

# СПЕКТРАЛЬНАЯ ПЛОТНОСТЬ СТАЦИОНАРНОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА С ПУАССОНОВСКИМИ ПРОПУСКАМИ НАБЛЮДЕНИЙ

Т. И. Воротницкая, Н. Н. Труш

*Институт бизнеса Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь*

*E-mail: varatnitskaya@gmail.com, troushNN@bsu.by*

Рассмотрен стационарный случайный процесс с нерегулярными наблюдениями в случае, когда нерегулярности в наблюдениях задаются независимой последовательностью, распределенной по закону Пуассона. Построена оценка спектральной плотности. Исследованы ее статистические свойства.

*Ключевые слова: стационарный случайный процесс; нерегулярные наблюдения; распределение Пуассона; спектральная плотность; периодограмма.*

В социальных науках, в физике, медицине, в других приложениях, связанных с обработкой данных, широкое распространение получили практические задачи, связанные с пропусками наблюдений.

Большинство исследований посвящено изучению амплитудно-модулированных процессов с пропущенными наблюдениями [1, 2], частично исследованы стационарные случайные процессы с нерегулярными наблюдениями в общем виде [3, 4].

Целью настоящей работы является получение оценок спектральной плотности стационарных случайных процессов с пуассоновскими пропусками наблюдений и исследование их статистических свойств. Это позволяет получить информацию о структуре исследуемых процессов в названных выше предметных областях.

Пусть  $X(t)$ ,  $t \in Z$  стационарный в широком смысле случайный процесс с математическим ожиданием  $m^X$ , ковариационной функцией  $R^X(\tau)$ ,  $\tau \in Z$ , спектральной плотностью  $f^X(\lambda)$ ,  $\lambda \in \Pi = [-\pi, \pi]$ . При исследовании процессов с нерегулярными наблюдениями будем предполагать, что не имеем возможности получать наблюдения за стационарным случайным процессом  $X(t)$ ,  $t \in Z$ , а получаем наблюдения за некоторым процессом  $Y(t)$ ,  $t \in Z$ , который связан с процессом  $X(t)$ ,  $t \in Z$  соотношением

$$Y(t) = X(t)d(t), \quad (1)$$

$t \in Z$ , где  $d(t)$  - дискретный случайный процесс, а процессы  $X(t)$  и  $d(t)$  удовлетворяют следующим ограничениям:

- значения  $d(t_1)$  и  $d(t_2)$  независимы для любых значений  $t_1, t_2 \in Z$ ,  $t_1 \neq t_2$ ,
- процессы  $X(t)$  и  $d(t)$  независимы для любых  $t \in Z$ .

Для процесса  $Y(t)$ ,  $t \in Z$  введем следующие обозначения: математическое ожидание  $m^Y(t)$ ,  $t \in Z$  ковариационная функция  $R^Y(t_1, t_2)$ ,  $t_1, t_2 \in Z$ , спектральная плотность  $f^Y(\lambda_1, \lambda_2)$ ,  $\lambda_1, \lambda_2 \in \Pi$ .

Рассмотрим в качестве  $d(t)$ ,  $t \in Z$  последовательность независимых одинаково распределенных пуассоновских случайных величин с параметром  $\alpha$ ,  $\alpha > 0$ . Заметим, что в этом случае математическое ожидание  $d(t)$  равно дисперсии  $d(t)$ , т.е.  $m^d = D^d = \alpha$ .

Пусть в результате некоторого эксперимента получено  $T$  последовательных через равные промежутки времени наблюдений

$$Y(0), Y(1), \dots, Y(T-1) \quad (2)$$

за процессом  $Y(t)$ ,  $t \in Z$ , который связан с процессами  $X(t)$  и  $d(t)$ ,  $t \in Z$  соотношением (1).

Лемма. Если процессы  $X(t)$ ,  $Y(t)$ ,  $t \in Z$ , связаны соотношением (1), а  $d(t)$ ,  $t \in Z$  – последовательность независимых одинаково распределенных пуассоновских случайных величин с параметром  $\alpha$ ,  $\alpha > 0$ , то

$$\begin{aligned} m^Y(t) &= \alpha m^X, \\ R^Y(\tau) &= \begin{cases} R^X(\tau) \alpha^2, & \tau \neq 0, \\ (R^X(0) + (m^X)^2) \alpha + R^X(0) \alpha^2, & \tau = 0, \end{cases} \\ f^Y(\lambda) &= \alpha^2 f^X(\lambda) + \frac{1}{2\pi} (R^X(0) + (m^X)^2) \alpha. \end{aligned}$$

