НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА УМЕРЕННО УСТОЙЧИВЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

В. С. Терех

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
E-mail: vladimir.terekh@gmail.com

Рассмотрено применение классического и модифицированного умеренно устойчивых распределений при построении моделей GARCH. Приведено сравнение свойств устойчивых и умеренно устойчивых распределений, описаны методологии построения моделей и последующей оценки параметров с помощью метода максимального правдоподобия.

Ключевые слова: модель GARCH; устойчивое распределение; умеренно устойчивое распределение; метод максимального правдоподобия.

В ходе множества исследований было установлено, что предположение о нормальном распределении остатков эконометрических моделей (например, моделей GARCH [1]) часто не подтверждается при анализе реальных экономических и финансовых временных рядов. Некоторыми причинами являются недостаточно тяжелые хвосты и симметричность нормального распределения. Для устранения подобных проблем предлагается использовать α-устойчивые [2] и умеренно устойчивые [3] распределения. В данной работе приведен сравнительный анализ таких распределений и пример их использования в модели GARCH(1,1).

α-устойчивое распределение. Пусть $\alpha \in (0,2]$, $\beta \in [-1,1]$, $\sigma \in (0,+\infty)$, $\mu \in \mathbb{R}$. Тогда случайная величина X имеет α-устойчивое распределение (α-stable), если ее характеристическая функция имеет вид

$$\varphi_X(u) = \varphi_{stable}(u;\alpha,\sigma,\beta,\mu) =$$
$$= E\left[e^{iuX}\right] = \begin{cases} \exp\left(i\mu u - |\sigma u|^{\alpha}\left(1 - i\beta(sgn\, u)\tan\dfrac{\pi\alpha}{2}\right)\right), & \alpha \neq 1 \\ \exp\left(i\mu u - |\sigma u|\left(1 + i\beta\dfrac{2}{\pi}(sgn\, u)\ln|u|\right)\right), & \alpha = 1 \end{cases} \quad (1)$$

где $u \in \mathbb{R}$,

$$sgn\, t = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t = 0, \\ -1, & t < 0. \end{cases}$$

Будем обозначать $X \sim S_{\alpha}(\sigma,\beta,\mu)$. Параметры имеют следующий смысл: α – параметр устойчивости; β – параметр асимметрии; μ – параметр сдвига; σ – параметр масштаба. Отметим несколько свойств α-устойчивого распределения:

$E|X| = \mu,\ \alpha > 1;\ E|X| = \infty,\ 0 < \alpha \le 1;\ E|X|^p < \infty,\ 0 < p < \alpha;\ E|X|^p = \infty,\ p \ge \alpha.$

Приведенные выше свойства вызывают определенные трудности для использования α-устойчивого распределения при построении моделей GARCH. Более подробно это рассматривается в работе [4].

Классическое умеренно устойчивое распределение. Пусть $\alpha \in (0,1) \cup (1,2),\ \sigma, \lambda_+, \lambda_- > 0,\ \mu \in \mathbb{R}$. Тогда случайная величина X имеет классическое умеренно устойчивое распределение (CTS – classical tempered stable), если ее характеристическая функция имеет вид

$$\varphi_X(u) = \varphi_{CTS}(u;\alpha,\sigma,\lambda_+,\lambda_-,\mu) = \\ = \exp\begin{pmatrix} iu\mu - iu\sigma\Gamma(1-\alpha)\left(\lambda_+^{\alpha-1} - \lambda_-^{\alpha-1}\right) + \\ +\sigma\Gamma(-\alpha)\left((\lambda_+ - iu)^\alpha - \lambda_+^\alpha + (\lambda_+ - iu)^\alpha - \lambda_-^\alpha\right) \end{pmatrix} \qquad (2)$$

где $u \in \mathbb{R}$, Γ – гамма-функция. Будем обозначать $X \sim CTS(\alpha,\sigma,\lambda_+,\lambda_-,\mu)$. Семиинварианты для распределения находятся следующим образом:

$$c_1(X) = \mu,$$

$$c_n(X) = \alpha\Gamma(n-\alpha)\left(\lambda_+^{\alpha-n} + (-1)^n \lambda_-^{\alpha-n}\right),\ n = 2,3,...$$

Параметры α, μ, σ имеют такой же смысл, как и для α-устойчивого распределения. Параметры λ_+ и λ_- контролируют скорость затухания для положительного и отрицательного хвоста соответственно. Если $\lambda_+ > \lambda_-$ $(\lambda_+ < \lambda_-)$, то распределение имеет левую (правую) асимметрию, и если $\lambda_+ = \lambda_-$, то распределение симметрично. Параметры λ_+, λ_- и α также задают тяжесть хвостов распределения.

