Белорусский государственный университет

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
и образовательным инновациям
_________________ О.Н. Здрок

«30» _____________ 2020 г.

Регистрационный № УД- 8373/уч.

Аналитическая геометрия и линейная алгебра

Учебная программа учреждения высшего образования
по учебной дисциплине для специальностей:

1-31 04 02 Радиофизика
1-31 04 03 Физическая электроника
1-31 04 04 Аэрокосмические радиоэлектронные
и информационные системы и технологии
1-31 03 07 Прикладная информатика (по направлениям)
направление специальности:
1-31 03 07-02 Прикладная информатика (информационные технологии телекоммуникационных систем);
1-98 01 01 Компьютерная безопасность (по направлениям)
направление специальности:
1-98 01 01-02 Компьютерная безопасность
(радиофизические методы и программно-технические средства)

Минск 2020 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 1-31 04 04-2018, ОСВО 1-31 03 07-2013, ОСВО 1-98 01 01-2013, ОСВО 1-31 04 03-2013, ОСВО 1-31 04 02-2013; учебных планов G31-223/уч. от 13.07.2018, №G31-170/уч. и №G31и-186/уч., № Р98-139/уч. и № Р98и-140/уч., №G31-165/уч. и №G31и-188/уч., № G31-164/уч. и №G31и-189/уч. от 30.05.2013 и типовой учебной программы «Аналитическая геометрия и линейная алгебра» ТД-G.528/тип. от 13.08.2015г.

СОСТАВИТЕЛИ:

Н.Г. Абрашина-Жадаева − заведующая кафедрой высшей математики и математической физики Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, доцент;

Л.Л. Березкина − доцент кафедры высшей математики и математической физики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент;

Н.К. Филиппова − доцент кафедры высшей математики и математической физики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент.

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

И.Д. Феранчук − профессор кафедры теоретической физики и астрофизики Белорусского государственного университета, доктор физ-мат. наук, профессор.

С.И.Василец – проректор по учебной работе БГПУ, кандидат физико-математических наук, доцент

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой высшей математики и математической физики
(протокол № 10 от 26 мая 2020);
Научно-методическим Советом БГУ
(протокол № 5 от 17.06.2020)

Заведующая кафедрой ____________________ Абрашина-Жадаева Н.Г.

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Цели и задачи учебной дисциплины

Цель учебной дисциплины – формирование знаний базовых понятий аналитической геометрии и линейной алгебры; приобретение навыков построения математических моделей физических явлений и проведения необходимых расчётов в рамках построенных моделей; использование математического языка для выражения количественных и качественных отношений объектов; подготовка к анализу научно-технической информации для решения конкретных научно-исследовательских и прикладных задач.

Задачи учебной дисциплины

1. Изучение свойств геометрических объектов при помощи аналитического метода.

2. Изучение методов и приемов решения геометрических задач и применения знаний при исследовании и построении математических моделей;

3. Овладение студентами знаний и навыков по применению аналитической геометрии и линейной алгебры в различных разделах физики при экспериментальном и теоретическом исследовании физических явлений;

Заложенные в основу программы вопросы отвечают современному состоянию теории алгебры и геометрии в той же мере, как это требуется будущим специалистам по физике, радиофизике и компьютерным технологиям.

Место учебной дисциплины в системе подготовки специалиста с высшим образованием. Дисциплина «Аналитическая геометрия и линейная алгебра» является составным элементом математического аппарата ряда курсов общей и теоретической физики. Знания, полученные при изучении дисциплины «Аналитическая геометрия и линейная алгебра» широко применяются в курсе общей физики при изучении кинематики и динамики механического движения, электростатики, электричества и магнетизма, также в курсе теоретическая механика, электродинамика и специальных физических дисциплин, читаемых на физическом факультете и факультете радиофизики и компьютерных технологий.

Учебная дисциплина относится к циклу общенаучных и общепрофессиональных дисциплин государственного компонента специальностей: **1-31 04 02 Радиофизика, 1-31 04 03 Физическая электроника, 1-31 03 07 Прикладная информатика (по направлениям), 1-98 01 01 Компьютерная безопасность (по направлениям)** и входит в модуль «Высшая математика» государственного компонента специальности **1-31 04 04 Аэрокосмические радиоэлектронные и информационные системы и технологии.**

Связи с другими учебными дисциплинами «Аналитическая геометрия и линейная алгебра» базируется на знаниях, приобретенных в результате освоения школьных курсов по геометрии и физике и дисциплин «Математический анализ» «Общая физика», «Теоретическая физика», «Электродинамика», «Программирование» и др.

Требования к компетенциям

Освоение учебной дисциплины «Аналитическая геометрия и линейная алгебра» должно обеспечить формирование следующих компетенций:

Для специальности: **1-31 04 04 Аэрокосмические радиоэлектронные и информационные системы и технологии базовой профессиональной компетенции:**

БПК – 2. Уметь производить действия над матрицами, решать алгебраические системы уравнений, исследовать форму и ориентацию линий и поверхностей, знать основы функционального анализа и теории групп.

Для специальностей: **1-31 04 02 Радиофизика, 1-31 04 03 Физическая электроника, 1-31 03 07 Прикладная информатика (по направлениям), 1-98 01 01 Компьютерная безопасность (по направлениям**) освоение дисциплины должно обеспечить формирование следующих **академических** компетенций:

- АК-1. Уметь применять базовые научно-теоретические знания для решения теоретических и практических задач.
- АК-2. Владеть системным и сравнительным анализом.
- АК-4. Уметь работать самостоятельно.
- АК-6. Владеть междисциплинарным подходом при решении проблем.

В результате изучения дисциплины студент должен:

знать:

– основные геометрические понятия, различные системы координат;
– линии и поверхности первого и второго порядка;
– свойства матриц и определителей;
– теорию систем линейных алгебраических уравнений;
– билинейные и квадратичные формы;
– линейные, евклидовы и унитарные пространства;
– линейные операторы в этих пространствах и их матрицы;
– собственные и присоединенные векторы;
– элементы теории групп;
– элементы тензорного исчисления

уметь:

– выполнять действия над векторами и матрицами;

– записывать основные уравнения прямых, плоскостей, линий и поверхностей второго порядка по различным данным, решать задачи на их расположение;

– решать системы линейных уравнений различными способами;

– исследовать линейную зависимость элементов различных линейных пространств;

– приводить матрицу линейного преобразования к диагональному виду;

– приводить к каноническому виду квадратичную форму и исследовать ее на знакоопределенность;

– приводить уравнения линий и поверхностей второго порядка к каноническому виду;

владеть:

– методами решения систем линейных уравнений;

– методами приведения уравнения линий и поверхностей второго порядка к каноническому виду

Эффективность самостоятельной работы студентов целесообразно проверять в ходе текущего и итогового контроля знаний в форме устного опроса, коллоквиумов, контрольных работ, тестового контроля по темам. Для общей оценки качества усвоения студентами учебного материала рекомендуется использование рейтинговой системы.

Структура учебной дисциплины

Дисциплина изучается в 1-2 семестрах на всех специальностях. Форма получения высшего образования — очная, дневная.

