

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ПОТРЕБИТЕЛЯ

А. В. Каптуров,

студент экономического факультета

Белорусского государственного университета, г. Минск

Научный руководитель:

В. С. Мастяница,

кандидат физико-математических наук,

доцент кафедры аналитической экономики и эконометрики

Белорусского государственного университета, г. Минск

Аннотация. В статье рассматривается использование функций двух переменных и нахождение частных производных для нахождения комбинации двух товаров, обеспечивающих получение максимальной полезности. Дополнительно исследуется способ вычисления различных видов эластичности.

Ключевые слова: полезность, эластичность, функция двух переменных.

SIMULATION OF CONSUMER CONDUCT

A.V. Kapturov,

Student of Economics

Belarusian State University, Minsk

Abstract. The article discusses the use of functions of two variables and the search for partial derivatives to find a combination of two products that provide maximum utility. Additionally, a method for calculating various types of elasticity is investigated.

Key words: utility, elasticity, function of two variables.

Любой рациональный потребитель желает максимизировать полезность, получаемую им от потребления различных благ. Это важно понимать при прогнозировании его поведения. Актуальность данного исследования подкрепляется необходимостью знать, как различные независимые переменные влияют на функцию полезности. Рассмотрим следующую задачу.

Потребитель желает максимизировать уровень удовлетворения своих потребностей, $U \rightarrow \max$. Но его желание нужно согласовать с его финансовыми возможностями. Ему нельзя выйти за пределы бюджетного ограничения, т.е. его затраты не должны превышать доход. Дополнительно найдём значения различных видов эластичностей спроса [1,2].

Пусть функция полезности, графически изображаемая как кривая безразличия, имеет уравнение вида:

$$U(x; y) = (x + 5)(y + 10) \rightarrow \max$$

$$xy + 10x + 5y + 50 \rightarrow \max$$

Бюджетное ограничение представляет собой систему вида:

$$\begin{cases} p_x x + p_y y \leq I, \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

Из-за неявного задания функции составим функцию Лагранжа, включив бюджетное ограничение в роль уравнения связи (при нахождении условного экстремума функции двух переменных).

$$L(x, y, \lambda) = (x + 5)(y + 10) + \lambda(p_x x + p_y y - I)$$

Вычислим частные производные первого порядка по каждой из трёх переменных для нахождения стационарных точек.

$$\begin{cases} \frac{\partial L(x, y, \lambda)}{\partial x} = \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} + \lambda p_x = y + 10 + \lambda p_x = 0 \\ \frac{\partial L(x, y, \lambda)}{\partial y} = \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} + \lambda p_y = x + 5 + \lambda p_y = 0 \\ \frac{\partial L(x, y, \lambda)}{\partial \lambda} = p_x x + p_y y - I = 0 \end{cases} \quad (1), (2), (3)$$

Выделим из (1) и (2) множитель Лагранжа λ . Из (1) получим:

$$\lambda p_x = -y - 10; \quad \lambda = \frac{-y - 10}{p_x}, \text{ а из (2):}$$

$$\lambda p_y = -x - 5; \quad \lambda p_x = \frac{-x - 5}{p_y}. \text{ Соотнесём полученные уравнения:}$$

$$\frac{-y - 10}{p_x} = \frac{-x - 5}{p_y}, \text{ где } \frac{y + 10}{p_x} = \frac{x + 5}{p_y} \quad (4)$$

Предельная полезность, она же частная производная для каждого из товара отдельно представлена как:

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} = MU_x = y + 10 \quad \text{и} \quad \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} = MU_y = x + 5$$

Откуда получим новое соотношение:

$$\frac{MU_x}{p_x} = \frac{MU_y}{p_y}$$

которое называется вторым законом Госсена (условие равновесие потребителя).

