вложения (3), поскольку в согласии с [4] точный порядок рациональных приближений на более узком классе W^rV_M также равен $(1/n)^{r+1}$.

Замечание 1. Для наилучших полиномиальных приближений на классе $W^r\Omega_M$ нетрудно получить оценку

$$\sup_{f\in W^r\Omega_M} E_n(f) \asymp \left(\frac{1}{n}\right)^r, \ r\in N,$$

которая в сравнении с (2) означает, что полиномиальная аппроксимация на этом классе на порядок больше, чем рациональная.

1. Бесов О. В. // Докл. АН СССР. 1963. Т. 150. № 3. С. 497.
2. Бесов О. В. // Матем. сб. 1965. Т. 66. № 1. С. 963.
3. Тиман А. Ф. // Теория приближения функций действительной переменной. М., 1960. С. 177.
4. Petrushev P. P., Popov V. A. Rational Approximation of real Functions. Cambridge, 1987. P. 114.

Поступила в редакцию 20. 12.93.

УДК 519.1

Д. П. ПОДКОПАЕВ

О НЕЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ВЕРШИНАХ МНОГОГРАННИКА ЗАДАЧИ О k-МЕДИАНЕ ГРАФА*

New fractional vertices of graph medians polytope has been found

Многогранником $M(k, n)$, $n\geq 2$, $1\leq k\leq n-1$, $n, k\in N$ известной задачи о k-медиане графа [1, 2] является множество матриц $X = \| x_{ij}\|_{n\times n}$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ii} = k, \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \ \forall i\in N_n, \tag{2}$$

$$x_{ij}\leq x_{jj}, \ \forall (i,j)\in N_n^2, \ i\neq j, \tag{3}$$

$$x_{ij}\geq 0, \ \forall (i, j)\in N_n^2, \tag{4}$$

где $N_n = \{1, 2, ..., n\}$.

Известны следующие свойства многогранника $M(k, n)$ (см. [1, 3, 4,]):
1) размерность многогранника $M(k, n)$ при любом k, $1\leq k\leq n-1$, равна n^2-n-1;
2) при $k=1$, $n-1$ многогранник является целочисленным, т. е. все его вершины целочисленные;
3) количество целочисленных вершин многогранника $M(k, n)$ равно $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right] k^{n-k}$;
4) при $2\leq k\leq n-2$ многогранник имеет нецелочисленные вершины.

Если $2\leq k\leq n-2$, то, как показано в [1], для всякой пары неравных индексов s, $p\in N_n$ точка X многогранника $M(k, n)$ с компонентами

$$x_{is} = \frac{n-k-1}{n-2}, \quad \forall i\in N_n; \ x_{ii} = \frac{k-1}{n-2}, \ \forall i\in N_n \setminus \{s\}; \ x_{sp} = \frac{k-1}{n-2}; \tag{5}$$

$x_{ij} = 0$ для остальных (i, j) из N^2_n является нецелочисленной вершиной. Тем самым при $2\leq k\leq n-2$ число нецелочисленных вершин многогранника $M(k, n)$ не менее числа $\left[\begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix}\right]$.

Следующая теорема указывает новые нецелочисленные вершины.

* Работа финансировалась Фондом фундаментальных исследований Республики Беларусь.

Теорема. Пусть $n \geqslant 4$, $2 \leqslant k \leqslant n-2$, $0 \leqslant q \leqslant k-2$. Тогда для любого $w \subset N_n$, $|w| = q$, любых $s, p \in N_n \setminus w$, $s \neq p$, точка $Y = \| y_{ij} \|_{n \times n}$ с элементами

$$y_{is} = \frac{n-k-1}{n-q-2}, \ \forall i \in N_n \setminus w,$$

$$y_{ii} = \frac{k-q-1}{n-q-2}, \ \forall i \in N_n \setminus w, \ i \neq s,$$

$$y_{ii} = 1, \ \forall i \in w,$$

$$y_{sp} = \frac{k-q-1}{n-q-2},$$

$y_{ij} = 0$ для остальных (i, j) из N^2_n является нецелочисленной вершиной многогранника $M(k, n)$.