Всего на изучение учебной дисциплины «Аналитическая геометрия и линейная алгебра» для специальностей: 1-31 04 02 Радиофизика, 1-31 04 03 Физическая электроника, 1-31 03 07 Прикладная информатика (по направлениям), 1-98 01 01 Компьютерная безопасность (по направлениям) отведено 236 часов, для специальности: 1-31 04 04 Аэрокосмические радиоэлектронные и информационные системы и технологии - 216 часов, в том числе 108 аудиторных часов, из них:

1 семестр – 54 аудиторных часа, из них: лекции – 30 часов, практические занятия – 24 часа.

2 семестр – 54 аудиторных часа, из них: лекции – 30 часов, практические занятия – 24 часа.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 6 зачетных единиц.

Форма текущей аттестации по учебной дисциплине – экзамен (в каждом семестре).

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Раздел 1. Элементы векторной алгебры.

Тема 1.1. Понятие вектора. Свободные и связанные векторы. Линейные операции над векторами. Проекции. Разложение вектора по базису. Аффинная система координат. Декартова прямоугольная система координат.

Тема 1.2. Определители второго и третьего порядков. Скалярное и векторное произведения: свойства, механический и геометрический смысл, вычисление в ортонормированном базисе.

Тема 1.3. Смешанное произведение: свойства, геометрический смысл, вычисление в ортонормированном базисе. Критерии коллинеарности, компланарности и перпендикулярности векторов. Двойное векторное произведения. Тождество Якоби.

Раздел 2. Прямые и плоскости.

Тема 2.1. Уравнения множества точек. Основные виды уравнений прямой на плоскости.

Тема 2.2. Основные виды уравнений плоскости. Основные виды уравнений прямой в пространстве.

Тема 2.3. Взаимное расположение прямой и плоскости. Взаимное расположение прямых в пространстве Расстояние от точки до прямой на плоскости и от точки до плоскости

Раздел 3. Линии второго порядка.

Тема 3.1. Определения эллипса, гиперболы, параболы и их канонические уравнения. Директрисы и эсксцентриситет эллипса и гиперболы.

Тема 3.2. Полярные уравнения эллипса, гиперболы, параболы. Оптические свойства эллипса, гиперболы, параболы. Касательные к эллипсу, гиперболе, параболе. Определение канонического уравнения второй степени.
Классификация линий второго порядка.

Раздел 4. Поверхности второго порядка.

Тема 4.1. Классификация поверхностей второго порядка по каноническому уравнению. Исследование формы поверхности методом параллельных сечений Прямолинейные образующие. Приведение к каноническому виду уравнений второй степени, не содержащих произведений переменных.

Раздел 5. Матрицы и определители.

Тема 5.1. Матрицы и линейные операции над ними. След матрицы. Умножение и транспонирование матриц. Блочные матрицы.

Тема 5.2. Определитель и его свойства. Теорема об определителе произведения матриц. Теоремы аннулирования и замещения. Обратная матрица.

Раздел 6. Системы линейных уравнений.

Тема 6.1. Матричные уравнения и их связь с системами линейных уравнений. Правило Крамера. Ранг матрицы. Критерий совместности системы линейных уравнений.

Тема 6.2. Теорема о базисном миноре. Теорема о ранге произведения матриц. Метод Гаусса исключения неизвестных. Общее решение неоднородной системы. Однородные системы линейных уравнений, фундаментальная система решений.

Раздел 7. Линейные пространства.

Тема 7.1. Определение линейного пространства и простейшие следствия из аксиом. Линейная зависимость и независимость. Базис и координаты. Размерность линейного пространства, связь между размерностью и базисом. Понятие аффинного пространства. R^n как пример аффинного, евклидова и метрического пространств.

Тема 7.2. Подпространства. Сумма и пересечение подпространств, прямая сумма. Линейная оболочка системы элементов линейного пространства. Размерность линейной оболочки строк или столбцов матрицы. Преобразования базиса и координат, матрица перехода от одного базиса к другому.

Раздел 8. Линейные операторы.

Тема 8.1. Понятие линейного оператора. Образ и ядро линейного оператора. Матрица линейного оператора. Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к новому базису.

Тема 8.2.Операции над линейными операторами. Обратный оператор. Изоморфизм линейных пространств. Пространство линейных форм (сопряженное пространство).

Тема 8.3.Собственные значения и собственные векторы. Присоединенные векторы.

Тема 8.4. Приведение квадратной матрицы к диагональному виду. Жорданова нормальная форма матрицы.

Раздел 9. Билинейные и квадратичные формы..

Тема 9.1. Билинейная форма и ее матрица. Изменение матрицы билинейной формы при изменении базиса. Конгруэнтные матрицы. Симметричные билинейные формы. Квадратичные формы и их связь с билинейными. Изменение матрицы квадратичной формы при изменении базиса. Канонический и нормальный виды квадратичной формы. Метод Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду. Закон инерции. Знакоопределенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра.

Раздел 10. Евклидовы и унитарные пространства.

Тема 10.1. Аксиоматическое определение скалярного произведения. Евклидовы и унитарные пространства, псевдоевклидовы пространства. Понятия длины и угла. Неравенства Коши-Буняковского и треугольника. Существование ортонормированного базиса (процесс ортогонализации Грама-

Шмидта). Матрица Грама и ее свойства. Выражение скалярного произведения через координаты перемножаемых векторов в различных базисах. Разложение евклидова или унитарного пространства в прямую сумму подпространств. Изоморфизм евклидовых пространств.

Раздел 11.Линейные операторы в евклидовых и унитарных пространствах.

Тема 11.1. Ортогональные, унитарные, эрмитовы и симметричные матрицы. Сопряженный линейный оператор и его матрица. Самосопряженные линейные операторы. Эрмитовы и симметричные операторы и их матрицы. Свойства собственных значений и собственных векторов самосопряженного оператора. Приводимость эрмитовых и симметричных матриц к диагональному виду. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом ортогональных преобразований. Одновременное приведение к каноническому виду пары квадратичных форм.

Тема 11.2. Приведение к каноническому виду уравнений линий и поверхностей второго порядка. Ортогональные и унитарные операторы и их матрицы. Основные свойства изометрий Классификация линейных операторов на евклидовой плоскости и в трехмерном евклидовом пространстве.

Раздел 12. Элементы тензорной алгебры.

Тема 12.1 Общее определение тензора. Основные операции над тензорами. Тензоры в евклидовых пространствах. Операции поднятия и опускания индексов. Евклидов (ортогональный) тензор.

Раздел 13. Элементы теории групп.

