3. Kim Y. S., Rachev S. T., Chung D. M. The Modified Tempered Stable Distribution, GARCH Models and Option Pricing // Probability and Mathematical Statistics. 2006. Vol. 29. № 1., P. 91– 117.
4. Терех В. С. Построение и исследование свойств М-оценки параметров модели GARCH(1,1) // Сборник работ 72-ой научной конференции студентов и аспирантов БГУ, Минск, 11-22 мая 2015 г. : в 3 ч., Минск, БГУ, 2015, ч. 1. С. 112– 115.

ИССЛЕДОВАНИЕ СОСТОЯТЕЛЬНОСТИ И АСИМПТОТИЧЕСКОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ GARCH(1,1) МЕТОДОМ ЭМПИРИЧЕСКОЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

В. С. Терех

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

E-mail: vladimir.terekh@gmail.com

Предложен метод оценки параметров модели GARCH(1,1) с устойчивыми распределениями, использующий эмпирическую характеристическую функцию распределения остатков модели. Описан процесс построения оценки, сформулированы условия, при выполнении которых оценка является строго состоятельной. Исследовано асимптотическое распределение оценки.

Ключевые слова: модель GARCH; устойчивое распределение; характеристическая функция; оценка параметров; строгая состоятельность; асимптотическое распределение.

Модель GARCH [1] является популярным инструментом для анализа экономических и финансовых временных рядов. Актуальной является задача исследования моделей GARCH с распределениями остатков, отличными от нормального. Особой популярностью пользуются устойчивые распределения. Такие распределения являются обобщением нормального распределения и имеют ряд свойств, характерных для реальных данных: кластеризация волатильности, тяжелые хвосты, несимметричность. В работах [2] и [3] проводится сравнительный анализ моделей GARCH с устойчивыми и умеренно устойчивыми распределениями. Использование таких распределений позволяет получить адекватные результаты, однако в то же время создает ряд трудностей, связанных с оцениванием параметров модели. Устойчивые распределения не имеют явного вида функции плотности (за исключением нескольких частных случаев), что затрудняет применение метода максимального правдоподобия. В данной работе рассматривается метод оценки параметров модели GARCH(1,1) с устойчивыми распределениями, использующий эмпирическую характеристическую функцию распределения остатков.

Процесс $X_t, t \in \mathbb{Z}$ удовлетворяет модели GARCH(1,1) если

$$\begin{cases} X_t = \sigma_t Z_t, \\ \sigma_t^2 = \omega_0 + \omega_1 X_{t-1}^2 + \omega_2 \sigma_{t-1}^2, \end{cases}, \quad (1)$$

где $\{Z_t, t \in \mathbb{Z}\}$ – независимые, одинаково распределенные случайные величины, а $\omega_0 \geq 0, \omega_1 > 0, \omega_2 > 0$ – параметры модели.

Пусть $0 < \alpha \leq 2, -1 \leq \beta \leq 1$. Случайная величина X имеет стандартное α -устойчивое распределение $stdS_\alpha(\beta)$, если ее характеристическая функция имеет вид

$$\phi_X(u) = E[e^{iuX}] = \begin{cases} \exp\left(-|u|^\alpha \left(1 - i\beta(\operatorname{sgn} u) \tan \frac{\pi\alpha}{2}\right)\right), & \alpha \neq 1 \\ \exp\left(-|u| \left(1 + i\beta \frac{2}{\pi}(\operatorname{sgn} u) \ln |u|\right)\right), & \alpha = 1, \end{cases} \quad (2)$$

где

$$\operatorname{sgn} t = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t = 0, \\ -1, & t < 0. \end{cases}$$

Пусть в модели (1) случайные величины Z_t имеют распределение $stdS_\alpha(\beta)$ и их характеристическая функция описывается соотношением (2). Обозначим $\theta = (\omega_0, \omega_1, \omega_2)'$ – вектор параметров модели GARCH(1,1), $\theta \in \Theta$, где Θ является компактным подмножеством на $\{[0, \infty) \times (0, \infty)^2\}$; $\lambda = (\alpha, \beta)'$ вектор параметров стандартного α -устойчивого распределения, $\lambda \in \Lambda$, где Λ является компактным подмножеством на $\{(1, 2) \times [-1, 1]\}$. Необходимо найти оценку совместного вектора параметров $\vartheta = (\theta', \lambda')'$, $\vartheta \in \Xi := \{\Theta \times \Lambda\}$. Для этого будем минимизировать расстояние между теоретической характеристической функцией α -устойчивого распределения и эмпирической характеристической функцией распределения остатков модели GARCH(1,1). Для заданной выборки наблюдений $(X_1, \dots, X_T)$ и фиксированных начальных значений X_0 и $\tilde{\sigma}_0$, оценка вектора ϑ определяется следующим образом:

$$\hat{\vartheta}_T = \arg \min_{\vartheta \in \Xi} \tilde{\Lambda}_T(\vartheta), \quad (3)$$

где Ξ обозначает пространство параметров и

$$\tilde{\Delta}_T(\vartheta) = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{\varphi}_T(u, \theta) - \varphi(u, \lambda)|^2 W(u) du, \quad (4)$$

