих ученых показали, что финансовые временные ряды обладают специфическими особенностями, учесть которые способны лишь определенные эконометрические модели. В работе [1] была предложена модель авторегрессионной условной гетероскедастичности ARCH(q) (autoregressive conditionally heteroscedastic model), которая стала первой из большого семейства моделей гетероскедастичности. На практике модель ARCH(q) используется редко, так как для достаточно точного описания временных рядов требуется большое количество параметров. В статье [2] предложена обобщенная модель GARCH(p, q) (generalized ARCH), более удобная для практических исследований. Особенно популярна модель GARCH(1, 1). Оценка параметров модели может осуществляться несколькими методами. Одним из наиболее часто применяемых и простых в реализации является метод квазимаксимального правдоподобия (МКМП). Для модели GARCH(1, 1) состоятельность и асимптотическая нормальность оценки по МКМП впервые были доказаны в работе [3]. В некоторых случаях МКМП дает неудовлетворительные результаты (например, когда распределение остатков имеет тяжелые хвосты), поэтому актуальной является задача исследования других методов оценки.

Модель GARCH(1, 1)

Процесс X_t, $t \in \mathbb{Z}$, удовлетворяет модели GARCH(1, 1), если

$$\begin{cases} X_t = \sigma_t Z_t, \\ \sigma_t^2 = \omega_0 + \omega_1 X_{t-1}^2 + \omega_2 \sigma_{t-1}^2, \end{cases} \tag{1}$$

где $\{Z_t,\ t \in \mathbb{Z}\}$ – независимые, одинаково распределенные случайные величины, а $\omega_0 > 0$, $\omega_1 > 0$, $\omega_2 > 0$ – параметры модели; σ_t является $\mathcal{F}_{t-1}$-измеримой, здесь $\mathcal{F}_{t-1} = \sigma(Z_{t-1},\ Z_{t-2},\ \ldots)$ – сигма-алгебра. Временной ряд, описываемый соотношением (1), не всегда стационарен в узком смысле. Поэтому необходимо наложить дополнительные ограничения на параметры модели. Будем использовать следующее условие стационарности [4]:

$$\omega_1 + \omega_2 < 1. \tag{2}$$

Пусть $\theta = (\omega_0,\ \omega_1,\ \omega_2)^{\mathrm{T}}$, а $\theta_0 = (w_0,\ w_1,\ w_2)^{\mathrm{T}}$ – истинный вектор параметров модели (1). Введем вспомогательные переменные $\underline{\theta} \in (0, 1)$, $\overline{\theta} \in (0, 1)$ и определим допустимое множество параметров следующим образом:

$$\Theta = \left\{\theta : \omega_1 + \omega_2 < 1;\ 0 < \underline{\theta} \le \min\{\omega_0,\ \omega_1,\ \omega_2\} \le \max\{\omega_0,\ \omega_1,\ \omega_2\} \le \overline{\theta} < 1\right\}.$$

Построим оценку σ_t^2:

$$\hat{y}_t(\theta) = \begin{cases} \varepsilon,\ t = 0, \\ \omega_0 + \omega_1 X_{t-1}^2 + \omega_2 \hat{y}_{t-1}(\theta),\ t \ge 1, \end{cases}$$

где $\varepsilon \in [0, \infty)$ – произвольное начальное значение.

Для последующего анализа нам потребуется стационарная эргодическая аппроксимация $\hat{y}_t(\theta)$. Для этого рассмотрим решение рекуррентного стохастического уравнения

$$s_t(\theta) = \omega_0 + \omega_1 X_{t-1}^2 + \omega_2 s_{t-1}(\theta),\ t \in \mathbb{Z}.$$

Исходя из утверждения 5.2.12 в [5], последнее уравнение имеет единственное стационарное эргодическое решение y_t. При этом $y_t(\theta_0) = \sigma_t^2$ п. н. для любого $t \in \mathbb{Z}$ и $\| \hat{y}_t - y_t \|_\Theta \to 0$ п. н., $t \to \infty$, где $\|y\|_\Theta = \sup\limits_{p \in \Theta} |y(p)|$.

Согласно утверждению 5.2.6 в [5], если выполняется условие стационарности (2), то, используя рекуррентные подстановки, можем получить представление для $\hat{y}_t(\theta)$ и $y_t(\theta)$ в явном виде:

$$\hat{y}_t(\theta) = \frac{\omega_0}{1 - \omega_2} + \omega_1 \sum_{k=0}^{t-1} \omega_2^k X_{t-k-1}^2 + \omega_2^t \varepsilon, \tag{3}$$

$$y_t(\theta) = \frac{\omega_0}{1-\omega_2} + \omega_1 \sum_{k=0}^{\infty} \omega_2^k X_{t-k-1}^2. \tag{4}$$

Введем также обозначения $\hat{h}_t(\theta) = \hat{y}_t^{1/2}(\theta)$ и $h_t(\theta) = y_t^{1/2}(\theta)$.

