УДК 004.94

ВИЗУАЛИЗАЦИЯ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

И.С. Козловская, О.А. Ковнацкая

Белорусский государственный университет
Минск, Беларусь, Kozlovskaja@bsu.by, Kovnatskaya@bsu.by

В работе рассматриваются методы визуализации решения задач математической физики.

***Ключевые слова*:** Уравнения математической математики; математическое моделирование; математические пакеты.

VISUALIZATION OF SOLUTIONS TO PROBLEMS FOR EQUATIONS OF MATHEMATICAL PHYSICS

I.S. Kozlovskaya, O.A. Kovnatskaya

Belarusian State University
Minsk, Belarus, Kozlovskaja@bsu.by, Kovnatskaya@bsu.by

The paper discusses methods of visualization of solving problems of mathematical physics.

Key words: Equations of mathematical mathematics; math modeling; math packages.

Введение. На кафедре компьютерных технологий и систем факультета прикладной математики и информатики читается курс лекций «Уравнения математической физики». Дисциплина «Уравнения математической физики» посвящена постановке, исследованию и решению краевых задач для уравнений в частных производных, имеющих очевидную физическую интерпретацию. Первоначально круг таких задач ограничивался рамками классической физики, но применяемые при их исследовании методы являются преимущественно математическими и в значительной степени опираются на курсы «Математический анализ» и «Обыкновенные дифференциальные уравнения», а также тесно связаны с циклами дисциплин по физике и численным методам. В настоящее время область применения изучаемых в данном курсе уравнений и методов вышла за рамки классической физики и используется в химии, геологии, микроэлектронике и даже экономике. В результате изучения данной дисциплины студенты должны получить навыки математического моделирования реальных (в первую очередь физических) процессов на основе краевых задач для уравнений в частных производных. Хотя лекции ограничены изучением только аналитических методов решения модельных задач, практические и лабораторные занятия включают в себя использование современных пакетов численного моделирования на основе уравнений в частных производных.

При изучении студентами факультета прикладной математики и информатики курса «Уравнения математической физики», а также связанных с ним специальных курсов, основное внимание традиционно уделяется теоретическим вопросам для того, чтобы обеспечить в первую очередь классическую математическую подготовку студентов. Вместе с тем абстрактный уровень общенаучных дисциплин накладывает негативный отпечаток на усвоение курсов, приводит студентов к мнению о ненужности их изучения. Выход из создавшегося положения видится в проникновении элементов научных исследований в учебный процесс, в привлечении примеров практического применения методов изучаемых дисциплин.

В математической физике решение многих задач осуществляется громоздкими трудоемкими математическими методами. Применение вычислительной техники просто необходимо при численном решении рассматриваемых задач, чтобы обеспечить проникновение элементов научных исследований в учебный процесс, привлечь примеры практического применения методов изучаемых дисциплин. Студенты должны не только сами составлять программы при решении изучаемых задач, но и экспериментировать с готовыми программными средствами открытого типа. В этом направлении открываются широкие перспективы для использования мощных математических пакетов Mathcad, MatLab, Mathematica. Поэтому большое внимание уделяется и решению такой проблемы, как помощь современных средств компьютерной математики в более глубоком понимании студентами изучаемых ими классических математических тем. В рамках учебного курса «Уравнения математической физики» проводится работа по приобщению студентов к средствам современной компьютерной математики. В качестве базового инструментария выбран пакет Mathematica, являющийся на данный момент, по-видимому, наиболее мощным средством в своем классе программ и сочетающий в себе развитые графические функции, удобные средства программирования, позволяющий создавать и использовать процедуры и функции пользователя, имеющий развитые возможности по созданию и использованию динамических массивов и переменных. Все это позволяет сосредоточиться не на программировании задач, а на ее физической и математической стороне.

Непосредственно в рамках поддержки курса «Уравнения математической физики» студентам предлагается для изучения и самостоятельной разработки темы и примеры, базирующиеся на изучаемом ими материале, среди которых, можно отметить такие, как классификация уравнений с частными производными, расчеты, связанные с методами решения задачи Коши для уравнений гиперболического и параболического типа и методом разделения переменных для начально-краевых задач в областях различного типа и т.д. Важной задачей представляется разработка студентами дифференциальных моделей, описывающих различные физические, биологические и экономические процессы. Возможность проведения студентами численных экспериментов, визуализация результатов, разработка и реализация тех или иных моделей повышают интерес студентов к учебному курсу, способствуют более глубокому пониманию изучаемого ими материала, позволяет пройти все этапы математического моделирования от построения математической модели до вычислительного эксперимента и анализа результатов.