Модифицированное умеренно устойчивое распределение. Пусть $\alpha \in (0,1) \cup (1,2),\ \sigma, \lambda_+, \lambda_- > 0,\ \mu \in \mathbb{R}$. Тогда случайная величина X имеет модифицированное умеренно устойчивое распределение (MTS – modified tempered stable), если ее характеристическая функция имеет вид

$$\varphi_X(u) = \varphi_{MTS}(u;\alpha,\sigma,\lambda_+,\lambda_-,\mu) = \\ = \exp\begin{pmatrix} iu\mu - \sigma\left(G_R(u;\alpha,\lambda_+) + G_R(u;\alpha,\lambda_-)\right) + \\ +iu\sigma\left(G_I(u;\alpha,\lambda_+) + G_I(u;\alpha,\lambda_-)\right) \end{pmatrix} \qquad (3)$$

где для $u \in \mathbb{R}$,

$$G_R(\mathrm{x};\alpha,\lambda) = 2^{-\frac{\alpha+3}{2}}\sqrt{\pi}\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right)\left(\left(\lambda^2 + x^2\right)^{\frac{\alpha}{2}} - \lambda^\alpha\right),$$

$$G_I\left(x;\alpha,\lambda\right)=2^{-\frac{\alpha+3}{2}}\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)\lambda^{\alpha-1}\left[{}_2F_1\left(1,\frac{1-\alpha}{2};\frac{3}{2};-\frac{x^2}{\lambda^2}\right)-1\right],$$

где ${}_2F_1$ – гипергеометрическая функция. Семиинварианты для распределения находятся следующим образом:

$$c_1\left(X\right)=\mu,$$

$$c_n\left(X\right)=2^{n-\frac{\alpha+3}{2}}\sigma\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)\left(\lambda_+^{\alpha-n}+\left(-1\right)^n\lambda_-^{\alpha-2}\right),\ n=2,3,...$$

Будем обозначать $X \sim MTS\left(\alpha,\sigma,\lambda_+,\lambda_-,\mu\right)$. Параметры распределения имеют такой же смысл, как и параметры CTS распределения.

Оценка параметров модели GARCH(1,1) с устойчивыми распределениями. Процесс $X_t,\ t\in\mathbb{Z}$ удовлетворяет модели GARCH(1,1) (Generalized Autoregressive Conditionally Heteroskedastic) если

$$\begin{cases} X_t=\sigma_t Z_t, \\ \sigma_t^2=\omega_0+\omega_1 X_{t-1}^2+\omega_2\sigma_{t-1}^2, \end{cases} \tag{4}$$

где $\left\{Z_t, t\in\mathbb{Z}\right\}$ – независимые, одинаково распределенные случайные величины, а $\omega_0\geq 0, \omega_1>0, \omega_2>0$ – параметры модели. Условие стационарности имеет вид $\omega_1+\omega_2<1$.

Зададим векторы параметров и допустимые множества параметров для моделей GARCH(1,1) с различными распределениями величин Z_t. Пусть $Z_t \sim S_\alpha(\beta,\sigma,\mu)$. Тогда вектор параметров будет иметь вид

$$\theta_{stable}=\left(\omega_0,\omega_1,\omega_2,\alpha,\beta,\sigma,\mu\right)^T,$$

где T – знак транспонирования, а допустимое множество параметров

$$\Theta_{stable}=\begin{Bmatrix}\theta_{stable}:0<\min\left\{\omega_0,\omega_1,\omega_2\right\}\leq\max\left\{\omega_0,\omega_1,\omega_2\right\}<1; \\ \omega_1+\omega_2<1;\alpha\in\left(0,2\right];\beta\in\left[-1,1\right];\sigma\in\left(0,+\infty\right)\end{Bmatrix}.$$

Для случая, когда $Z_t \sim CTS(\alpha,\sigma,\lambda_+,\lambda_-,\mu)$ зададим вектор параметров и допустимое множество параметров следующим образом:

$$\theta_{CTS}=\left(\omega_0,\omega_1,\omega_2,\alpha,\lambda_+,\lambda_-,\sigma,\mu\right)^T,$$

$$\Theta_{CTS}=\begin{Bmatrix}\theta_{CTS}:0<\min\left\{\omega_0,\omega_1,\omega_2\right\}\leq\max\left\{\omega_0,\omega_1,\omega_2\right\}<1; \\ \omega_1+\omega_2<1;\alpha\in\left(0,1\right)\cup\left(1,2\right);\lambda_+,\lambda_-,\sigma\in\left(0,+\infty\right)\end{Bmatrix}.$$

Для случая, когда $Z_t \sim MTS(\alpha,\sigma,\lambda_+,\lambda_-,\mu)$:

$$\theta_{MTS}=\left(\omega_0,\omega_1,\omega_2,\alpha,\lambda_+,\lambda_-,\sigma,\mu\right)^T,$$

$$\Theta_{MTS}=\begin{Bmatrix}\theta_{MTS}:0<\min\left\{\omega_0,\omega_1,\omega_2\right\}\le\max\left\{\omega_0,\omega_1,\omega_2\right\}<1;\\ \omega_1+\omega_2<1;\alpha\in(0,1)\cup(1,2);\lambda_+,\lambda_-,\sigma\in(0,+\infty)\end{Bmatrix}$$