М-оценка

М-оценка была введена П. Хьюбером [6] и представляет собой обобщение оценки по методу максимального правдоподобия. Пусть $f(x)$ – положительная непрерывная функция. Введем обобщенную функцию правдоподобия

$$\hat{L}_n(\theta) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} \ln\left[\frac{1}{\hat{h}_t(\theta)} f\left(\frac{X_t}{\hat{h}_t(\theta)}\right)\right], \ \theta \in \Theta. \tag{5}$$

Тогда М-оценка $\hat{\theta}_n$ вектора параметров θ_0 модели (1) на компакте Θ определяется следующим образом:

$$\hat{\theta}_n = \arg\max_{\theta\in\Theta} \hat{L}_n(\theta). \tag{6}$$

Отметим, что в случае выбора в качестве $f(x)$ функции плотности распределения оценка (6) совпадет с оценкой максимального правдоподобия.

Введем также следующие обозначения:

$$\varphi(x, y) = \ln\{yf(xy)\}, \tag{7}$$

$$\varphi_k(x, y) = \frac{\partial^k}{\partial y^k}\varphi(x, y), \ k = 1, 2, \ldots, \ y \in (0, \infty), \ x \in \mathbb{R}.$$

Найдем $\varphi_1(x, y)$ и $\varphi_2(x, y)$ в явном виде:

$$\varphi_1(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\varphi(x, y) = \frac{1}{yf(xy)}\left(f(xy) + yf'(xy)x\right) = \frac{1}{y} + \frac{f'(xy)x}{f(xy)}.$$

$$\varphi_2(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\varphi(x, y) = -\frac{1}{y^2} + \frac{\left(f''(xy)f(xy) - f'(xy)f'(xy)\right)x^2}{f^2(xy)}.$$

Положив в (7) $x = Z_t$ и $y = \dfrac{\sigma_t}{\hat{h}_t(\theta)}$ и учитывая, что $X_t = \sigma_t Z_t$, функцию (5) можно записать в следующем виде:

$$\hat{L}_n(\theta) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\left(\varphi\left(Z_t, \frac{\sigma_t}{\hat{h}_t(\theta)}\right) - \ln\sigma_t\right).$$

Определим еще несколько функций:

$$l_t(\theta) = \ln\left[\frac{1}{h_t(\theta)} f\left(\frac{X_t}{h_t(\theta)}\right)\right] = \varphi\left(Z_t, \frac{\sigma_t}{h_t(\theta)}\right) - \ln\sigma_t,$$

$$L_n(\theta) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} l_t(\theta),$$

$$L(\theta) = E\{l_0(\theta)\}, \ \theta \in \Theta,$$

а также оценку

$$\tilde{\theta}_n = \arg\max_{\theta\in\Theta} L_n(\theta). \tag{8}$$

Асимптотические свойства оценки (6) были сформулированы в работе [7]. Далее приводятся доказательства этих результатов.

Состоятельность

Лемма 1. *Если распределение Z_t не сконцентрировано в двух точках, $y_0(\theta) = y_0(\theta_0)$ и $\theta \in \Theta$, то $\theta = \theta_0$.*

Доказательство. Согласно (4)

$$y_0(\theta) - y_0(\theta_0) = \left(\frac{\omega_0}{1-\omega_2} - \frac{w_0}{1-w_2}\right) + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\omega_1\omega_2^{k-1} - w_1 w_2^{k-1}\right)X_{-k}^2 = 0. \quad (9)$$

Покажем сначала, что $\omega_1\omega_2^k = w_1 w_2^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Пусть $l = \min\left\{k : k \in \mathbb{N}, \omega_1\omega_2^{k-1} \neq w_1 w_2^{k-1}\right\}$, $D = w_1 w_2^{l-1} - \omega_1\omega_2^{l-1}$. Тогда

$$\left(\frac{\omega_0}{1-\omega_2} - \frac{w_0}{1-w_2}\right) + \left(\omega_1\omega_2^{l-1} - w_1 w_2^{l-1}\right)X_{-l}^2 + \sum_{k=l+1}^{\infty}\left(\omega_1\omega_2^{k-1} - w_1 w_2^{k-1}\right)X_{-k}^2 = 0.$$

$$DZ_{-l}^2\sigma_{-l}^2 = \left(\frac{\omega_0}{1-\omega_2} - \frac{w_0}{1-w_2}\right) + \sum_{k=l+1}^{\infty}\left(\omega_1\omega_2^{k-1} - w_1 w_2^{k-1}\right)X_{-k}^2.$$

$$Z_{-l}^2 = \frac{\left[\left(\frac{\omega_0}{1-\omega_2} - \frac{w_0}{1-w_2}\right) + \sum_{k=l+1}^{\infty}\left(\omega_1\omega_2^{k-1} - w_1 w_2^{k-1}\right)X_{-k}^2\right]}{D\sigma_{-l}^2}.$$

Правая часть равенства представляет собой $\mathcal{F}_{-l-1}$-измеримую величину, а левая часть независима от $\mathcal{F}_{-l-1}$. Тогда равенство возможно только в случае вырожденности Z_{-l}^2. Но по условию леммы распределение Z_t не сконцентрировано в двух точках. Таким образом, приходим к противоречию, и $\omega_1\omega_2^k = w_1 w_2^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. В частности, при $k = 0$ имеем $\omega_1 = w_1$, а при $k = 1$ получаем $\omega_2 = w_2$. Из (9) следует, что $\omega_0 = w_0$. Лемма доказана.