Тема 13.1 Понятие группы и подгруппы**.** Основные свойства групп. Изоморфизм групп. Группа преобразований Лоренца.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСТИПЛИНЫ

Дневная форма получения образования

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов				Количество часов УСР	Форма контроля знаний
		лекции	практические (семинарские) занятия	лабораторные занятия	иное		
1	2	3	4	5	6	7	9
	1-й семестр						
1	**Элементы векторной алгебры**	**5**	**6**				
1.1	Понятие вектора. Свободные и связанные векторы. Линейные операции над векторами. Проекции. Разложение вектора по базису. Аффинная система координат. Декартова прямоугольная система координат.	2	2				Устный опрос
1.2.	Определители второго и третьего порядков. Скалярное и векторное произведения: свойства, механический и геометрический смысл, вычисление в ортонормированном базисе.	2	2				Компьютерный тест
1.3.	Смешанное произведение: свойства, геометрический смысл, вычисление в ортонормированном базисе. Критерии коллинеарности, компланарности и перпендикулярности векторов. Двойное векторное произведения. Тождество Якоби.	1	2				Компьютерный тест
2.	**Прямая и плоскость**	**3**	**8**				
2.1	Уравнения множества точек. Основные виды уравнений прямой на плоскости.	1	2				Компьютерный тест
2.2.	Основные виды уравнений плоскости. Основные виды уравнений прямой в пространстве.	1	2				Компьютерный тест
2.3.	Взаимное расположение прямой и плоскости. Взаим-	1	4				Контрольная работа №1

	ное расположение прямых в пространстве Расстояние от точки до прямой на плоскости и от точки до плоскости.						по темам: 1.1.- 2.3.
3.	**Линии второго порядка**	**4**	**2**				
3.1.	Определения эллипса, гиперболы, параболы и их канонические уравнения. Директрисы и эскцентриситет эллипса и гиперболы.	2	1				Компьютерный тест
3.2.	Полярные уравнения эллипса, гиперболы, параболы. Оптические свойства эллипса, гиперболы, параболы. Касательные к эллипсу, гиперболе, параболе. Определение канонического уравнения второй степени. Классификация линий второго порядка.	2	1				Компьютерный тест
4.	**Поверхости второго порядка**	**5**	**2**				
4.1.	Классификация поверхностей второго порядка по каноническому уравнению. Исследование формы поверхности методом параллельных сечений Прямолинейные образующие. Приведение к каноническому виду уравнений второй степени, не содержащих произведений переменных.	5	2				Коллоквиум
5.	**Матрицы и определители**	**4**	**6**				
5.1.	Матрицы и линейные операции над ними. След матрицы. Умножение и транспонирование матриц. Блочные матрицы.	2	2				Компьютерный тест
5.2.	Определитель и его свойства. Теорема об определителе произведения матриц. Теоремы аннулирования и замещения. Обратная матрица.	2	4				Контрольная работа №2 по темам: 3.1.-5.2.
6	**Системы линейных уравнений**	**5**					
6.1.	Матричные уравнения и их связь с системами линейных уравнений. Правило Крамера. Ранг матрицы. Критерий совместности системы линейных уравнений.	2					Компьютерный тест
6.2.	Теорема о базисном миноре. Теорема о ранге произве-	3					Компьютерный тест

	дения матриц. Метод Гаусса исключения неизвестных. Общее решение неоднородной системы. Однородные системы линейных уравнений, фундаментальная система решений.						
7	**Линейные пространства**	**4**					
7.1.	Определение линейного пространства и простейшие следствия из аксиом. Линейная зависимость и независимость. Базис и координаты. Размерность линейного пространства, связь между размерностью и базисом. Понятие аффинного пространства. R^n как пример аффинного, евклидова и метрического пространств.	2					Компьютерный тест
7.2.	Подпространства. Сумма и пересечение подпространств, прямая сумма. Линейная оболочка системы элементов линейного пространства. Размерность линейной оболочки строк или столбцов матрицы. Преобразования базиса и координат, матрица перехода от одного базиса к другому.	**2**					Компьютерный тест
	Всего часов	**30**	**24**				
	2-й семестр						
6.	**Системы линейных уравнений**		**4**				Компьютерный тест
6.1.	Матричные уравнения и их связь с системами линейных уравнений. Правило Крамера. Ранг матрицы. Критерий совместности системы линейных уравнений.		2				Компьютерный тест
6.2.	Теорема о базисном миноре. Теорема о ранге произведения матриц. Метод Гаусса исключения неизвестных. Общее решение неоднородной системы. Однородные системы линейных уравнений, фундаментальная система решений		2				Компьютерный тест
7.	**Линейные пространства**	**2**	**6**				
7.1.	Определение линейного пространства и простейшие следствия из аксиом. Линейная зависимость и незави-		2				Компьютерный тест

	симость. Базис и координаты. Размерность линейного пространства, связь между размерностью и базисом. Понятие аффинного пространства. R^n как пример аффинного, евклидова и метрического пространств.						
7.2.	Подпространства. Сумма и пересечение подпространств, прямая сумма. Линейная оболочка системы элементов линейного пространства. Размерность линейной оболочки строк или столбцов матрицы. Преобразования базиса и координат, матрица перехода от одного базиса к другому.	2	4				Контрольная работа №3 по темам: 6.1. - 7.2.
8.	**Линейные операторы**	**7**	**6**				
8.1.	Понятие линейного оператора. Образ и ядро линейного оператора. Матрица линейного оператора. Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к новому базису.	2	1				Компьютерный тест
8.2.	Операции над линейными операторами. Обратный оператор. Изоморфизм линейных пространств. Пространство линейных форм (сопряженное пространство).	2	1				Компьютерный тест
8.3.	Собственные значения и собственные векторы. Присоединенные векторы.	2	2				Компьютерный тест
8.4.	Приведение квадратной матрицы к диагональному виду. Жорданова нормальная форма матрицы.	1	2				Компьютерный тест
9.	**Билинейные и квадратичные формы**	**5**	**2**				
9.1.	Билинейная форма и ее матрица. Изменение матрицы билинейной формы при изменении базиса. Конгруэнтные матрицы. Симметричные билинейные формы. Квадратичные формы и их связь с билинейными. Изменение матрицы квадратичной формы при изменении базиса. Канонический и нормальный виды квадратичной формы. Метод Лагранжа приведения квадратичной	5	2				Компьютерный тест

	формы к каноническому виду. Закон инерции. Знакоопределенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра						
10.	**Евклидовы и унитарные пространства**	**4**	**2**				
10.1.	Аксиоматическое определение скалярного произведения. Евклидовы и унитарные пространства, псевдоевклидовы пространства. Понятия длины и угла. Неравенства Коши-Буняковского и треугольника. Существование ортонормированного базиса (процесс ортогонализации Грама-Шмидта). Матрица Грама и ее свойства. Выражение скалярного произведения через координаты перемножаемых векторов в различных базисах. Разложение евклидова или унитарного пространства в прямую сумму подпространств. Изоморфизм евклидовых пространств.	4	2				Компьютерный тест
11.	**Линейные операторы в евклидовых и унитарных пространствах**	**4**	**4**				
11.1.	Ортогональные, унитарные, эрмитовы и симметричные матрицы. Сопряженный линейный оператор и его матрица. Самосопряженные линейные операторы. Эрмитовы и симметричные операторы и их матрицы. Свойства собственных значений и собственных векторов самосопряженного оператора. Приводимость эрмитовых и симметричных матриц к диагональному виду. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом ортогональных преобразований. Одновременное приведение к каноническому виду пары квадратичных форм.	2	1				Компьютерный тест
11.2	Приведение к каноническому виду уравнений линий и поверхностей второго порядка. Ортогональные и унитарные операторы и их матрицы. Основные свойства изометрий Классификация линейных операторов на евклидовой плоскости и в трехмерном евклидовом пространстве.	2	3				Контрольная работа №4 по темам: 8.3, 8.4, 9.1, 11.2