где $W(\cdot)$ - неотрицательная симметрическая весовая функция. В (4) $\tilde{\varphi}_T(u, \theta) := \varphi_T\{u; \tilde{Z}_1(\theta), \dots, \tilde{Z}_T(\theta)\}$ является эмпирической характеристической функцией определенной как $\varphi_T(u; y_1, \dots, y_T) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T e^{iuy_t}$, и вычисляемая через остатки $y_t = \tilde{Z}_t(\theta) = X_t / \tilde{\sigma}_t(\theta)$, где $\tilde{\sigma}_t(\theta)$ рекурсивно определяются как $\tilde{\sigma}_t^2 = \omega_0 + \omega_1 X_{t-1}^2 + \omega_2 \tilde{\sigma}_{t-1}^2$, $t = \overline{1, T}$.

Весовая функция $W(\cdot)$ вводится для обеспечения сходимости интеграла (4). Тема выбора оптимальной весовой функции является актуальной задачей и частично рассматривается в работе [4]. Предлагается использовать весовую функцию вида $W(u) = |u|^{p-1} e^{-b|u|}$, $u \in \mathbb{R}$, где $p \geq 1, b > 0$, либо Гауссовскую весовую функцию $W(u) = e^{-u^2}$, $u \in \mathbb{R}$.

Обозначим $\vartheta_0 = (\theta_0', \lambda_0')$ - вектор истинных значений параметров, где $\theta_0 = (\omega_0, \omega_1, \omega_2)'$, $\lambda_0 = (\alpha_0, \beta_0)'$. Также введем следующие обозначения:

$$g_t(u, \vartheta) = e^{iuZ_t(\theta)} - \varphi(u, \lambda), \quad g(u) = E \frac{\partial g_1(u, \vartheta_0)}{\partial \vartheta},$$

$$Y_t = \int_{-\infty}^{\infty} \text{Re} \left\{ \overline{g_t(u, \vartheta_0)} g(u) \right\} W(u) du,$$

V - дисперсия Y_t ,

$$G = \int_{-\infty}^{\infty} \text{Re} \left\{ \overline{g(u)} g'(u) \right\} W(u) du.$$

Y_t - вектор размерности $d = 5$ - количество неизвестных параметров в ϑ , G и V - матрицы.

Теорема 1. Пусть выполняются следующие условия:

1. $\vartheta_0 \in \Xi := \Theta \times \Lambda$;
2. $\forall \theta \in \Theta, \omega_1 + \omega_2 < 1$;
3. $W(\cdot)$ является строго положительной на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $\int_{-\infty}^{\infty} W(u) du < \infty$,
 $\int_{-\infty}^{\infty} |u| W(u) du < \infty$;
4. $E \sup_{\theta \in \Theta} \left\{ \frac{\sigma_1(\theta_0)}{\sigma_1(\theta)} \right\}^{10} < \infty$.

Тогда оценка (3) является строго состоятельной, то есть $\hat{\vartheta}_T \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \vartheta_0$ п.н.

Теорема 2. Пусть выполняются следующие условия:

1. $\vartheta_0 \in \dot{\Xi}$, где $\dot{\Xi}$ – внутреннее множество $\Xi := \Theta \times \Lambda$;
2. $\forall \theta \in \Theta, \omega_1 + \omega_2 < 1$;
3. $W(\cdot)$ является строго положительной на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $\int_{-\infty}^{\infty} |u|^i W(u) du < \infty$, $i \in \{0, 1, 2, 4\}$.

Тогда существует последовательность матриц G_T стремящаяся п.н. к G и $G_T \sqrt{T} (\vartheta_T - \vartheta_0) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, V)$ при $T \rightarrow \infty$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. Bollerslev T. Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity // J. Econometrics. 1986. Vol. 31. № 2. P. 307–327.
2. Терех В. С. Применение умеренно устойчивых распределений в моделях GARCH(1, 1) // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2018. № 1. С. 48–58.
3. Trusz M., Tserakh U. GARCH(1,1) models with stable residuals // Studia Informatica. 2018. Vol. 22. P. 47–57.
4. Francq C., Meintanis S. G. Fourier-type estimation of the power GARCH model with stable-paretian innovations // Metrika. 2016. Vol. 79, №. 4. P. 389–424.

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ТРАКТА ЦИФРОВОГО СПУТНИКОВОГО ТЕЛЕВИЗИОННОГО СИГНАЛА

А. С. Шпак, А. В. Поляков

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

E-mail: anitashpak@gmail.com

Предложена математическая модель для энергетического расчета радиолинии на трассе спутник-Земля, позволяющая с помощью компьютерного моделирования определить параметры приемного устройства, обеспечивающие устойчивый прием цифрового спутникового телевизионного сигнала при различных погодных условиях, температурах окружающей среды и географических координатах для наиболее часто используемых типов фазовой модуляции.

Ключевые слова: Ключевые слова: цифровое спутниковое телевидение; устойчивый прием; фазовая модуляция; вероятность ошибки; отношение сигнал/шум

Спутниковое телевидение является одним из наиболее динамично развивающихся видов связи, который зачастую является единственно возможным способом предоставления информационных услуг в трудно-