Теорема 1. *Если распределение Z_t не сконцентрировано в двух точках, существует стационарный эргодический процесс (X_t), удовлетворяющий модели (1) при $\theta = \theta_0$, и $E\left\{\log^+\left|\varphi_1(Z_0, y)\right|\right\} < \infty$, где*

$$\log^+ y = \begin{cases} \ln y, & y > 1, \\ 0, & y \le 1, \end{cases}$$

$E\left\{\varphi(Z_0, y)\right\} < E\left\{\varphi(Z_0, 1)\right\}$, $\forall y > 0$, *то M-оценка (6) вектора параметров модели (1) является строго состоятельной.*

Доказательство. Так как $E\left\{\varphi(Z_0, y)\right\} < E\left\{\varphi(Z_0, 1)\right\}$, $\forall y > 0$, то $El_0(\theta) = L(\theta) < \infty$ при любом $\theta \in \Theta$.

Известно (см. утверждение 5.2.12 в [5]), что h_t можно представить в виде $h_t = u\left(X_t, X_{t-1}, \ldots\right)$, где $u(\cdot)$ – измеримая функция. Тогда $l_t = \nu\left(X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots\right)$, где $\nu(\cdot)$ – также измеримая функция. Так как (X_t) – стационарный эргодический процесс, то l_t – также стационарный эргодический процесс. Тогда согласно эргодической теореме А.2 в [8]

$$L_n(\theta) \to L(\theta) \text{ п. н.}, n \to \infty, \theta \in \Theta. \quad (10)$$

Докажем теперь, что $\left\|\hat{L}_n - L_n\right\|_{\Theta} \to 0$ п. н.

Используя теорему Лагранжа о среднем значении, получим

$$\left\|\hat{L}_n - L_n\right\|_{\Theta} = \left\|\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\left[\varphi\left(Z_t, \frac{\sigma_t}{\hat{h}_t(\theta)}\right) - \varphi\left(Z_t, \frac{\sigma_t}{h_t(\theta)}\right)\right]\right\|_{\Theta} \le$$

$$\le \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\left\|\varphi\left(Z_t, \frac{\sigma_t}{\hat{h}_t(\theta)}\right) - \varphi\left(Z_t, \frac{\sigma_t}{h_t(\theta)}\right)\right\|_{\Theta} \le \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\sigma_t\left\|\varphi_1(Z_t, \eta)\right\|_{\Theta}\left\|\frac{1}{\hat{h}_t} - \frac{1}{h_t}\right\|_{\Theta}.$$

Для всякого вектора параметров $\theta \in \Theta$ и любых $x \in \mathbb{R}$, $s \in [0, \infty)$ выполняется соотношение

$$\left(\omega_0 + \omega_1 x^2 + \omega_2 s\right)^{1/2} \ge \omega_0^{1/2} \ge \underline{\theta}^{1/2}.$$

Отсюда следует, что $\hat{h}_t,\ h_t \ge \underline{\theta}^{1/2} > 0$. Тогда

$$\left\|\hat{L}_n - L_n\right\|_\Theta \le \frac{1}{n}\frac{1}{\underline{\theta}}\sum_{t=1}^{n}\sigma_t \left\|\varphi_1(Z_t, \eta)\right\|_\Theta \left\|\hat{h}_t - h_t\right\|_\Theta.$$

Так как $E\left\{\log^+ \left|\varphi_1(Z_0, y)\right|\right\} < \infty$, то по лемме 2.1 в [9] получаем, что

$$\left\|\hat{L}_n - L_n\right\|_\Theta \to 0 \text{ п. н., } n \to \infty. \tag{11}$$

Из (10) и (11) следует, что

$$\hat{L}_n \to L \text{ п. н., } n \to \infty. \tag{12}$$

Пусть θ_0 – истинный параметр модели. Тогда

$$L(\theta_0) - L(\theta) = E\left\{\varphi\left(Z_0, \frac{\sigma_0}{h_0(\theta_0)}\right) - \varphi\left(Z_0, \frac{\sigma_0}{h_0(\theta)}\right)\right\} = \left[\sigma_0 = h_0(\theta_0)\right] =$$

$$= E\left\{\varphi(Z_0, 1) - \varphi\left(Z_0, \frac{\sigma_0}{h_0(\theta)}\right)\right\} \ge 0.$$

Причем равенство достигается только в случае $\sigma_0 \equiv h_0(\theta)$ п. н. Но согласно лемме 1 из этого вытекает, что $\theta = \theta_0$. Значит, функция $L(\theta)$, $\theta \in \Theta$, имеет единственный максимум в точке θ_0. Отсюда с учетом (12) следует строгая состоятельность (см. теорему 5.3.1 в [5]). Теорема доказана.