Доказательство. Легко видеть, что $Y \in M(k, n)$. Как известно [1], точка X многогранника в пространстве R^m является его вершиной, если среди условий, задающих многогранник, найдутся m линейно независимых ограничений, каждому из которых X удовлетворяет как равенству. Поэтому для доказательства теоремы достаточно найти среди условий (1)—(4) n^2 линейно независимых ограничений, каждому из которых Y удовлетворяет как равенству. Рассмотрим систему уравнений, составленную из (1), (2) и следующих условий:

$$x_{is} = x_{ss}, \ \forall i \in N_n \setminus w, \ i \neq s,$$

$$x_{ij} = 0, \ (i, j) \in J_1 \cup J_2,$$

где $J_1 = \{(i, j) \in N^2_n \colon i \neq j, \ j \neq s, \ (i, j) \neq (s, p)\}$, $J_2 = \{(i, j) \in N^2_n \colon j = s, \ i \in w\}$.

Перепишем ее в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ii} = k, \tag{6}$$

$$x_{ss} + x_{sp} = 1, \tag{7}$$

$$x_{ii} + x_{is} = 1, \ \forall i \in N_n \setminus w, \ i \neq s, \tag{8}$$

$$x_{ii} = 1, \ \forall i \in w, \tag{9}$$

$$x_{is} = x_{ss}, \ \forall i \in N_n \setminus w, \ i \neq s, \tag{10}$$

$$x_{ij} = 0 \text{ для остальных } (i, j). \tag{11}$$

Нетрудно показать, что матрица Y является ее решением. Докажем, что ранг этой системы равен n^2.

Рассмотрим следующую систему уравнений:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ii} = 0, \tag{12}$$

$$x_{ss} + x_{sp} = 0, \tag{13}$$

$$x_{ii} + x_{is} = 0, \ \forall i \in N_n \setminus w, \ i \neq s, \tag{14}$$

$$x_{ii} = 0, \ \forall i \in w, \tag{15}$$

$$x_{is} + x_{ss}, \ \forall i \in N_n \setminus w, \ i \neq s, \tag{16}$$

$$x_{ij} = 0 \text{ для остальных } (i, j). \tag{17}$$

Пусть Z – ее решение. Предположим, что $z_{ss} = a$. Тогда из (16), (14), (13) следуют равенства $z_{is} = a$, $\forall i \in N_n \setminus w$; $z_{ii} = -a$, $\forall i \in N_n \setminus w$, $i \neq s$; $z_{sp} = -a$. Кроме того, $\sum_{i=1}^{n} x_{ii} = (-a)(n-q-1) + a = 0$. Отсюда получаем $a = 0$. Поэтому, если Z — решение системы (12)—(17), то $z_{ij} = 0$, $\forall (i, j) \in N^2_n$. Следовательно, ранг этой системы, а значит, и системы (6)—(11), равен n^2. Поэтому система ограничений (6)—(11) состоит из n^2 линейно независимых уравнений. Теорема доказана.

Заметим, что при $q=0$ теорема дает вершины с компонентами, заданными формулами (5).

Поскольку при фиксированных числах $n \geqslant 4$, $2 \leqslant k \leqslant n-2$, $0 \leqslant q \leqslant k-2$ количество вершин, указанных в формулировке теоремы, равно $\begin{bmatrix} n \\ q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-q \\ 2 \end{bmatrix}$, то справедливо

Следствие. Число нецелочисленных вершин многогранника $M(k, n)$ при $n \geqslant 4$, $2 \leqslant k \leqslant n-2$ не меньше числа $\sum_{q=0}^{k-2} \begin{bmatrix} n \\ q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-q \\ 2 \end{bmatrix}$.

1. Емеличев В. А., Ковалев М. М., Кравцов М. К. Многогранники, графы, оптимизация. М., 1981.
2. Кристофидес Н. Теория графов: алгоритмический подход. М., 1878.
3. Ковалев М. М., Нгуен Нгиа. Многогранник медиан графа // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1988. № 3. С. 45.
4. Горунович С. А. Алгоритм нахождения p-медиан графа // Кибернетика. 1985. № 5. С. 67.

Поступила в редакцию 01.02.94.