

Выше описанные действия выступают в роли основных в виду того, что пользователь сразу после запуска веб-приложения попадает на главную страницу, на которой и представлен перечень данных действий. Одновременное выполнение нескольких действий на одной странице отсутствует.

Таким образом, предложена модель в виде двух диаграмм для обработки изображений большого объема. Модель построена по односторонней технологии разработки веб-приложений и в отличие от известных при реализации снизить требования к аппаратно-программным средствам: сократить объем памяти, необходимой для хранения изображений, время его обработки, а также обеспечить качественное отображение самого изображений на веб-страницах.

### **БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ**

1. Листопад Н. И., Виничук О. Н. Телекоммуникации: сети и технологии, алгебраическое кодирование и безопасность данных // Матер. Межд. научно-технического семинара, Минск, 2019, С.114–117.
2. Флэнаган Д. JavaScript. Подробное руководство. Пер. с англ. СПб: Символ-Плюс. 2008. 992 С.
3. Кузница IT решений [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://shiftoffproblem.com/what-is-spa-and-mpa/>.
4. Буч Г., Рамбо Д., Якобсон И. Язык UML. Руководство пользователя. 2-е изд. М.: ДМК Пресс. 2006. 496 С.

## **ОБ ОЦЕНКЕ КОВАРИАЦИОННОЙ ФУНКЦИИ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ С НЕРЕГУЛЯРНЫМИ НАБЛЮДЕНИЯМИ**

**Т. И. Воротницкая**

*Институт бизнеса Белорусского государственного университета,*

*Минск, Беларусь*

*E-mail: varatnitskaya@gmail.com*

В статье рассмотрен стационарный случайный процесс с нерегулярными наблюдениями в случае, когда нерегулярности также задаются стационарным случайным процессом. Построена оценка ковариационной функции. Исследованы ее статистические свойства.

*Ключевые слова: стационарный случайный процесс; нерегулярные наблюдения; ковариационная функция; оценка.*

Современные методы статистического анализа случайных процессов с нерегулярными наблюдениями находят применение в таких областях как экология, астрономия, медицина, геология, радиофизика, а также в

других сферах деятельности человека. Вопросы статистического анализа таких процессов рассматриваются во многих научно-исследовательских работах, однако большинство исследований в этой области посвящено случайным процессам с бернуллиевскими пропусками наблюдений [1, 2, 3]. В [4] получен общий вид оценок основных характеристик процесса с пуассоновскими пропусками наблюдений и исследуются их статистические свойства. Актуальным остается исследование стационарных случайных процессов с нерегулярными наблюдениями в общем виде, а именно, когда процесс, который задает нерегулярности, является также стационарным случайным процессом [5]. В работе [6] подобные исследования проводятся для стационарного процесса авторегрессии.

Пусть  $X(t), d(t)$ ,  $t \in Z$  стационарные в широком смысле случайные процессы с математическими ожиданиями  $m^X, m^d$ , ковариационными функциями  $R^X(\tau), R^d(\tau)$   $\tau \in Z$ , спектральными плотностями  $f^X(\lambda), f^d(\lambda)$ ,  $\lambda \in \Pi = [-\pi, \pi]$  и семиинвариантами третьего  $c_3^X(\tau_1, \tau_2), c_3^d(\tau_1, \tau_2)$  и четвертого порядков  $c_4^X(\tau_1, \tau_2, \tau_3), c_4^d(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$  соответственно.

Рассмотрим случайный процесс

$$Y(t) = X(t)d(t), \quad (1)$$

$t \in Z$ , для которого справедливо следующее утверждение.