Асимптотическое распределение

Определим функцию $h_t'(\theta)$:

$$h_t'(\theta) = \left(\left(h_t(\theta)\right)'_{\omega_0},\ \left(h_t(\theta)\right)'_{\omega_1},\ \left(h_t(\theta)\right)'_{\omega_2}\right),$$

где компоненты вектора вычисляются с учетом представления (4):

$$\left(h_t(\theta)\right)'_{\omega_0} = \left(\left[\frac{\omega_0}{1-\omega_2} + \omega_1\sum_{k=0}^{\infty}\omega_2^k X_{t-k-1}^2\right]^{1/2}\right)'_{\omega_0} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\omega_0}{1-\omega_2} + \omega_1\sum_{k=0}^{\infty}\omega_2^k X_{t-k-1}^2\right]^{-1/2}\frac{1}{1-\omega_2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\omega_2}\left[h_t(\theta)\right]^{-1},$$

$$\left(h_t(\theta)\right)'_{\omega_1} = \frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\omega_2^k X_{t-k-1}^2\right]\left[h_t(\theta)\right]^{-1},$$

$$\left(h_t(\theta)\right)'_{\omega_2} = \frac{1}{2}\left[\frac{\omega}{\left(1-\omega_2\right)^2} + \omega_1\sum_{k=0}^{\infty}k\omega_2^{k-1}X_{t-k-1}^2\right]\left[h_t(\theta)\right]^{-1}.$$

Аналогичным образом определяется функция $h_t''(\theta)$, а $\hat{h}_t'(\theta)$ и $\hat{h}_t''(\theta)$ вычисляются с учетом (3).
Также определим

$$L_n'(\theta) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}l_t'(\theta),\ L_n''(\theta) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}l_t''(\theta),$$

$$L'(\theta) = E\left\{l_0'(\theta)\right\},\ L''(\theta) = E\left\{l_0''(\theta)\right\},$$

$$l_t'(\theta) = -\frac{\sigma_t}{h_t(\theta)}\frac{h_t'(\theta)}{h_t(\theta)}\varphi_1\left(Z_t,\ \frac{\sigma_t}{h_t(\theta)}\right),$$

$$l_t''(\theta) = \frac{\sigma_t}{h_t(\theta)}\left[\left(\frac{h_t'(\theta)}{h_t(\theta)}\right)^{\mathrm{T}}\left(\frac{h_t'(\theta)}{h_t(\theta)}\right)\left\{\frac{\sigma_t}{h_t(\theta)}\varphi_2\left(Z_t,\ \frac{\sigma_t}{h_t(\theta)}\right) + 2\varphi_1\left(Z_t,\ \frac{\sigma_t}{h_t(\theta)}\right)\right\} - \frac{h_t''(\theta)}{h_t(\theta)}\right].$$

Обозначим $g_\theta\left(X_0,\ \sigma_0^2\right) = \omega_0 + \omega_1 X_0^2 + \omega_2\sigma_0^2$.

Лемма 2. *Пусть выполнены следующие условия:*

а) выполняются условия теоремы 1;

б) $E\left\{\varphi_2\left(Z_0,\ y\right)\right\} < \infty,\ \forall y > 0$*;*

в) $E\left\|l_t''\right\|_\Theta < \infty,\ E\left\{\varphi_1^2\left(Z_0, 1\right)\right\} < \infty.$

Тогда матрица

$$A = E\left\{\frac{1}{\sigma_0^2}\left[h_0'(\theta_0)\right]^{\mathrm{T}}\left[h_0'(\theta_0)\right]\right\}$$

обратима.

Доказательство. Пусть $\exists x \in \mathbb{R}^d,\ x^{\mathrm{T}}Ax = 0$.

$$x^{\mathrm{T}}E\left\{\frac{1}{\sigma_0^2}\left[h_0'(\theta_0)\right]^{\mathrm{T}}\left[h_0'(\theta_0)\right]\right\}x = 0.$$

$$E\left\{\frac{1}{\sigma_0^2}\left|h_0'(\theta_0)x\right|^2\right\} = 0.$$

$$h_0'(\theta_0)x = 0 \text{ п. н.}$$

Так как $\left(h_t\right)$ – стационарный процесс, то $h_0'(\theta_0)x = 0$ п. н. для любого $t \in \mathbb{Z}$. Продифференцировав выражение $h_1(\theta) = g_\theta\left(X_0,\ h_0(\theta)\right)$ в точке $\theta = \theta_0$, получим

$$h_1'(\theta_0) = \left.\frac{\partial g_\theta\left(X_0,\ \sigma_0^2\right)}{\partial\theta}\right|_{\theta=\theta_0} + \left.\frac{\partial g_\theta\left(X_0,\ \sigma_0^2\right)}{\partial s}\right|_{\theta=\theta_0} h_0'(\theta_0).$$