12	**Элементы тензорной алгебры**	**6**					
12.1.	Общее определение тензора. Основные операции над тензорами. Тензоры в евклидовых пространствах. Операции поднятия и опускания индексов. Евклидов (ортогональный) тензор. Общее определение тензора. Основные операции над тензорами. Тензоры в евклидовых пространствах. Евклидов (ортогональный) тензор.	6					Коллоквиум по темам 7.1-11.2
13	**Элементы теории групп**	**2**					
13.1	Понятие группы и подгруппы**.** Основные свойства групп. Изоморфизм групп. Группа преобразований Лоренца.	2					Компьютерный тест
	Всего часов	**30**	**24**				

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Перечень основной литературы

1. *Березкина, Л.Л.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра / Л.Л. Березкина — Мн.: РИВШ, 2019. —354 с.
2. *Беклемишев, Д.В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Д.В. Беклемишев — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. —312с.
3. *Ильин, В.А*. Аналитическая геометрия / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк— М.: ФИЗМАТЛИТ, 2019. —224 с.
4. *Ильин, В.А*. Линейная алгебра / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014. —280 с.
5. *Абрашина-Жадаева, Н.Г.* Аналитическая геометрия в примерах и задачах / Н.Г. Абрашина-Жадаева, Л.Л. Березкина, А.Н. Ковальчук, Н.К. Филиппова — Мн.: РИВШ, 2008. —156 с.
6. *Бурдун, А.А.* Сборник задач по алгебре и аналитической геометрии / А.А. Бурдун, Е.А. Мурашко, М.М. Толкачев, А.С. Феденко — Мн.: Унiверсiтэцскае, 1999. —302с.
7. Высшая математика. Сборник задач. Часть 1. Аналитическая геометрия. Анализ функции одной переменной. — Мн.:БГУ, 2013. —359с.
8. Высшая математика. Сборник задач. Часть 2. Линейная алгебра. Анализ функций многих переменных. — Мн.:БГУ, 2014. —384с.
9. Analytic geomertry / Н.Г. Абрашина-Жадаева, Л.Л. Березкина, М.А. Глецевич, Н.К. Филиппова — Мн.: БГУ, 2018. —242 с.
10. Абрашина–Жадаева Н.Г. Основы векторного и тензорного анализа : теория, задачи / Н.Г. Абрашина–Жадаева, И.А. Тимощенко — Мн.: БГУ, 2011. — 255 с.
11. Abrashina-Zhadaeva N.G. Vector and tensor analysis through examples and exercises / N.G. Abrashina-Zhadaeva, I.A. Timoshchenko. Minsk, BSU – 2019. – 250 p.

Перечень дополнительной литературы

12. *Умнов, А.Е.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра/ А.Е. Умнов — М.: МФТИ, 2011. —570 с.
13. *Милованов, М.В*. Алгебра и аналитическая геометрия. Ч.1 / М.В. Милованов, М.М.Толкачев Р.И. Тышкевич, А.С. Феденко — Мн.: Вышэйшая школа, 1984. —302 с.
14. *Милованов, М.В*. Алгебра и аналитическая геометрия. Ч.2 / М.В. Милованов, М.М.Толкачев Р.И. Тышкевич, А.С. Феденко — Мн.: Вышэйшая школа, 1987. —300 с.
15. *Шикин, Е.В.* Линейные пространства и отображения / Е.В. Шикин — М.: МГУ, 1987. — 302 с.

16.*Русак, В.Н.* Курс вышэйшай матэматыкі. Алгебра і геаметрыя, аналіз функцый адной зменнай / В.Н. Русак, Л. Шлома, В.К. Ахраменка, А.Крачкоускі — Мн.: Вышэйшая школа, 1994. —431 с.
17.*Апатенок, Р.Ф.* Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Р.Ф. Апатенок, А.М. Маркина, Н.В. Попова, В.Б Хейнман — Мн.: Вышэйшая школа, 1986. —285.

Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой оценки

Для диагностики компетенций и текущего контроля качества усвоения знаний по дисциплине рекомендуется использовать компьютерное тестирование по разделам дисциплины, коллоквиумы открытого типа, контрольные работы. Контрольные мероприятия проводятся в соответствии с учебно-методической картой дисциплины. В случае неявки на контрольное мероприятие по уважительной причине студент вправе по согласованию с преподавателем выполнить его в дополнительное время. Для студентов, получивших неудовлетворительные оценки за контрольные мероприятия, либо не явившихся по неуважительной причине, по согласованию с преподавателем и с разрешения заведующего кафедрой мероприятие может быть проведено повторно. Предлагается аналогичное домашнее задание, обязательное выполнение которого является необходимым условием для получения зачета и допуска к экзамену.

Контрольные работы проводится в письменной форме.

Коллоквиумы по результатам изучения заданных тем загружаются студентом в соответствующий курс на образовательном портале физического факультета (eduphys.bsu.by).

Оценка всех форм текущего контроля проводится по десятибалльной шкале.

Формой текущей аттестации по дисциплине учебным планом предусмотрен **экзамен**.

При формировании итоговой оценки используется рейтинговая оценка знаний студента. Рейтинговая оценка предусматривает использование весовых коэффициентов для текущего контроля знаний и текущей аттестации студентов по дисциплине.

Примерные весовые коэффициенты, определяющие вклад текущего контроля знаний и текущей аттестации в рейтинговую оценку:

Формирование оценки за текущего контроля:

- средняя оценка по контрольным работам – 50%;
- средняя оценка по компьютерным тестам – 20 %;
- средняя оценка по коллоквиумам – 30%.

Рейтинговая оценка по дисциплине рассчитывается на основе оценки текущего контроля и экзаменационной оценки с учетом их весовых коэффициентов. Вес оценки текущего контроля составляет 40 %, экзаменационной оценки – 60 %.

Примерный перечень тем практических занятий

1. Векторная алгебра.
2. Прямые и плоскости.
3. Линии и поверхности второго порядка.
4. Матрицы и определители.
5. Системы линейных алгебраических уравнений.
6. Линейные пространства.
7. Линейные операторы.
8. Собственные и присоединенные векторы линейного оператора. Приведение квадратной матрицы к диагональному виду.
9. Приведение к каноническому виду квадратичной формы. Исследование квадратичной формы на знакоопределенность.
10. Приведение к каноническому виду уравнений линий и поверхностей второго порядка

Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины

При организации образовательного процесса рекомендуется использовать следующие инновационные подходы и методы:

1. **Практико-ориентированный подход**, который предполагает освоение содержания образования через решения практических задач, которые способствуют формированию основ дальнейшей профессиональной деятельности.
2. **Развитие критического мышления**: формирование навыков работы с информацией в процессе чтения и письма; понимания информации как отправного, а не конечного пункта критического мышления.

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа студентов по данной дисциплине предполагает проработку основной и дополнительной литературы, самостоятельный поиск сведений, расширение конспекта лекций по результатам данной проработки. Самостоятельную работу студентов следует организовывать на основе принципов системности и регулярности. В помощь студентам рекомендуется разрабатывать и совершенствовать дистанционный курс на образовательном портале физического факультета.