Лемма. Если имеет место соотношение (1), а процессы  $X(t)$  и  $d(t)$ ,  $t \in Z$  независимы, то  $Y(t)$ ,  $t \in Z$  будет стационарным в широком смысле случайным процессом с математическим ожиданием

$$m^Y = m^X m^d,$$

ковариационной функцией

$$R^Y(\tau) = R^X(\tau)R^d(\tau) + R^X(\tau)(m^d)^2 + R^d(\tau)(m^X)^2, \quad \tau \in Z,$$

и спектральной плотностью

$$f^Y(\lambda) = \int_{\Pi} f^X(\lambda - \mu) f^d(\mu) d\mu + (m^d)^2 f^X(\lambda) + (m^X)^2 f^d(\lambda), \quad \lambda \in \Pi.$$

Пусть в результате некоторого эксперимента получено  $T$  последовательных через равные промежутки времени наблюдений

$$Y(0), Y(1), \dots, Y(T-1) \quad (2)$$

за процессом  $Y(t)$ ,  $t \in Z$ , который связан с процессами  $X(t)$  и  $d(t)$ ,  $t \in Z$  соотношением (1). Возникает задача: по наблюдениям (2) построить хорошую в статистическом смысле оценку ковариационной функции процесса  $X(t)$ ,  $t \in Z$ , при условии, что характеристики процесса  $d(t)$ ,  $t \in Z$  известны. Предположим, что математическое ожидание процесса  $d(t)$  не равно нулю. Не ограничивая общности рассуждений, будем предполагать, что математическое ожидание процесса  $X(t)$  равно нулю.

В качестве оценки ковариационной функции, построенной по наблюдениям (2), рассмотрим статистику вида

$$\begin{aligned} \hat{R}^X(\tau) &= \frac{1}{(T-\tau)r(\tau)} \sum_{t=0}^{T-\tau-1} Y(t+\tau)Y(t), \tau = \overline{0, T-1}, \\ \hat{R}^X(-\tau) &= \hat{R}^X(\tau), \hat{R}^X(\tau) = 0, |\tau| \geq T, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$r(\tau) = Md(t+\tau)d(t) = R^d(\tau) + (m^d)^2.$$

Для приведенной оценки справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. Оценка ковариационной плотности (3) является несмещённой и удовлетворяет соотношению

$$(T-\tau_1) \text{cov} \left\{ \hat{R}^X(\tau_1), \hat{R}^X(\tau_2) \right\} = \sum_{u=-(T-\max(\tau_1, \tau_2)-1)}^{T-\min(\tau_1, \tau_2)-1} \varphi(u, \tau_1, \tau_2) \frac{J(u, \tau_1, \tau_2)}{r(\tau_1)r(\tau_2)},$$