Умножив справа на x, имеем

$$\left.\frac{\partial g_\theta\left(X_0,\ \sigma_0^2\right)}{\partial\theta}\right|_{\theta=\theta_0} = 0 \text{ п. н.}$$

Согласно лемме 5.7.3 в [5] компоненты вектора $\left.\frac{\partial g_\theta\left(X_0,\ \sigma_0^2\right)}{\partial\theta}\right|_{\theta=\theta_0}$ линейно независимы, из этого следует, что $x = 0$. Значит, A – невырожденная матрица и $\exists A^{-1}$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть выполняются условия теоремы 1 и* $E\left\{\varphi_2\left(Z_0,\ y\right)\right\} < \infty,\ \forall y > 0$*. Тогда*

$$\sqrt{n}\left\|\hat{L}_n' - L_n'\right\|_\Theta \to 0 \text{ п. н.},\ n \to \infty.$$

Доказательство.

$$\sqrt{n}\left\|\hat{L}_n' - L_n'\right\|_\Theta = \frac{1}{\sqrt{n}}\left\|\sum_{t=1}^{n}\left[\frac{\sigma_t}{\hat{h}_t}\frac{\hat{h}_t'}{\hat{h}_t}\varphi_1\left(Z_t,\ \frac{\sigma_t}{\hat{h}_t}\right) - \frac{\sigma_t}{h_t}\frac{h_t'}{h_t}\varphi_1\left(Z_t,\ \frac{\sigma_t}{h_t}\right)\right]\right\|_\Theta \le$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{n}} \left\| \sum_{t=1}^{n} \sigma_t \left(\frac{\hat{h}_t'}{\left(\hat{h}_t\right)^2} \varphi_1\left(Z_t, \frac{\sigma_t}{\hat{h}_t} \right) - \frac{h_t'}{\left(h_t\right)^2} \varphi_1\left(Z_t, \frac{\sigma_t}{h_t} \right) \right) \right\|_\Theta \le$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{n}} \left\| \sum_{t=1}^{n} \sigma_t \left(\frac{\hat{h}_t'}{\left(\hat{h}_t\right)^2} \varphi_1\left(Z_t, \frac{\sigma_t}{\hat{h}_t} \right) - \frac{\hat{h}_t'}{\left(\hat{h}_t\right)^2} \varphi_1\left(Z_t, \frac{\sigma_t}{h_t} \right) + \frac{\hat{h}_t'}{\left(\hat{h}_t\right)^2} \varphi_1\left(Z_t, \frac{\sigma_t}{h_t} \right) - \frac{h_t'}{\left(h_t\right)^2} \varphi_1\left(Z_t, \frac{\sigma_t}{h_t} \right) \right) \right\|_\Theta \le$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^{n} \left\{ \left\| \sigma_t \left(\frac{\hat{h}_t'}{\left(\hat{h}_t\right)^2} \left[\varphi_1\left(Z_t, \frac{\sigma_t}{\hat{h}_t} \right) - \varphi_1\left(Z_t, \frac{\sigma_t}{h_t} \right) \right] \right) \right\|_\Theta + \left\| \sigma_t \varphi_1\left(Z_t, \frac{\sigma_t}{h_t} \right) \left[\frac{\hat{h}_t'}{\left(\hat{h}_t\right)^2} - \frac{h_t'}{\left(h_t\right)^2} \right] \right\|_\Theta \right\} \le$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^{n} \left\{ \left\| \frac{\hat{h}_t'}{\left(\hat{h}_t\right)^2} \right\|_\Theta \left\| \varphi_2(Z_t, \eta) \right\|_\Theta \left\| \sigma_t^2 \right\|_\Theta \left\| \frac{1}{\hat{h}_t} - \frac{1}{h_t} \right\|_\Theta + \left\| \sigma_t \right\|_\Theta \left\| \varphi_1\left(Z_t, \frac{\sigma_t}{h_t} \right) \right\|_\Theta \left\| \frac{\hat{h}_t'}{\left(\hat{h}_t\right)^2} - \frac{h_t'}{\left(h_t\right)^2} \right\|_\Theta \right\} \le$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^{n} \left\{ \frac{1}{\underline{\theta}^2} \left\| \hat{h}_t' \right\|_\Theta \left\| \varphi_2(Z_t, \eta) \right\|_\Theta \left\| \sigma_t^2 \right\|_\Theta \left\| \hat{h}_t - h_t \right\|_\Theta + \left\| \sigma_t \right\|_\Theta \left\| \varphi_1\left(Z_t, \frac{\sigma_t}{h_t} \right) \right\|_\Theta \left\| \frac{\hat{h}_t' - h_t'}{\left(\hat{h}_t\right)^2} + h_t' \left(\frac{1}{\left(h_t\right)^2} - \frac{1}{\left(\hat{h}_t\right)^2} \right) \right\|_\Theta \right\} \le$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^{n} \left\{ \frac{\sigma_t^2}{\underline{\theta}^2} \left\| \hat{h}_t' \right\|_\Theta \left\| \varphi_2(Z_t, \eta) \right\|_\Theta \left\| \hat{h}_t - h_t \right\|_\Theta + \frac{\sigma_t}{\underline{\theta}} \left\| \varphi_1\left(Z_t, \frac{\sigma_t}{h_t} \right) \right\|_\Theta \left\| \hat{h}_t' - h_t' \right\|_\Theta + \frac{2}{\underline{\theta}^{3/2}} \left\| h_t' \right\|_\Theta \left\| \hat{h}_t - h_t \right\|_\Theta \right\}.$$