$$\text{Преобразуем (4) в вид } xp_x + 5p_x = yp_y + 10p_y: \quad (5)$$

Теперь из (3) отдельно выразим $x p_x$ и отдельно $y p_y$

$$x p_x = -p_y y + I \quad \text{и} \quad y p_y = -p_x x + I$$

Подставив полученные выражения в (5) найдем x и y :

$$x p_x + 5 p_x = I - x p_x + 10 p_y; \quad y p_y + 10 p_y = I - y p_y + 5 p_x;$$

$$2x p_x = I - 5 p_x + 10 p_y; \quad 2y p_y = I + 5 p_x - 10 p_y$$

$$x = \frac{I - 5 p_x + 10 p_y}{2 p_x}; \quad y = \frac{I + 5 p_x - 10 p_y}{2 p_y}$$

Пусть $p_x = 2\$$, $p_y = 1\$$, а $I = 100\$$. Тогда стационарная точка $A(x; y)$ является точкой максимума. Определитель из вторых частных производных отрицателен.

Всего мы максимум можем купить 50 ед. блага x или 100 ед. блага y .

Однако Макса интересует максимальная полезность, поэтому он выбирает оптимальный объём благ:

$$x_{opt} = \frac{100 - 5 \cdot 2 + 10 \cdot 1}{2 \cdot 2} = 25 \text{ ед.} \quad y_{opt} = \frac{100 + 5 \cdot 2 - 10 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 50 \text{ ед.}$$

Значение полезности составит:

$$z_{\max} = U(25; 50) = (25 + 5)(50 + 10) = 1800 \text{ ютилей.}$$

Определим уравнения кривой безразличия и линии бюджетного ограничения, чтобы изобразить оптимум и сами линии графически:

Из $p_x x + p_y y = I$; тогда $2x + y = 100$; откуда $y = 100 - 2x$ есть уравнение линии бюджетного ограничения. Мы нашли, что $xu + 10x + 5y + 50 = 1800$; тогда найдём уравнение кривой безразличия:

$$xu + 5y = 1750 - 10x; \quad y(x + 5) = 1750 - 10x; \quad y = \frac{1750 - 10x}{x + 5}.$$

Изобразим графики функций и точку равновесия потребителя:

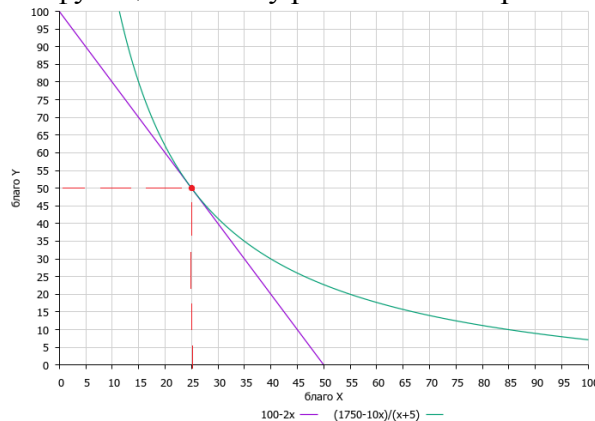


Рисунок1 - Равновесие потребителя
Источник: [3]

Теперь вычислим значения различных видов эластичностей спроса:

$$E_{p_x}(x) = \frac{p_x}{x(p_x, p_y, I)} \cdot \frac{\partial x(p_x, p_y, I)}{\partial p_x} = \frac{2p_x^2}{I - 5p_x + 10p_y} \cdot \frac{-5 \cdot 2p_x - 2(I - 5p_x + 10p_y)}{4p_x^2} =$$

$$= \frac{-10p_x - 2I + 10p_x - 20p_y}{2(I - 5p_x + 10p_y)} = -\frac{I + 10p_y}{I - 5p_x + 10p_y}$$

$$E_{p_y}(x) = \frac{p_y}{x(p_x, p_y, I)} \cdot \frac{\partial x(p_x, p_y, I)}{\partial p_y} = \frac{2p_x p_y}{I - 5p_x + 10p_y} \cdot \frac{10 \cdot 2p_x}{4p_x^2} =$$

$$= \frac{40p_x^2 \cdot p_y}{(I - 5p_x + 10p_y) \cdot 4p_x^2} = \frac{10p_y}{I - 5p_x + 10p_y}$$