где

$$\begin{aligned} J(u, \tau_1, \tau_2) &= c_4^X(u+\tau_1, u, \tau_2)c_4^d(u+\tau_1, u, \tau_2) + \\ &+ R^X(\tau_1)R^X(\tau_2)c_4^d(u+\tau_1, u, \tau_2) + R^X(u+\tau_1-\tau_2)R^X(u)c_4^d(u+\tau_1, u, \tau_2) + \\ &+ R^X(u+\tau_1)R^X(u-\tau_2)c_4^d(u+\tau_1, u, \tau_2) + \\ &+ m^d c_4^X(u+\tau_1, u, \tau_2)c_3^d(u, \tau_2) + m^d R^X(\tau_1)R^X(\tau_2)c_3^d(u, \tau_2) + \\ &+ m^d R^X(u+\tau_1-\tau_2)R^X(u)c_3^d(u, \tau_2) + m^d R^X(u+\tau_1)R^X(u-\tau_2)c_3^d(u, \tau_2) + \\ &+ m^d c_4^X(u+\tau_1, u, \tau_2)c_3^d(u+\tau_1, \tau_2) + m^d R^X(\tau_1)R^X(\tau_2)c_3^d(u+\tau_1, \tau_2) + \\ &+ m^d R^X(u+\tau_1-\tau_2)R^X(u)c_3^d(u+\tau_1, \tau_2) + m^d R^X(u+\tau_1)R^X(u-\tau_2)c_3^d(u+\tau_1, \tau_2) + \\ &+ m^d c_4^X(u+\tau_1, u, \tau_2)c_3^d(u+\tau_1, u) + m^d R^X(\tau_1)R^X(\tau_2)c_3^d(u+\tau_1, u) + \\ &+ m^d R^X(u+\tau_1-\tau_2)R^X(u)c_3^d(u+\tau_1, u) + m^d R^X(u+\tau_1)R^X(u-\tau_2)c_3^d(u+\tau_1, u) + \\ &+ m^d c_4^X(u+\tau_1, u, \tau_2)c_3^d(u+\tau_1-\tau_2, u) + \\ &+ m^d R^X(\tau_1)R^X(\tau_2)c_3^d(u+\tau_1-\tau_2, u-\tau_2) + \\ &+ m^d R^X(u+\tau_1-\tau_2)R^X(u)c_3^d(u+\tau_1-\tau_2, u-\tau_2) + \\ &+ m^d R^X(u+\tau_1)R^X(u-\tau_2)c_3^d(u+\tau_1-\tau_2, u-\tau_2) + \\ &+ c_4^X(u+\tau_1, u, \tau_2)R^d(\tau_1)R^d(\tau_2) + R^X(u+\tau_1)R^X(u-\tau_2)R^d(\tau_1)R^d(\tau_2) + \\ &+ R^X(u+\tau_1-\tau_2)R^X(u)R^d(\tau_1)R^d(\tau_2) + \\ &+ c_4^X(u+\tau_1, u, \tau_2)R^d(u)R^d(u+\tau_1-\tau_2) + R^X(u+\tau_1)R^X(u-\tau_2)R^d(u)R^d(u+\tau_1-\tau_2) + \\ &+ R^X(u+\tau_1-\tau_2)R^X(u)R^d(u)R^d(u+\tau_1-\tau_2) + R^X(\tau_1)R^X(\tau_2)R^d(u)R^d(u+\tau_1-\tau_2) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +c_4^X(u+\tau_1, u, \tau_2)R^d(u-\tau_2)R^d(u+\tau_1)+R^X(u+\tau_1)R^X(u-\tau_2)R^d(u-\tau_2)R^d(u+\tau_1)+ \\
& +R^X(u+\tau_1-\tau_2)R^X(u)R^d(u-\tau_2)R^d(u+\tau_1)+R^X(\tau_1)R^X(\tau_2)R^d(u-\tau_2)R^d(u+\tau_1)+ \\
& +(m^d)^2c_4^X(u+\tau_1, u, \tau_2)R^d(\tau_1)+(m^d)^2R^X(u+\tau_1)R^X(u-\tau_2)R^d(\tau_1)+ \\
& +(m^d)^2R^X(u+\tau_1-\tau_2)R^X(u)R^d(\tau_1)+ \\
& +(m^d)^2c_4^X(u+\tau_1, u, \tau_2)R^d(u-\tau_2)+(m^d)^2R^X(u+\tau_1)R^X(u-\tau_2)R^d(u-\tau_2)+ \\
& +(m^d)^2R^X(u+\tau_1-\tau_2)R^X(u)R^d(u-\tau_2)+(m^d)^2R^X(\tau_1)R^X(\tau_2)R^d(u-\tau_2)+ \\
& +(m^d)^2c_4^X(u+\tau_1, u, \tau_2)R^d(u+\tau_1)+(m^d)^2R^X(u+\tau_1)R^X(u-\tau_2)R^d(u+\tau_1)+ \\
& +(m^d)^2R^X(u+\tau_1-\tau_2)R^X(u)R^d(u+\tau_1)+(m^d)^2R^X(\tau_1)R^X(\tau_2)R^d(u+\tau_1)+ \\
& +(m^d)^2c_4^X(u+\tau_1, u, \tau_2)R^d(u+\tau_1-\tau_2)+(m^d)^2R^X(u+\tau_1)R^X(u-\tau_2)R^d(u+\tau_1-\tau_2)+ \\
& +(m^d)^2R^X(u+\tau_1-\tau_2)R^X(u)R^d(u+\tau_1-\tau_2)+(m^d)^2R^X(\tau_1)R^X(\tau_2)R^d(u+\tau_1-\tau_2)+ \\
& +(m^d)^2c_4^X(u+\tau_1, u, \tau_2)R^d(u)+(m^d)^2R^X(u+\tau_1)R^X(u-\tau_2)R^d(u)+ \\
& +(m^d)^2R^X(u+\tau_1-\tau_2)R^X(u)R^d(u)+(m^d)^2R^X(\tau_1)R^X(\tau_2)R^d(u)+ \\
& +(m^d)^4c_4^X(u+\tau_1, u, \tau_2)+(m^d)^4R^X(u+\tau_1-\tau_2)R^X(u)+(m^d)^4R^X(u+\tau_1)R^X(u-\tau_2), \\
\end{aligned}$$