Примерный перечень заданий для самостоятельной работы студентов

В качестве самостоятельной работы студентов планируется решение задач, выполнение упражнений. Форма контроля: контрольная работа, компьютерное тестирование, коллоквиум.

Отчет с выполненными заданиями на коллоквиуме загружается студентом в соответствующий курс на образовательном портале БГУ (eduphys.bsu.by).

Примерный перечень тем контрольных работ

1. Элементы векторной алгебры. Прямые и плоскости.
2. Матрицы и определители. Линии и поверхности второго порядка.
3. Системы линейных уравнений. Линейные пространства.
4. Собственные и присоединенные векторы линейного оператора. Приведение квадратной матрица к диагональному виду. Знакоопределенность квадратичных форм. Приведение к каноническому виду уравнений линий и поверхностей второго порядка.

Примерный перечень тем компьютерного тестирования:

1. Векторная алгебра.
2. Прямые и плоскости.
3. Линии и поверхности второго порядка.
4. Матрицы и определители.
5. Системы линейных алгебраических уравнений.
6. Линейные пространства.
7. Линейные операторы.
8. Билинейные и квадратичные формы.
9. Евклидовы пространства.
10. Линейные операторы в евклидовых пространствах.
11. Элементы тензорного исчисления.
12. Элементы теории групп.

Примерный перечень тем коллоквиумов

1. Линии и поверхности второго порядка.
2. Линейные пространства. Линейные операторы. Билинейные и квадратичные формы. Евклидовы пространства. Линейные операторы в евклидовых пространствах.

Примерный перечень тем практических занятий

1. Векторная алгебра.
2. Прямые и плоскости.
3. Линии и поверхности второго порядка.
4. Матрицы и определители.

5. Системы линейных алгебраических уравнений.
6. Линейные пространства.
7. Линейные операторы.
8. Собственные и присоединенные векторы линейного оператора. Приведение квадратной матрицы к диагональному виду.
9. Приведение к каноническому виду квадратичной формы. Исследование квадратичной формы на знакоопределенность.
10. Приведение к каноническому виду уравнений линий и поверхностей второго порядка

Примерный перечень вопросов к экзамену
1 семестр

Раздел 1. Необходимые понятия, определения и утверждения

1. Связанные и свободные векторы.
2. Сложение векторов. Правила треугольника, параллелограмма, замыкающей, параллелепипеда.
3. Свойства операции сложения.
4. Операция умножения вектора на число.
5. Критерии коллинеарности двух векторов и компланарности трех векторов.
6. Базис на прямой, на плоскости и в пространстве. Аффинная система координат. Прямоугольная декартова система координат.
7. Свойства координат векторов.
8. Выражение координат вектора через координаты его конца и начала. Выражение координат середины отрезка через координаты его концов.
9. Операция откладывания вектора от точки.
10. Ориентация тройки векторов. Свойства ориентации.
11. Алгебраическая и геометрическая проекции вектора. Свойства проекций.
12. Преобразования параллельного переноса и поворота систем координат.
13. Определение и свойства скалярного произведения векторов.
14. Выражение скалярного произведения через координаты перемножаемых векторов в ортонормированном базисе.
15. Выражение длины вектора через его координаты в ортонормированном базисе.
16. Выражение расстояния между двумя точками через их координаты в прямоугольной декартовой системе координат.
17. Направляющие косинусы вектора.
18. Определение векторного произведения векторов и его свойства.
19. Геометрический и физический смысл векторного произведения.
20. Понятие определителей второго и третьего порядка.

21. Выражение векторного произведения через координаты перемножаемых векторов в ортонормированном базисе.
22. Определение и свойства смешанного произведения векторов.
23. Выражение смешанного произведения через координаты перемножаемых векторов в ортонормированном базисе.
24. Двойное векторное произведение. Основная теорема о двойном векторном произведении.
25. Определение уравнения множества точек.
26. Векторное уравнение сферы.
27. Определение нормального вектора плоскости. Общее уравнение плоскости, геометрический смысл входящих коэффициентов. Уравнение первой степени.
28. Параметрические уравнения плоскости, геометрический смысл входящих параметров.
29. Определение направляющего вектора прямой. Параметрические и канонические уравнения прямой в пространстве, геометрический смысл входящих параметров.
30. Определение нормального вектора прямой на плоскости. Общее уравнение прямой на плоскости, геометрический смысл входящих коэффициентов.
31. Взаимное расположение плоскостей. Взаимное расположение прямых на плоскости.
32. Взаимное расположение прямой и плоскости. Взаимное расположение прямых в пространстве.
33. Расстояние от точки до прямой на плоскости. Расстояние от точки до плоскости.
34. Теорема о делении плоскости на две полуплоскости и о делении пространства на два полупространства.
35. Определение гиперболы, ее фокусы, полуоси, вершины и асимптоты. Различные виды канонического уравнения гиперболы. Рисунок.
36. Определение эллипса его фокусы, полуоси и вершины, Различные виды канонического уравнения эллипса. Рисунок.
37. Определение параболы. Различные виды канонического уравнения параболы. Рисунок.
38. Эксцентриситет и директрисы эллипса и гиперболы. Основное свойство точек эллипса по отношению к директрисам.
39. Общее определение эллипса, гиперболы и параболы.
40. Полярная система координат. Полярные уравнения эллипса, гиперболы и параболы.
41. Уравнения касательных к эллипсу, гиперболе и параболе.
42. Оптические свойства эллипса, гиперболы и параболы.
43. Уравнение второй степени. Определение канонического уравнения второй степени.
44. Определение линии и поверхности второго порядка.
45. Классификация линий второго порядка.

46. Классификация поверхностей второго порядка.
47. Канонические уравнения эллипсоида; эллиптического, гиперболического и параболического цилиндров; конуса второго порядка; однополостного и двуполостного гиперболоидов; эллиптического и гиперболического параболоидов. Рисунки.
48. Метод параллельных сечений. Уравнение проекции линии пересечения двух поверхностей на координатную плоскость.
49. Матрицы. Основные определения. Квадратная, нулевая и единичная матрицы.
50. Сложение матриц и его свойства.
51. Операция умножения матрицы на число и ее свойства.
52. Умножение матриц и его свойства.
53. Степени квадратной матрицы. Свойства степеней квадратной матрицы. Многочлен от матрицы.
54. Операция транспонирования матриц и ее свойства.
55. Определение определителя при помощи разложения по первой строке.
56. Миноры и алгебраические дополнения.
57. Лемма о разложении определителя по первому столбцу.
58. Лемма о равноправии строк и столбцов определителя.
59. Лемма о перестановке строк или столбцов определителя.
60. Теорема о разложении определителя по произвольной строке или столбцу.
61. Основные свойства определителей.
62. Теорема аннулирования.
63. Теорема замещения.
64. Невырожденные матрицы.
65. Обратная матрица. Свойства обратных матриц.
66. Необходимое условие существования обратной матрицы.
67. Теорема о существовании и единственности обратной матрицы.
68. Алгоритм нахождения обратной матрицы.
69. Системы линейных уравнений. Решение системы линейных уравнений. Совместные и несовместные системы.
70. Матрица системы линейных уравнений и ее расширенная матрица.
71. Матричные уравнения. Матричная форма записи системы линейных уравнений.
72. Правило Крамера решения систем линейных уравнений.
73. Определение ранга матрицы. Элементарные преобразования матрицы и определителя. Теорема об элементарных преобразованиях.
74. Свойства ранга матрицы.
75. Линейно зависимые и линейно независимые строки (столбцы) матрицы.
76. Определение базисного минора матрицы. Теорема о базисном миноре.
77. Теорема о линейной независимости строк или столбцов матрицы. Следствия.