Типичные примеры. Рассмотрим некоторые примеры визуализации решения задач математической физики (рис. 1–3):

1. Решить задачу о колебании струны $0 < x < l$ с закрепленными концами, если в начальном положении струна находится в покое ($u_0 = 0$), а начальная скорость u_1 задается формулой: $u_1(x) = v_0 = \text{const}$, $x \in [0, l]$.

```
a=1;l=4;v0=2;
weqn=D[u[x,t],{t,2}]-a^2 D[u[x,t],{x,2}]==0;
bc={u[0,t]==0,u[l,t]==0};
ic = {u[x, 0] ==0,u^(0,1)[x, 0] ==v0};
dsol=DSolve[{weqn,bc,ic},u,{x,t}]/.{K[1]->m}
asol[x_,t_]=u[x,t]/.dsol[[1]]/.{∞->4}//Activate
Animate[Plot[asol[x,t],{x,0,l},PlotRange->{-5,5},ImageSize->Medium,PlotStyle->Red],{t,0,2 Pi},SaveDefinitions->True]
```

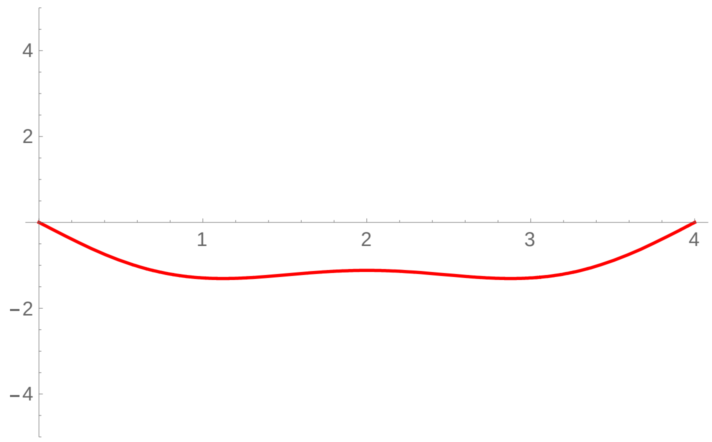


Рис. 1. Пример визуализации

2. Моделирование колебания круглой мембраны с радиусом 1 с жестко закрепленным краем.

```
eqn=r D[u[r,t],{t,2}]==D[r D[u[r,t],r],r];

bc=u[1,t]==0;

ic={u[r,0]==0,Derivative[0,1][u][r,0]==1};

sol=DSolve[{eqn,bc,ic},u[r,t],{r,t}]//TraditionalForm;

h[r_,t_]=u[r,t]/.sol[[1]]/.{∞->3}//Activate//N;

ListAnimate[Table[Plot3D[Evaluate[h[r,t]/.{r->Sqrt[x^2+y^2]}],{x,y}∈Disk[],PlotRange->{-1,1},Ticks->None,Mesh->True,PlotStyle->Yellow,Boxed->False,Axes->False,ImageSize->Medium,AspectRatio->1,Background->Lighter[Orange,0.85]],{t,0,10.45,0.05}]]
```

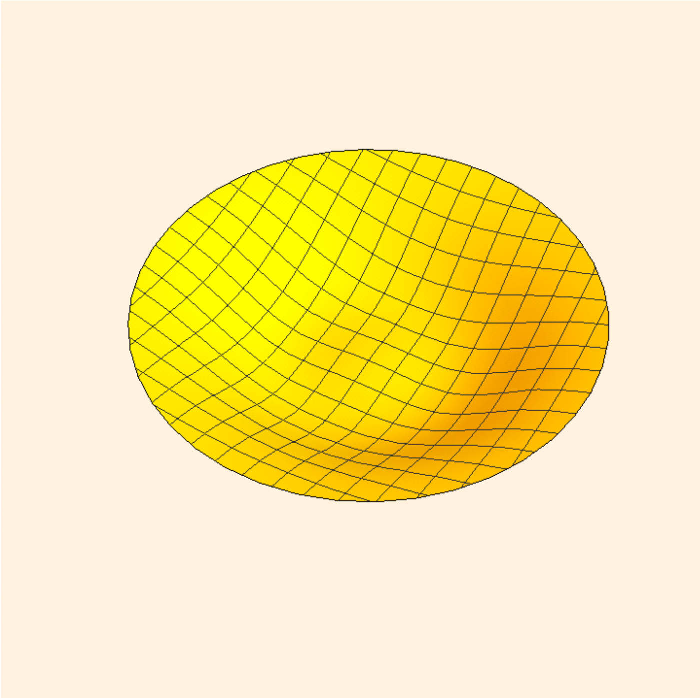


Рис. 2. Пример визуализации

3.Решение краевой задачи для уравнения Лапласа внутри кольцевого сектора

$1 \le \rho \le 2, \quad 0 \le \varphi \le \pi$ со следующими граничными условиями:

$$u(\rho,0) = u(\rho,\pi) = 0, \quad u(1,\varphi) = \sin\varphi, \quad u(2,\varphi) = 0.$$