Рассмотрим задачу построения оценки спектральной плотности процесса  $X(t)$ ,  $t \in Z$  по наблюдениям за процессом  $Y(t)$ ,  $t \in Z$  и исследования её статистических свойств. Предположим, что математическое ожидание процесса  $X(t)$ ,  $t \in Z$  равно нулю. В качестве оценки спектральной плотности рассмотрим статистику

$$I^T(\lambda) = \frac{1}{2\pi T} \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{s=0}^{T-1} \frac{Y(t)Y(s)}{C_{t-s}^d} e^{-i\lambda(t-s)}, \lambda \in \Pi, \quad (3)$$

где

$$C_{\tau}^d = M d(t+\tau) d(t) = \begin{cases} \alpha + \alpha^2, & \tau = 0, \\ \alpha^2, & \tau \neq 0. \end{cases}$$

Теорема 1. Для оценки спектральной плотности, задаваемой равенством (3), справедливы следующие соотношения для математического ожидания

$$M I^T(\lambda) = \frac{1}{2\pi T} \left[ \sum_{\tau=-(T-1)}^{(T-1)} (T-|\tau|) R^X(\tau) e^{-i\lambda\tau} \right]$$

и ковариации

$$\begin{aligned}
& (2\pi T)^2 \text{cov}\{I^T(\lambda_1), I^T(\lambda_2)\} = \\
& = \sum_{t,s=0}^{T-1} \sum_{j,k=0}^{T-1} \left( c_4^X(t-k, s-k, j-k) + R^X(t-j)R^X(s-k) + \right. \\
& + R^X(t-k)R^X(s-j) + R^X(t-s)R^X(j-k) \Big) e^{-i\lambda_1(t-s)} e^{i\lambda_2(j-k)} - \\
& - \sum_{t,s=0}^{T-1} R^X(t-s) e^{-i\lambda_1(t-s)} \sum_{j,k=0}^{T-1} R^X(j-k) e^{i\lambda_2(j-k)} + \\
& + \left( \frac{(\alpha + 7\alpha^2 + 6\alpha^3 + \alpha^4)}{(\alpha + \alpha^2)^2} - 1 \right) \sum_{t=0}^{T-1} \left( c_4^X(0, 0, 0) + 3(R^X(0))^2 \right) + \\
& + \left( \frac{\alpha^3 + 3\alpha^2 + \alpha}{(\alpha + \alpha^2)\alpha^2} - 1 \right) \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{k=0}^{T-1} \left( c_4^X(t-k, t-k, t-k) + 3(R^X(0)R^X(t-k)) \right) e^{i\lambda_2(t-k)} + \\
& + \left( \frac{\alpha^3 + 3\alpha^2 + \alpha}{\alpha^2(\alpha + \alpha^2)} - 1 \right) \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{s=0}^{T-1} \left( c_4^X(t-s, t-s, t-s) + 3(R^X(0)R^X(t-s)) \right) e^{-i\lambda_1(t-s)} + \\
& + \left( \frac{\alpha^2(\alpha + \alpha^2)}{\alpha^4} - 1 \right) \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{s=0}^{T-1} \sum_{k=0}^{T-1} \left( c_4^X(t-k, s-k, t-k) + \right. \\
& + R^X(0)R^X(s-k) + 2(R^X(t-s)R^X(s-k)) \Big) e^{-i\lambda_1(t-s) + i\lambda_2(t-k)}.
\end{aligned}$$

В доказательстве теоремы используется определения математического ожидания и ковариации, стационарность процессов, а также связывающие соотношения между смешанными моментами и смешанными семиинвариантами.

В работе [5] приведен вид ковариации оценки (3) через спектральные плотности и семиинвариантные спектральные плотности процесса  $X(t)$ ,  $t \in \mathbb{Z}$ .