$$\varphi(u, \tau_1, \tau_2) = \begin{cases} \frac{u - \max\{\tau_1, \tau_2\}}{T - \tau_2} + 1, u = \overline{-(T - \max\{\tau_1, \tau_2\} - 1), -1}, \\ \frac{-\max\{\tau_1, \tau_2\}}{T - \tau_2} + 1, u = \overline{0, (\max\{\tau_1, \tau_2\} - \min\{\tau_1, \tau_2\})}, \\ 1 + \frac{-\min\{\tau_1, \tau_2\} - u}{T - \tau_2}, u = \overline{(\max\{\tau_1, \tau_2\} - \min\{\tau_1, \tau_2\} + 1), (T - \min\{\tau_1, \tau_2\} - 1)}, \\ 0, u = \overline{-(T - 1), -(T - \max\{\tau_1, \tau_2\})}; \overline{(T - \min\{\tau_1, \tau_2\}), (T - 1)}. \end{cases}$$

Необходимо отметить, что функция  $\varphi(u, \tau_1, \tau_2)$  удовлетворяет следующим условиям:

$$0 \leq \varphi(u, \tau_1, \tau_2) \leq 1,$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \varphi(u, \tau_1, \tau_2) = 1.$$

Доказательство теоремы проводится на основе соотношений, связывающих смешанные моменты и смешанные семиинварианты, а также на основе стационарности рассматриваемых процессов.

Теорема 2. Пусть оценка ковариационной функции определена соотношением (3). Если ряды

$$\sum_{\tau=-\infty}^{\infty} |R^X(\tau)| < \infty, \quad \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} |R^d(\tau)| < \infty,$$

$$\sum_{u=-\infty}^{\infty} |c_4^x(u + \tau_1, u, \tau_2)| < \infty, \quad \sum_{u=-\infty}^{\infty} |c_4^d(u + \tau_1, u, \tau_2)| < \infty,$$

сходятся равномерно по всем  $\tau_1, \tau_2 \in Z$ , то оценка ковариационной функции является состоятельной в среднеквадратическом смысле.

Идея доказательства строится на рассмотрении предела ковариации оценки при количестве наблюдений, стремящихся к бесконечности. Учитывая условия теоремы, показывается, что предел  $\text{cov}\left\{\hat{R}^x(\tau_1), \hat{R}^x(\tau_2)\right\}$  равен нулю, что и доказывает состоятельность оценки (3) в среднеквадратическом смысле.

Таким образом, в работе исследован случай, когда нерегулярности в наблюдениях стационарного случайного процесса имеют произвольное распределение. Исследованы статистические свойства оценки ковариационной функции при некоторых ограничениях на смешанные семиинварианты. Полученные теоретические результаты могут быть использованы при создании новых и модификации имеющихся пакетов прикладных программ статистического анализа и прогнозирования временных рядов, применяемых для исследований в экономике, медицине, геофизике и др.

### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. Илюкевич Т. И. Современные проблемы математики и вычислительной техники // Матер. 3-й Республ. научн. конф. молодых ученых и студентов. Брест. 2003. С. 169–172.
2. Труш Н. Н. Асимптотические методы статистического анализа временных рядов Мн.: БГУ. 1999. 220 С.
3. Lee M. S. Strong consistency for AR model with missing data // J. Korean Math. Soc. 2004. V. 41, №6. P. 1071–1086.
4. Воротницкая Т. И. Оценки ковариационной функции и спектральной плотности стационарного случайного процесса с пуассоновскими пропусками наблюдений // Вестник БрГУ им. А. С. Пушкина. 2008. Т. 31, №2. С. 3–11.
5. Varatnitskaya T. Estimating main characteristics of processes with non-regular observations // Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis de Mathematica. 2008. №12. P. 45–53.
6. Jiang J., Hui Y. V. Spectral density estimation with amplitude modulation and outlier detection // Ann. Inst. Statist. Math. 2004. Vol. 56, №4. С. 611–630.