$$E_{p_x}(y) = \frac{p_x}{y(p_x, p_y, I)} \cdot \frac{\partial y(p_x, p_y, I)}{\partial p_x} = \frac{2p_x p_y}{I + 5p_x - 10p_y} \cdot \frac{5 \cdot 2p_y}{4p_y^2} =$$

$$= \frac{20p_x \cdot p_y^2}{(I + 5p_x - 10p_y) \cdot 4p_y^2} = \frac{5p_x}{I + 5p_x - 10p_y}$$

$$E_{p_y}(y) = \frac{p_y}{y(p_x, p_y, I)} \cdot \frac{\partial y(p_x, p_y, I)}{\partial p_y} = \frac{2p_y^2}{I + 5p_x - 10p_y} \cdot \frac{-10 \cdot 2p_y - 2(I + 5p_x - 10p_y)}{4p_y^2} =$$

$$= \frac{-20p_y - 2I - 10p_x + 20p_y}{2(I + 5p_x - 10p_y)} = -\frac{I + 5p_x}{I + 5p_x - 10p_y}$$

$$E_I(x) = \frac{I}{x(p_x, p_y, I)} \cdot \frac{\partial x(p_x, p_y, I)}{\partial I} = \frac{2p_x I}{I - 5p_x + 10p_y} \cdot \frac{2p_x}{4p_x^2} = \frac{I}{I - 5p_x + 10p_y}$$

$$E_I(y) = \frac{I}{y(p_x, p_y, I)} \cdot \frac{\partial y(p_x, p_y, I)}{\partial I} = \frac{2p_y I}{I + 5p_x - 10p_y} \cdot \frac{2p_y}{4p_y^2} = \frac{I}{I + 5p_x - 10p_y}$$

Первоначально цена блага x была 2\$, блага y была 1\$, а доход был 100\$.

Тогда найдём значения эластичностей:

$$1) E_{p_x}(x) = -\frac{I + 10p_y}{I - 5p_x + 10p_y} = -\frac{100 + 10 \cdot 1}{100 - 5 \cdot 2 + 10 \cdot 1} = -1,1$$

$$2) E_{p_y}(x) = \frac{10p_y}{I - 5p_x + 10p_y} = \frac{10 \cdot 1}{100 - 5 \cdot 2 + 10 \cdot 1} = 0,1$$

$$3) E_{p_x}(y) = \frac{5p_x}{I + 5p_x - 10p_y} = \frac{5 \cdot 2}{100 + 5 \cdot 2 - 10 \cdot 1} = 0,1$$

$$4) E_{p_y}(y) = -\frac{I + 5p_x}{I + 5p_x - 10p_y} = -\frac{100 + 5 \cdot 2}{100 + 5 \cdot 2 - 10 \cdot 1} = -1,1$$

$$5) E_I(x) = \frac{I}{I - 5p_x + 10p_y} = \frac{100}{100 - 5 \cdot 2 + 10 \cdot 1} = 1$$

$$6) E_I(y) = \frac{I}{I + 5p_x - 10p_y} = \frac{100}{100 + 5 \cdot 2 - 10 \cdot 1} = 1$$

Эластичность спроса по цене у обоих благ составляет -1,1. Это значит, что при 1% увеличении цены, спрос на них падает на 1,1%. Перекрёстная эластичность спроса, зависящая от цены другого блага, составляет 0,1. Значит блага независимые, как например плитка шоколада (100гр.) и красная рыба (100гр.). При увеличении цены одного из благ на 1%, спрос на другой товар вырастет на 0,1%. Эластичность спроса по доходу у обоих благ составила 1. Значит, блага являются нормальными и при увеличении дохода на 1%, спрос на каждое из благ тоже вырастет на 1%. Задача исследована.

Список использованных источников:

1. Сборник задач и упражнений по высшей математике для экономич. спец. : учеб.-метод. пособие / В. С. Мастяница, С. В. Рогозин, М. В. Дубатовская. – Минск : БГУ, 2018. – 335 с.
2. Вэриан, Х.Р. Микроэкономика. Промежуточный уровень. Современный подход : учеб. Для вузов
3. Микроэкономика : учеб.-метод. пособие / А. В. Коваленко, А. В. Бельский. – Минск : БГУ, 2013. – 368 с.