78. Критерий совместности системы линейных уравнений (теорема Кронекера-Капелли).
79. Теорема о приведении ненулевой матрицы к простейшему виду.
80. Однородные системы линейных уравнений.
81. Свойства решений однородных систем линейных уравнений.
82. Фундаментальная система решений.
83. Неоднородные системы линейных уравнений. Свойства решений неоднородных систем линейных уравнений.

Раздел 2. Простейшие утверждения, требующие доказательства

1. Свойства операции сложения векторов.
2. Критерии коллинеарности и компланарности векторов.
3. Теорема о разложении вектора по базису в трехмерном пространстве.
4. Выражение координат вектора через координаты его конца и начала. Выражение координат середины отрезка через координаты его концов.
5. Свойства скалярного произведения векторов.
6. Выражение скалярного произведения векторов через координаты перемножаемых векторов в ортонормированном базисе.
7. Выражение длины вектора через его координаты в ортонормированном базисе.
8. Выражение расстояния между двумя точками через их координаты в прямоугольной декартовой системе координат.
9. Свойства векторного произведения векторов.
10. Выражение векторного произведения векторов через координаты перемножаемых векторов в ортонормированном базисе.
11. Критерий равенства нулю смешанного произведения (критерий компланарности).
12. Геометрический смысл смешанного произведения.
13. Выражение смешанного произведения векторов через координаты перемножаемых векторов в ортонормированном базисе.
14. Теорема о двойном векторном произведении.
15. Вывод общего уравнения плоскости. Теорема об уравнении первой степени.
16. Вывод параметрических уравнений плоскости.
17. Вывод параметрических и канонических уравнений прямой в пространстве.
18. Вывод формулы для вычисления расстояния от точки до прямой на плоскости. Расстояние от точки до плоскости.
19. Теорема о делении плоскости на две полуплоскости и о делении пространства на два полупространства.
20. Вывод канонического уравнения параболы.
21. Лемма о степенях квадратной матрицы.
22. Основные свойства определителей (без свойства об определителе произведения матриц).
23. Теорема аннулирования.

24. Теорема замещения.
25. Обратная матрица. Свойства обратных матриц.
26. Необходимое условие существования обратной матрицы.
27. Невырожденные матрицы и их свойства.
28. Критерий совместности системы линейных уравнений (теорема Кронекера-Капелли).
29. Свойства решений неоднородных систем линейных уравнений.

Раздел 3. Более сложные утверждения, требующие доказательства

30. Преобразования координат вектора на плоскости.
31. Свойства проекций вектора на ось.
32. Вывод векторного уравнения сферы.
33. Вывод канонического уравнения гиперболы.
34. Исследование формы гиперболы по её каноническому уравнению.
35. Вывод канонического уравнения эллипса.
36. Исследование формы эллипса по его каноническому уравнению.
37. Параметрические уравнения эллипса.
38. Доказательство основного свойства точек эллипса по отношению к директрисам.
39. Доказательство основного свойства точек гиперболы по отношению к директрисам.
40. Вывод полярных уравнений эллипса, гиперболы и параболы.
41. Вывод уравнений касательных к эллипсу.
42. Вывод уравнений касательных к гиперболе.
43. Вывод уравнений касательных к параболе.
44. Доказательство оптических свойств эллипса.
45. Доказательство оптических свойств гиперболы.
46. Доказательство оптических свойств параболы.
47. Исследование формы эллиптического, гиперболического и параболического цилиндров. Теорема о цилиндрической поверхности.
48. Исследование формы конуса. Теорема о конусе.
49. Исследование формы однополостного гиперболоида методом параллельных сечений. Асимптотический конус.
50. Исследование формы двуполостного гиперболоида методом параллельных сечений. Асимптотический конус.
51. Исследование формы эллипсоида методом параллельных сечений.
52. Исследование формы эллиптического параболоида методом параллельных сечений.
53. Исследование формы гиперболического параболоида методом параллельных сечений.
54. Свойства умножения матриц.
55. Свойства операции транспонирования матриц.
56. Лемма о разложении определителя по первому столбцу.
57. Теорема о разложении определителя по произвольной строке или столбцу.

58. Свойство определителя произведения матриц.
59. Теорема о существовании и единственности обратной матрицы.
60. Матричные уравнения и их связь с системами линейных уравнений. Матричная форма записи системы линейных уравнений.
61. Правило Крамера решения систем линейных уравнений.
62. Свойства ранга матрицы.
63. Теорема о базисном миноре.
64. Теорема о линейной независимости строк или столбцов матрицы. Следствия.
65. Теорема о приведении ненулевой матрицы к простейшему виду (на римере).
66. Свойства решений однородных систем линейных уравнений.

Примерный перечень вопросов к экзамену
2 семестр

1. Вопросы, которые необходимо знать для получения оценки 4 или 5
(все вопросы без доказательств)

1. Понятие матрицы. Квадратные, треугольные, диагональные матрицы. Нулевая и единичная матрицы. Символ Кронекера.
2. Операции над матрицами: сложение, умножение на число, умножение матриц, транспонирование. Свойства этих операций.
3. Степени квадратной матрицы.
4. Понятие определителя. Основные свойства определителей.
5. Определение обратной матрицы. Формула для ее нахождения.
6. Однородные системы линейных уравнений. Количество решений. Фундаментальная система решений.
7. Определение линейного пространства и простейшие следствия из аксиом.
8. Определение линейной зависимости и независимости элементов линейного пространства. Свойства линейной зависимости и независимости.
9. Базис и координаты в линейном пространстве. Свойства координат векторов.
10. Матричный критерий линейной зависимости и независимости.
11. Определение матрицы перехода.
12. Определение линейного оператора и его простейшие свойства.
13. Определение собственного вектора линейного оператора.
14. Характеристический многочлен и характеристические числа линейного оператора и его матрицы. Правило нахождения собственных векторов.
15. Определение приводимости квадратной матрицы к диагональному виду. Второй критерий приводимости квадратной матрицы к диагональному виду.
16. Присоединенные векторы и правило их нахождения.