Легко проверить, что для модели (1) и функций $h_t(\theta)$, $\hat{h}_t(\theta)$ при $\theta \in \Theta$ выполняются условия утверждений 6.1 и 6.2 в [9]. Тогда $E\left\{\log^+ h_{0\Theta}'\right\} < \infty$, а $\left\| \hat{h}_t - h_t \right\|_\Theta \to 0$ п. н. и $\left\| \hat{h}_t' - h_t' \right\|_\Theta \to 0$ п. н. Так как $E\left\{\log^+ \sigma_0\right\} < \infty$, $E\left\{\log^+ \sigma_0^2\right\} \le 2E\left\{\log^+ \sigma_0\right\} < \infty$, $E\left\{\log^+ \left|\varphi_1(Z_0, y)\right|\right\} < \infty$, $\forall y > 0$, $E\left\{\log^+ \left|\varphi_2(Z_0, y)\right|\right\} < \infty$, $\forall y > 0$, то по лемме 2.1 в [9] получаем, что выражение под суммой равномерно ограничено на Θ, а следовательно, $\left\| \hat{L}_n' - L_n' \right\|_\Theta \to 0$ п. н., $n \to \infty$. Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть выполнены следующие условия:*

а) выполняются условия теоремы 1;

б) $E\left\{\varphi_2(Z_0, y)\right\} < \infty$, $\forall y > 0$;

в) $E\left\| l_t'' \right\|_\Theta < \infty$, $E\left\{\varphi_1^2(Z_0, 1)\right\} < \infty$.

Тогда M-оценка (6) имеет асимптотически нормальное распределение:

$$\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n - \theta_0\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, V),$$

$$V = \frac{E\left\{\varphi_1^2(Z_0, 1)\right\}}{\left(E\left\{\varphi_2(Z_0, 1)\right\}\right)^2} A^{-1}, \; A = E\left\{ \frac{1}{\sigma_0^2} \left[h_0'(\theta_0) \right]^{\mathrm{T}} \left[h_0'(\theta_0) \right] \right\}.$$

Доказательство. Из доказательства теоремы 1 следует, что условие *а* обеспечивает $\tilde{\theta}_n \to \theta_0$ п. н., где $\tilde{\theta}_n$ определяется (8). Согласно теореме Лагранжа о среднем значении для достаточно больших значений *n* справедливо равенство

$$L_n'\left(\tilde{\theta}_n\right) = L_n'(\theta_0) + L_n''(\varepsilon_n)\left(\tilde{\theta}_n - \theta_0\right), \tag{13}$$

где $\left|\varepsilon_n - \theta_0\right| < \left|\tilde{\theta}_n - \theta_0\right|$. Из определения $\tilde{\theta}_n$ следует, что $L_n'\left(\tilde{\theta}_n\right) = 0$. Тогда (13) можно записать как

$$L_n''\left(\varepsilon_n\right)\left(\tilde{\theta}_n - \theta_0\right) = -L_n'\left(\theta_0\right). \tag{14}$$

Заметим, что $l_t''(\theta)$ можно представить в виде измеримой функции от стационарного эргодического процесса (см. доказательство теоремы 1). Кроме того, $E\left\|l_t''\right\|_{\Theta} < \infty$. Отсюда в силу эргодической теоремы A.2 в [8] следует, что

$$L_n''(\theta) \to L''(\theta) \text{ п. н., } n \to \infty,\ \theta \in \Theta.$$

Так как $\varepsilon_n \to \theta_0$ п. н., $n \to \infty$, то

$$L_n''\left(\varepsilon_n\right) \to L''\left(\theta_0\right) = F. \tag{15}$$

Найдем теперь матрицу F.