Введем обозначения:

$$\theta=\begin{cases}\theta_{stable},\ Z_t\sim S_\alpha(\beta,\sigma,\mu)\\ \theta_{CTS},\ Z_t\sim CTS(\alpha,\sigma,\lambda_+,\lambda_-,\mu)\\ \theta_{MTS},\ Z_t\sim MTS(\alpha,\sigma,\lambda_+,\lambda_-,\mu)\end{cases}\quad \Theta=\begin{cases}\Theta_{stable},\ Z_t\sim S_\alpha(\beta,\sigma,\mu)\\ \Theta_{CTS},\ Z_t\sim CTS(\alpha,\sigma,\lambda_+,\lambda_-,\mu)\\ \Theta_{MTS},\ Z_t\sim MTS(\alpha,\sigma,\lambda_+,\lambda_-,\mu)\end{cases}$$

Для оценки параметров модели GARCH(1,1) будем использовать метод максимального правдоподобия. Пусть известна выборка размера n $X_1,...,X_n,\ n\in\mathbb{N}$ за процессом $X_t,\ t\in\mathbb{Z}$. Тогда оценка $\widehat{\theta}_n$ вектора параметров θ модели GARCH(1,1) на компакте Θ определяется следующим образом:

$$\widehat{\theta}_n=\arg\max_{\theta\in\Theta}\widehat{L}_n(\theta),\tag{5}$$

где

$$\widehat{L}_n(\theta)=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\ln\left[\frac{1}{\widehat{h}_t(\theta)}f\left(\frac{X_t}{\widehat{h}_t(\theta)}\right)\right],\tag{6}$$

$\theta\in\Theta,\ t=\overline{1,n},\ f(x)$ – функция плотности распределения величин Z_t, а $\widehat{h}_t(\theta)$ можно расценивать как оценку σ_t. Заметим, что $\widehat{h}_t(\theta_0)=\sigma_t$ при всех $t\in\mathbb{N}$, а θ_0 – истинный вектор параметров. В качестве $\widehat{h}_t(\theta)$ будем использовать функцию $\widehat{h}_t(\theta)=\widehat{y}_t^{\frac{1}{2}}(\theta)$, где $\widehat{y}_t(\theta)$ определяется следующим образом:

$$\widehat{y}_t(\theta)=\begin{cases}\varepsilon,\ \mathrm{t}=0,\\ \omega_0+\omega_1X_{t-1}^2+\omega_2\widehat{y}_{t-1}(\theta),\ \mathrm{t}\ge1,\end{cases}$$

$\varepsilon\in[0,\infty)$ – произвольное начальное значение. Отметим, что для некоторых рассматриваемых выше распределений явный вид функции плотности распределения неизвестен. Для нахождения значений функции $f(x),\ x\in\mathbb{R}$ можно использовать обратное преобразование Фурье характеристической функции $\varphi(t)$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. Bollerslev T. Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity // J. Econometrics. 1986. Vol. 31. № 2. P. 307– 327.
2. Paolella M. S. Stable-GARCH Models for Financial Returns: Fast Estimation and Tests for Stability // Econometrics. 2016. Vol. 4. № 2. P. 1– 28.

3. Kim Y. S., Rachev S. T., Chung D. M. The Modified Tempered Stable Distribution, GARCH Models and Option Pricing // Probability and Mathematical Statistics. 2006. Vol. 29. № 1., P. 91– 117.
4. Терех В. С. Построение и исследование свойств М-оценки параметров модели GARCH(1,1) // Сборник работ 72-ой научной конференции студентов и аспирантов БГУ, Минск, 11-22 мая 2015 г. : в 3 ч., Минск, БГУ, 2015, ч. 1. С. 112– 115.

ИССЛЕДОВАНИЕ СОСТОЯТЕЛЬНОСТИ И АСИМПТОТИЧЕСКОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ GARCH(1,1) МЕТОДОМ ЭМПИРИЧЕСКОЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

В. С. Терех

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
E-mail: vladimir.terekh@gmail.com

Предложен метод оценки параметров модели GARCH(1,1) с устойчивыми распределениями, использующий эмпирическую характеристическую функцию распределения остатков модели. Описан процесс построения оценки, сформулированы условия, при выполнении которых оценка является строго состоятельной. Исследовано асимптотическое распределение оценки.

Ключевые слова: модель GARCH; устойчивое распределение; характеристическая функция; оценка параметров; строгая состоятельность; асимптотическое распределение.

Модель GARCH [1] является популярным инструментом для анализа экономических и финансовых временных рядов. Актуальной является задача исследования моделей GARCH с распределениями остатков, отличными от нормального. Особой популярностью пользуются устойчивые распределения. Такие распределения являются обобщением нормального распределения и имеют ряд свойств, характерных для реальных данных: кластеризация волатильности, тяжелые хвосты, несимметричность. В работах [2] и [3] проводится сравнительный анализ моделей GARCH с устойчивыми и умеренно устойчивыми распределениями. Использование таких распределений позволяет получить адекватные результаты, однако в то же время создает ряд трудностей, связанных с оцениванием параметров модели. Устойчивые распределения не имеют явного вида функции плотности (за исключением нескольких частных случаев), что затрудняет применение метода максимального правдоподобия. В данной работе рассматривается метод оценки параметров модели GARCH(1,1) с устойчивыми распределениями, использующий эмпирическую характеристическую функцию распределения остатков.