17. Определение билинейной формы.
18. Определение квадратичной формы.
19. Канонический и нормальный виды квадратичной формы.
20. Определение знакоопределенной и знакопеременной квадратичной формы. Необходимое условие знакоопределенности.
21. Критерий Сильвестра знакоопределенности квадратичных форм. Достаточные условия знакопеременности квадратичных форм.
22. Аксиоматическое определение скалярного произведения на действительном линейном пространстве. Следствия из аксиом. Евклидовы пространства. Примеры евклидовых пространств.
23. Определение длины вектора в евклидовом пространстве и угла между векторами. Неравенства Коши – Буняковского и треугольника. Запись формулы для вычисления длины вектора, а также неравенств Коши – Буняковского и треугольника для основных примеров евклидовых пространств.
24. Ортогональные и ортонормированные системы векторов. Ортогональность тригонометрической системы.
25. Выражение скалярного произведения через координаты перемножаемых векторов в ортонормированном базисе.
26. Определение самосопряженного оператора. Симметричные и эрмитовы операторы. Свойства собственных значений эрмитовых операторов и собственных векторов эрмитовых и симметричных операторов.
27. Определение изометрии. Ортогональные и унитарные операторы.
28. Классификация ортогональных операторов на евклидовой плоскости.
29. Классификация ортогональных операторов в трехмерном евклидовом пространстве.
30. Классификация симметричных операторов на евклидовой плоскости и в трехмерном евклидовом пространстве.
31. Общее определение тензора. Примеры тензоров.
32. Определение группы

2. Вопросы, которые необходимо знать для получения оценки 6 или 7 (выделенные с доказательством)

33. Понятие матрицы. Квадратные, треугольные, диагональные матрицы. Нулевая и единичная матрицы. Символ Кронекера.
34. Операции над матрицами: сложение, умножение на число, умножение матриц, транспонирование. Свойства этих операций.
35. Степени квадратной матрицы.
36. Понятие определителя. Основные свойства определителей.
37. Определение обратной матрицы. Формула для ее нахождения.
38. Однородные системы линейных уравнений. Количество решений. Фундаментальная система решений.
39. Определение линейного пространства и **простейшие следствия из аксиом.**

40. Определение линейной зависимости и независимости элементов линейного пространства. **Свойства линейной зависимости и независимости.**
41. Базис и координаты в линейном пространстве. Свойства координат векторов.
42. Матричный критерий линейной зависимости и независимости.
43. Определение размерности линейного пространства. **Теорема о связи базиса и размерности**. Следствия.
44. Определение подпространства линейного пространства и теорема о подпространствах.
45. Определение матрицы перехода и её свойства.
46. Определение матрицы перехода. Изменение координат вектора при изменении базиса. Линейное невырожденное преобразование переменных.
47. Определение линейного оператора и его **простейшие свойства. Следствие из определения**.
48. Определение матрицы линейного оператора. Связь координат вектора с координатами его образа.
49. Определение матрицы линейного оператора. Изменение матрицы линейного оператора при изменении базиса. Подобные матрицы.
50. Операции над линейными операторами.
51. Невырожденные линейные операторы. Теорема о матрице.
52. Обратный линейный оператор. Матрица обратного линейного оператора в конечномерном линейном пространстве.
53. Определение изоморфизма линейных пространств. Теорема о размерности изоморфных пространств.
54. Определение и **свойства собственных векторов линейного оператора**.
55. Характеристический многочлен и характеристические числа линейного оператора и его матрицы. **Правило нахождения собственных векторов (с выводом).** Лемма о решении вырожденной однородной системы линейных уравнений**.**
56. Определение приводимости квадратной матрицы к диагональному виду. Второй критерий приводимости квадратной матрицы к диагональному виду.
57. Присоединенные векторы и правило их нахождения.
58. Определение билинейной формы и различные способы её записи.
59. Изменение матрицы билинейной формы при изменении базиса.
60. Невырожденные и симметричные билинейные формы, их матрицы.
61. Квадратичные формы и их связь с билинейными формами. Различные способы записи квадратичной формы. Изменение матрицы квадратичной формы при изменении базиса.
62. Канонический и нормальный виды квадратичной формы.
63. Определение знакоопределенной квадратичной формы. Полуопределенные и знакопеременные формы. **Необходимое условие знакоопре-**

деленности. Исследование знакоопределенности по каноническому виду.

64. Критерий Сильвестра знакоопределенности квадратичных форм.
65. Аксиоматическое определение скалярного произведения на действительном линейном пространстве. **Следствия из аксиом**. Евклидовы пространства.
66. Псевдоевклидовы пространства.
67. Аксиоматическое определение скалярного произведения на комплексном линейном пространстве. Следствия из аксиом. Унитарные пространства**.**
68. **Неравенства Коши – Буняковского и треугольника.**
69. Ортогональные и ортонормированные системы векторов. **Теорема о линейной независимости**. Тригонометрическая ортогональная система.
70. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта. Пример.
71. Матрица Грама. Выражение скалярного произведения через координаты перемножаемых векторов. Изменение матрицы Грама при изменении базиса.
72. Ортогональные и унитарные матрицы и **их свойства**. Теорема о матрице перехода. Свойства эрмитовых и симметричных матриц.
73. Определение самосопряженного оператора. Эрмитовы и симметричные операторы. **Теоремы о матрице, о собственных значениях и собственных векторах**. Следствия из этих теорем.
74. Определение самосопряженного оператора и теорема об ортонормированном базисе.
75. Теорема о приведении квадратичной формы к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования переменных.
76. Определение изометрии. Ортогональные и унитарные операторы. Теорема о собственных значениях изометрии.
77. Определение изометрии и теорема о длинах.
78. Определение изометрии и теорема об ортонормированном базисе.
79. Матрицы ортогональных и унитарных операторов.
80. **Классификация ортогональных операторов на евклидовой плоскости.**
81. Классификация ортогональных операторов в трехмерном евклидовом пространстве.
82. Классификация симметричных операторов на евклидовой плоскости и в трехмерном евклидовом пространстве.
83. Общее определение тензора. Примеры тензоров.
84. Общее определение тензора. Основные операции над тензорами.
85. Тензоры в евклидовом пространстве. Метрический тензор. Операции поднятия и опускания индексов. Тензоры в ортонормированных базисах. Евклидов (ортогональный) тензор.
86. Определение группы и простейшие следствия из аксиом.
87. Группа Лоренца.

Вопросы, которые необходимо знать для получения оценки 8,9 или 10

Все вопросы с доказательством или выводом, если не указано противное.

88. Однородные системы линейных уравнений. Количество решений, свойства решений. Фундаментальная система решений (без доказательства).
89. Неоднородные системы линейных уравнений. Связь решений неоднородной системы и союзной к ней однородной (без доказательства).
90. Определение линейного пространства и простейшие следствия из аксиом.
91. Определение линейной зависимости и независимости элементов линейного пространства. Свойства линейной зависимости и независимости.
92. Базис и координаты в линейном пространстве. Координатный столбец вектора. Свойства координат векторов.
93. Матричный критерий линейной зависимости и независимости.
94. Определение размерности линейного пространства. Теорема о связи базиса и размерности. Следствия.
95. Определение размерности линейного пространства. Теорема о дополнении линейно независимой системы до базиса.
96. Определение аффинного пространства и следствия из аксиом.
97. $\boldsymbol{R}^{n}$ как пример аффинного, евклидова и метрического пространств.
98. Определение подпространства линейного пространства и теорема о подпространствах. Теорема о размерности подпространства.
99. Линейные оболочки. Теорема о размерности линейной оболочки произвольной системы векторов.
100. Теорема о размерности линейной оболочки строк (столбцов) матрицы. Второе определение ранга матрицы.
101. Теорема о ранге произведения матриц.
102. Определение суммы и пересечения подпространств линейного пространства. Теорема о сумме и пересечении подпространств.
103. Определение суммы и пересечения подпространств линейного пространства. Теорема о размерности суммы. Размерность прямой суммы.
104. Определение матрицы перехода и её свойства.
105. Определение матрицы перехода. Изменение координат вектора при изменении базиса. Линейное невырожденное преобразование переменных.
106. Понятие отображения. Произведение (композиция) отображений. Ассоциативность произведения. Тождественное отображение и его свойства.