При доказательстве теоремы 1 было показано, что $L(\theta)$ имеет единственный максимум в точке $\theta = \theta_0$. Значит, $L'\left(\theta_0\right) = 0$. Так как Z_0 и $\dfrac{h_0'\left(\theta_0\right)}{h_0\left(\theta_0\right)}$ независимы и $h_0\left(\theta_0\right) = \sigma_0$, то

$$L'\left(\theta_0\right) = -E\left\{\varphi_1\left(Z_0, 1\right)\right\} E\left\{\frac{h_0'\left(\theta_0\right)}{h_0\left(\theta_0\right)}\right\} = 0. \tag{16}$$

Заметим, что по крайней мере одна из компонент вектора $h'\left(\theta_0\right)$ строго положительна. Например,

$$\left(h_0\left(\theta_0\right)\right)_{\omega_0}' = \left(\left[\frac{w_0}{1 - w_2} + w_1 \sum_{k=0}^{\infty} w_2^k X_{-k-1}^2\right]^{1/2}\right)_{\omega_0}' =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{w_0}{1 - w_2} + w_1 \sum_{k=0}^{\infty} w_2^k X_{-k-1}^2\right]^{-1/2} \frac{1}{1 - w_2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1 - w_2}\left[h_0\left(\theta_0\right)\right]^{-1} > 0.$$

Значит, $E\left\{\dfrac{h_0'\left(\theta_0\right)}{\sigma_0}\right\} \neq 0$, и из (16) следует, что $E\left\{\varphi_1\left(Z_0, 1\right)\right\} = 0$.

Тогда

$$F = E\left\{\varphi_2\left(Z_0, 1\right)\right\} A.$$

По лемме 2 матрица A невырожденная, а значит, и матрица F невырожденная.

Тогда из (15) получаем, что для достаточно больших значений n $\exists\left(L_n''\right)^{-1} = F^{-1}\left(1 + o(1)\right)$, и (14) принимает вид

$$\sqrt{n}\left(\tilde{\theta}_n - \theta_0\right) = -\sqrt{n} L_n'\left(\theta_0\right) F^{-1}\left(1 + o(1)\right).$$

Заметим, что $l_n'\left(\theta_0\right) = -\varphi_1\left(Z_t, 1\right)\dfrac{h_t'\left(\theta_0\right)}{\sigma_t}$ – стационарный эргодический разностный мартингал-процесс относительно фильтрации $\left(\mathcal{F}_t\right)_{t \in \mathbb{N}}$. Тогда, используя теорему Крамера – Вольда и теорему 23.1 в [10], заключаем, что

$$\sqrt{n}\left(\tilde{\theta}_n - \theta_0\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, V). \tag{17}$$

По теореме Лагранжа о среднем значении имеем

$$L_n'\left(\tilde{\theta}_n\right) - L_n'\left(\hat{\theta}_n\right) = L_n''\left(\tilde{\varepsilon}_n\right)\left(\tilde{\theta}_n - \hat{\theta}_n\right), \tag{18}$$

где $\left|\tilde{\varepsilon}_n - \hat{\theta}_n\right| < \left|\tilde{\theta}_n - \hat{\theta}_n\right|$.

Так как $\tilde{\varepsilon}_n \to \tilde{\theta}_n$ п. н., а $\tilde{\theta}_n \to \theta_0$ п. н., то по аналогии с (15) получаем

$$L_n''(\tilde{\varepsilon}_n) \to L''(\theta_0) = F.$$

Кроме того, $L_n'(\tilde{\theta}_n) = 0 = \hat{L}_n'(\hat{\theta}_n)$. Исходя из этого, (18) можно переписать как

$$\sqrt{n}\left|\tilde{\theta}_n - \hat{\theta}_n\right| = \sqrt{n}\left(\hat{L}_n'\left(\hat{\theta}_n\right) - L_n'\left(\hat{\theta}_n\right)\right)F^{-1}\left(1 + o(1)\right).$$

Тогда из леммы 3 следует, что

$$\sqrt{n}\left|\tilde{\theta}_n - \hat{\theta}_n\right| \to 0 \text{ п. н.} \tag{19}$$

Таким образом, из (17) и (19) вытекает, что $\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n - \theta_0\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, V)$. Теорема доказана.

Заключение

При выполнении определенных условий М-оценка параметров модели GARCH(1, 1) является строго состоятельной и имеет асимптотически нормальное распределение. С помощью метода М-оценки можно исследовать модели с различными распределениями остатков. В частности, при анализе финансовых и экономических временных рядов используются устойчивые и умеренно устойчивые (tempered stable [11]) распределения. Такие модели позволяют учитывать особенности, характерные для реальных данных: кластеризацию волатильности (чередование периодов высокой и низкой волатильности), тяжелые хвосты и асимметричность остатков.