Построенная оценка спектральной плотности (3) не является состоятельной. Для получения состоятельной оценки сгладим её спектральными окнами  $\varphi_T(k)$ , которые строятся следующим образом:

$$\varphi_T(k) = \frac{\varphi\left(\frac{k}{m_T T}\right)}{\sum_{j=-\infty}^{\infty} \varphi\left(\frac{j}{m_T T}\right)},$$

где  $j(X)$  - четная, не зависящая от  $T$  действительная функция, для которой

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = 1,$$

а  $m_T > 0, T = 1, 2, \dots$ . Обычно предполагается, что при  $T \rightarrow \infty$ ,

$$m_T \rightarrow 0, Tm_T \rightarrow \infty,$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \left| \varphi\left(\frac{j}{m_T T}\right) \right| < \infty \text{ и } \sum_{j=-\infty}^{\infty} \varphi\left(\frac{j}{m_T T}\right) \neq 0.$$

Получим оценку вида

$$\hat{f}^T(\lambda_s) = \sum_{k=-\left[\frac{T}{2}\right]+1}^{\left[\frac{T}{2}\right]} \varphi^T(k) \hat{I}^T(\lambda_{s+k}) \quad (4)$$

где,  $\lambda_s = \frac{2\pi s}{T}$ ,  $-\left[\frac{T}{2}\right]+1 \leq s \leq \left[\frac{T}{2}\right]$ ,  $\left[\frac{T}{2}\right]$  - целая часть числа  $\frac{T}{2}$ , для которой справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Если семиинвариантная спектральная плотность четвёртого порядка  $f_4^X(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  непрерывна на  $\Pi^3$ , спектральная плотность

$$f^X(\lambda) \text{ непрерывна на } \Pi \text{ и } \sum_{k=-\left[\frac{T}{2}\right]+1}^{\left[\frac{T}{2}\right]} [\varphi^T(k)]^2 \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0, \text{ то статистика}$$

$\hat{f}^T(\lambda_s)$ , задаваемая равенством (4) является состоятельной в средне-квадратическом смысле.

Таким образом, в работе получены следующие основные результаты:

- исследован случай, когда нерегулярности в наблюдениях стационарного случайного процесса имеют распределение Пуассона;
- построена периодограммная оценка спектральной плотности стационарного с пуассоновскими пропусками;
- путем сглаживания спектральными окнами построена состоятельная оценка спектральной плотности рассматриваемого процесса;
- исследованы статистические свойства оценок при некоторых дополнительных ограничениях.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. Труш Н. Н. Асимптотические методы статистического анализа временных рядов. Мн.: БГУ, 1999. 220 с.
2. Lee M. S. Strong consistency for AR model with missing data // J. Korean Math. Soc. 2004. Vol. 41, №6. С. 1071–1086.

3. Varatnitskaya T. Estimating main characteristics of processes with non-regular observations // Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis de Mathematica. 2008. №12. С. 45–53.
4. Jiang J., Hui Y. V. Spectral density estimation with amplitude modulation and outlier detection // Ann. Inst. Statist. Math. 2004. Vol. 56, №4. С. 611–630.
5. Воротницкая Т. И. Оценки ковариационной функции и спектральной плотности стационарного случайного процесса пуассоновскими пропусками наблюдений // Вестник БрГУ им. А. С. Пушкина. 2008. Т. 31, №2. С. 3–11.

## ПРИМЕНЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ПИРСОНА ДЛЯ РАСЧЕТА ПРОСТРАНСТВЕННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КОНЦЕНТРАЦИИ ПРИМЕСИ ВВЕДЕННОЙ МЕТОДОМ ИОННОЙ ИМПЛАНТАЦИИ

**С. В. Гранько, А. А. Ковалевский**

*Учреждение образования «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники», г. Минск, Беларусь  
E-mail: granko@bsuir.by*

Предложена модель для расчета объемного распределения концентрации примеси внедренной в твердое тело методом ионной имплантации с использованием маскирующих покрытий. Математической основой модели является использование распределения Пирсона VII, описывающее распределение концентрации при использовании модели точечного пучка ионов. Установлены особенности влияния момента эксцесса на пространственное распределение примеси.

*Ключевые слова: ионная имплантация; локальное ионное легирование; распределение Пирсона; асимметрия; эксцесс.*

Представляемые в работах [1,2,3] методы построения пространственного распределения концентрации примеси введенной методом ионной имплантации через окно маскирующем покрытии сводятся к использованию описания бокового отклонения, которое претерпевают падающие ионы от направления перпендикулярного поверхности образца с помощью параметра  $\Delta R_{p,l}$  – стандартное отклонение боковых пробегов ионов. При этом предполагается, что боковое распределение концентрации имплантированной примеси, или зависимость локальной концентрации от боковой координаты, является гауссовским с боковым проецированным пробегом  $R_{p,l}$   $R_{p,l} = 0$ . Однако при этом пренебрегается моментами более высоких порядков.

Однако при формировании ряда структур методом локального ионного легирования с использованием окон в маскирующем покрытии требуется учет моментов более высокого порядка. При этом простран-