Численное решение имеет вид:

```
sol=NDSolveValue[{Laplacian[u[ρ,ϕ],{ρ,ϕ},"Polar"]==0,
   DirichletCondition[u[ρ,ϕ]==0,1<=ρ<=2&&ϕ==0],

DirichletCondition[u[ρ,ϕ]==0,1<=ρ<=2&&ϕ==π],DirichletCondition[u[ρ,ϕ]==Si
n[ϕ],ρ==1&&0<=ϕ<=π],DirichletCondition[u[ρ,ϕ]==0.,ρ==2&&0<=ϕ<=π]},u,{ρ
,1,2},{ϕ,0,π}];
```

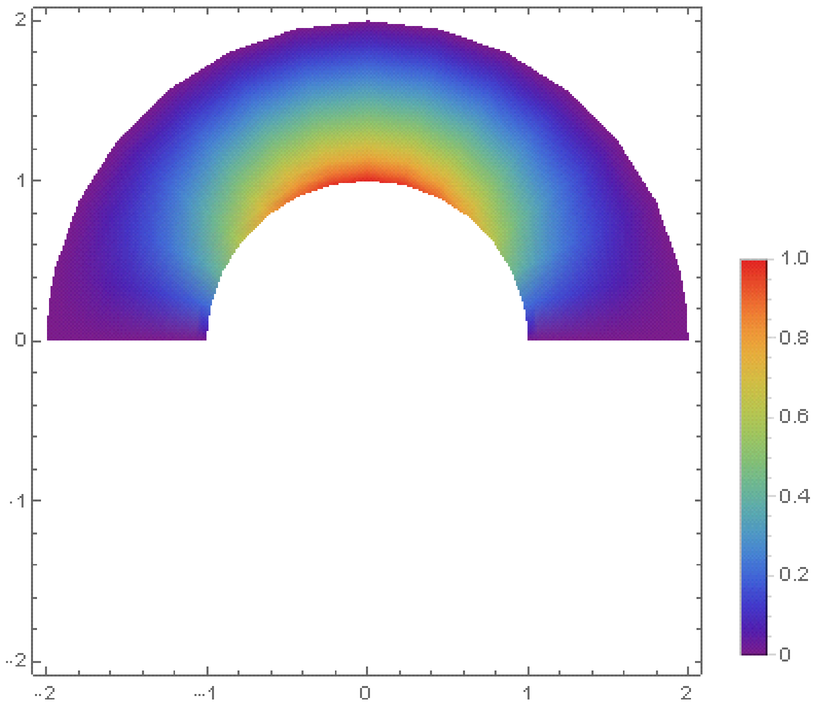
```
gr00=DensityPlot[sol[ρ,ϕ],{ρ,1,2},{ϕ,0,π},ColorFunction->"Rainbow",PlotLegends->Automatic];
```

```
Show[gr00/.GraphicsComplex[array1_,rest___]:>GraphicsComplex[(#[[1]]{Cos[#[[2]]],Sin[#[[2]]]})&/@array1,rest],PlotRange->2{{-1,1},{-1,1}}]
```

Аналитическое решение получается следующее:

```
DSolve[{Laplacian[u[ρ,ϕ],{ρ,ϕ},"Polar"]==0,u[1,ϕ]==Sin[ϕ],u[2,ϕ]==0},u[ρ,ϕ],{ρ,ϕ},Assumptions->1<=ρ<=2]
```

Out[3]= {{u[ρ,ϕ]->-(((-4+ρ^2) Sin[ϕ])/(3 ρ))}}



,

Рис. 3. Пример визуализации

и аналитически:

```
DSolve[{Laplacian[u[ρ,ϕ],{ρ,ϕ},"Polar"]==0,u[1,ϕ]==Sin[ϕ],u[2,ϕ]==0},u[ρ,ϕ],{ρ,ϕ},Assumptions->1<=ρ<=2]
```

Out[3]= {{u[ρ,ϕ]->-(((-4+ρ^2) Sin[ϕ])/(3 ρ))}}.

Заключение. Таким образом, визуализация полученных решений позволяет глубже понять происходящие физические процессы, вызывает интерес к проведению научных исследований, а также стимулирует проведение различных научных экспериментов [1].

Библиографические ссылки

1. Электронный научно-методический журнал «ПЕДАГОГИКА ИНФОРМАТИКИ». Минск. 2020. URL: // http://pcs.bsu.by/ (дата обращения: 22.09.2020).