Библиографические ссылки

1. Engle RF. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica*. 1982;50(4):987–1007. DOI: 10.2307/1912773.
2. Bollerslev T. Generalized autoregressive conditional heteroscedasticity. *Journal of Econometrics*. 1986;31(3):307–327. DOI: 10.1016/0304-4076(86)90063-1.
3. Lee S-W, Hansen BE. Asymptotic theory for the GARCH(1, 1) quasi-maximum likelihood estimator. *Econometric Theory*. 1994;10(1):29–52. DOI: 10.1017/S0266466600008215.
4. Терех ВС. О стационарности процесса APGARCH(p, q). В: *Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения. Материалы Международной научной конференции, посвященной 80-летию профессора, доктора физико-математических наук Г. А. Медведева; 23–26 февраля 2015 г.; Минск, Беларусь*. Минск: РИВШ; 2015. с. 326–328.
5. Straumann D. *Estimation in conditionally heteroscedastic time series models*. Berlin: Springer; 2005. 238 p. (Lecture notes in statistics; 181).
6. Huber PJ. *Robust statistics*. New York: Wiley; 1981. 320 p.
7. Терех ВС. Построение и исследование свойств М-оценки параметров модели GARCH(1,1). В: *Сборник работ 72-й научной конференции студентов и аспирантов Белорусского государственного университета; 11–22 мая 2015 г.; Минск, Беларусь. Часть 1*. Минск: БГУ; 2015. с. 112–115.
8. Francq C, Zakoian J-M. *GARCH models: structure, statistical inference and financial applications*. Chichester: John Wiley & Sons; 2010. 504 p.
9. Straumann D, Mikosch T. Quasi-maximum-likelihood estimation in conditionally heteroscedastic time series: a stochastic recurrence equations approach. *Annals of Statistics*. 2006;34(5):2449–2495. DOI: 10.1214/009053606000000803.
10. Billingsley P. *Convergence of probability measures*. 2nd edition. New York: John Wiley & Sons; 1968. 253 p.
11. Rosinski J. Tempering stable processes. *Stochastic Processes and their Applications*. 2007;117(6):677–707. DOI: 10.1016/j.spa.2006.10.003.

References

1. Engle RF. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica*. 1982;50(4):987–1007. DOI: 10.2307/1912773.
2. Bollerslev T. Generalized autoregressive conditional heteroscedasticity. *Journal of Econometrics*. 1986;31(3):307–327. DOI: 10.1016/0304-4076(86)90063-1.
3. Lee S-W, Hansen BE. Asymptotic theory for the GARCH(1, 1) quasi-maximum likelihood estimator. *Econometric Theory*. 1994;10(1):29–52. DOI: 10.1017/S0266466600008215.
4. Tserakh US. [About APGARCH(p, q) model stationarity]. In: *Teoriya veroyatnostei, sluchainye protsessy, matematicheskaya statistika i prilozheniya. Materialy Mezhdunarodnoi nauchnoi konferentsii, posvyashchennoi 80-letiyu professora, doktora fiziko-matematicheskikh nauk G. A. Medvedeva; 23–26 fevralya 2015 g.; Minsk, Belarus'* [Probability theory, random processes, mathematical statistics, and applications. Proceedings of the International scientific conference dedicated to the 80th anniversary of professor, doctor of physical and mathematical sciences G. A. Medvedev; 2015 February 23–26; Minsk, Belarus]. Minsk: National Institute for Higher Education; 2015. p. 326–328. Russian.

5. Straumann D. *Estimation in conditionally heteroscedastic time series models*. Berlin: Springer; 2005. 238 p. (Lecture notes in statistics; 181).

6. Huber PJ. *Robust statistics*. New York: Wiley; 1981. 320 p.

7. Tserakh US. [M-estimate of GARCH(1, 1) model parameters computation and exploration]. In: *Sbornik rabot 72-i nauchnoi konferentsii studentov i aspirantov Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta; 11–22 maya 2015 g.; Minsk, Belarus'. Chast' 1* [Collection of works of the 72nd scientific conference of students and postgraduates of the Belarusian State University; 2015 May 11–22; Minsk, Belarus. Part 1]. Minsk: Belarusian State University; 2015. p. 112–115. Russian.

8. Francq C, Zakoian J-M. *GARCH models: structure, statistical inference and financial applications*. Chichester: John Wiley & Sons; 2010. 504 p.

9. Straumann D, Mikosch T. Quasi-maximum-likelihood estimation in conditionally heteroscedastic time series: a stochastic recurrence equations approach. *Annals of Statistics*. 2006;34(5):2449–2495. DOI: 10.1214/009053606000000803.

10. Billingsley P. *Convergence of probability measures*. 2nd edition. New York: John Wiley & Sons; 1968. 253 p.

11. Rosinski J. Tempering stable processes. *Stochastic Processes and their Applications*. 2007;117(6):677–707. DOI: 10.1016/j.spa.2006.10.003.

Статья поступила в редколлегию 14.04.2020.
Received by editorial board 14.04.2020.