107. Определение сюрьективности и инъективности. Взаимно однозначное отображение. Обратное отображение, теорема о его существовании.
108. Определение линейного оператора, следствие из определения. Простейшие свойства линейного оператора.
109. Определение линейного оператора. Теорема о существовании линейного оператора.
110. Определение матрицы линейного оператора. Связь координат вектора с координатами его образа.
111. Определение матрицы линейного оператора. Изменение матрицы линейного оператора при изменении базиса. Подобные матрицы. Лемма о подобных матрицах.
112. Операции над линейными операторами. Теорема о матрице.
113. Невырожденные линейные операторы. Теорема о матрице.
114. Невырожденные линейные операторы. Теорема о взаимной однозначности.
115. Обратный линейный оператор. Теорема о матрице.
116. Определение и свойства изоморфизма линейных пространств.
117. Определение изоморфизма линейных пространств. Теорема о размерности изоморфных пространств.
118. Определение изоморфизма линейных пространств. Теорема об изоморфности пространств одинаковой размерности.
119. Образ и ядро линейного оператора. Теорема о подпространствах.
120. Линейные формы. Сопряженное пространство. Компоненты линейной формы и закон их изменения при переходе к новому базису. Взаимные базисы.
121. Определение и свойства собственных векторов. Собственные подпространства. Геометрическая кратность собственного значения.
122. Характеристический многочлен и характеристические числа линейного оператора и его матрицы. Правило нахождения собственных векторов. Лемма о решении вырожденной однородной системы линейных уравнений.
123. Лемма о диагональном виде матрицы линейного оператора. Определение приводимости квадратной матрицы к диагональному виду и первая теорема о приводимости. Следствие. Замечание о матрице, приводящей матрицу A к диагональному виду.
124. Лемма о связи геометрической и алгебраической кратностей собственного значения.
125. Определение приводимости квадратной матрицы к диагональному виду и вторая теорема о приводимости.
126. Присоединенные векторы и правило их нахождения.
127. Определение билинейной формы и различные способы её записи. Матрица билинейной формы.
128. Изменение матрицы билинейной формы при изменении базиса.

129. Конгруэнтные матрицы. Лемма о конгруэнтных матрицах. Ранг билинейной формы. Невырожденные билинейные формы,
130. Симметричные билинейные формы и их матрицы.
131. Квадратичные формы и их связь с билинейными формами. Различные способы записи квадратичной формы. Изменение матрицы квадратичной формы при изменении базиса.
132. Канонический и нормальный виды квадратичной формы. Метод Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду (примеры). Закон инерции.
133. Определение знакоопределенной квадратичной формы. Полуопределенные и знакопеременные формы. Необходимое условие знакоопределенности. Исследование знакоопределенности по каноническому виду.
134. Критерий Сильвестра знакоопределенности квадратичных форм. Достаточные условия знакопеременности квадратичных форм.
135. Аксиоматическое определение скалярного произведения на действительном линейном пространстве. Следствия из аксиом. Евклидовы пространства. Псевдоевклидовы пространства.
136. Аксиоматическое определение скалярного произведения на комплексном линейном пространстве. Следствия из аксиом. Унитарные пространства.
137. Длина вектора. Определение угла между векторами в евклидовом пространстве. Неравенства Коши – Буняковского и треугольника.
138. Ортогональные и ортонормированные системы векторов. Теорема о линейной независимости. Тригонометрическая ортогональная система.
139. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта. Пример.
140. Матрица Грама. Выражение скалярного произведения через координаты перемножаемых векторов. Изменение матрицы Грама при изменении базиса.
141. Подпространство евклидова (унитарного) пространства и его ортогональное дополнение. Теорема об ортогональном дополнении.
142. Теорема о разложении евклидова (унитарного) пространства в прямую сумму подпространств.
143. Ортогональная проекция на подпространство. Неравенство Бесселя. Основной пример.
144. Изоморфизм евклидовых или унитарных пространств.
145. Ортогональные и унитарные матрицы и их свойства. **Теорема о матрице перехода.** Свойства эрмитовых и симметричных матриц.
146. Сопряженный линейный оператор. Теорема существования и единственности. Свойства сопряженных операторов (без доказательства).
147. Определение самосопряженного оператора. Теоремы о матрице, о собственных значениях и собственных векторах. Следствия из этих теорем.

148. Определение самосопряженного оператора. Теорема об инвариантности ортогонального дополнения.
149. Определение самосопряженного оператора и теорема об ортонормированном базисе.
150. Приведение квадратичной формы к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования переменных. Еще один критерий знакоопределенности квадратичной формы.
151. Приведение уравнений поверхностей второго порядка к каноническому виду (решение задач).
152. Определение изометрии. Ортогональные и унитарные операторы. Теорема о собственных значениях изометрии.
153. Определение изометрии и теорема о длинах.
154. Определение изометрии и теорема об ортонормированном базисе.
155. Определение изометрии и теорема об обратном операторе. Матрицы ортогональных и унитарных операторов. Теорема об инвариантности ортогонального дополнения (без доказательства).
156. Классификация ортогональных операторов на евклидовой плоскости.
157. Классификация ортогональных операторов в трехмерном евклидовом пространстве.
158. Классификация симметричных операторов на евклидовой плоскости и в трехмерном евклидовом пространстве.
159. Общее определение тензора. Примеры тензоров.
160. Общее определение тензора. Основные операции над тензорами. Прямой тензорный признак.
161. Общее определение тензора. Обратный тензорный признак (без доказательства).
162. Преобразования взаимных базисов.
163. Тензоры в евклидовом пространстве. Метрический тензор. Контравариантные и ковариантные компоненты вектора.
164. Операции поднятия и опускания индексов. Тензоры в ортонормированных базисах. Евклидов (ортогональный) тензор.
165. Определение группы и простейшие следствия из аксиом.
166. Группа Лоренца.

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УВО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
Математический анализ	Высшей математики и математической физики	нет	Рекомендовать к утверждению в представленном варианте (протокол № 10 от 26.05.2020)
Дифференциальные уравнения	Высшей математики и математической физики	нет	Рекомендовать к утверждению в представленном варианте (протокол № 10 от 26.05.2020)
Общая физика	Физики и аэрокосмических технологий	нет	Рекомендовать к утверждению в представленном варианте (протокол № 10 от 26.05.2020)

ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ УВО

на 2021/2022 учебный год

№№ пп	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры высшей математики и математической физики

(протокол № от 2020 г.)

Заведующая кафедрой высшей математики
и математической физики ___________Н.Г. Абрашина-Жадаева

УТВЕРЖДАЮ

Декан физического факультета

к.ф.-м.н., доцент _____________ М.С. Тиванов