функции $\beta(t)$ и $\gamma(t)$ определяются равенствами

$$\beta = \frac{-1}{p_{24}+\bar{p}_{13}}(p_{14}\alpha + \bar{p}_{14}\delta),$$

$$\gamma = \frac{1}{p_{24}+\bar{p}_{13}}(\bar{p}_{23}\alpha + p_{23}\delta).$$

При этом матрица

$$\begin{bmatrix} \alpha(t) & \beta(t) \\ \gamma(t) & \delta(t) \end{bmatrix}$$

является отражающей матрицей системы (3).

Доказательство первой части леммы следует из основного соотношения [1]:

$$M'(t) + M(t)P(t) + P(-t)M(t) = 0, \quad M(0) = E,$$

где $P(t)$ — матрица коэффициентов системы (1), E — единичная матрица. Это соотношение является необходимым и достаточным для того, чтобы дифференцируемая матрица $M(t)$ была ОМ системы (1).

Доказательство второй части леммы следует из теоремы 1 [2] и условий на коэффициенты системы (1):

$$p_{13}(0) = p_{14}(0) = p_{23}(0) = p_{24}(0) =$$

$$= p_{31}(0) = p_{32}(0) = p_{41}(0) = p_{42}(0) = 0.$$

1. Мироненко В. И. Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений. Мн., 1986. С. 30.
2. Альсевич Л. А. // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22. № 5. С. 882.
3. Мироненко В. И. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1992. № 1. С. 39.
4. Мироненко В. И., Кастрица О. А. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1994. № 1. С. 67.

Поступила в редакцию 01.07.93.

УДК 517.5

В. Н. РУСАК, Н. К. АГАФОНОВА

ТОЧНЫЙ ПОРЯДОК НАИЛУЧШИХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ФУНКЦИЙ

The nonperiodical continuou functions with a given restriction for integral modulas of smoothness are studied. Exact orders of the best rational approximations in uniform metric are found for those classes of functions.

Пусть $C[a, b]$ — пространство непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций $f(x)$, где норма задается равенством

$$\| f(x) \| = \sup_{a \le x \le b} | f(x) |.$$

Будем рассматривать конечные разности порядка $r+1$ с шагом τ

$$\Delta^{r}_{r+1} f(x) = \sum_{\nu=0}^{r+1} (-1)^{\nu} C^{\nu}_{r+1} f(x+\nu\tau),$$

и обозначим через $W^r\Omega_M$, $r \in N$, классы функций из пространства $C[a, b]$, которые подчинены ограничению

$$\int_a^{b-(r+1)\tau} | \Delta^{r}_{r+1} f(x) | \, dx \le M\tau^{r+1}, \text{ для любого } \tau > 0. \qquad (1)$$

Пусть $E_n(f)$ — наилучшее приближение функции $f(x) \in C[a, b]$ алгебраическими полиномами в равномерной метрике, т. е.

$$E_n(f) = \inf_{p_n(x)} \| f(x) - p_n(x) \|.$$

В свою очередь, наилучшее рациональное приближение в метрике пространства $C[a, b]$ определяется равенством:

$$R_n(f)=\inf_{r_n(x)}\|f(x)-r_n(x)\|,\ r_n(x)=p_n(x)/q_n(x),$$

где $p_n(x)$ и $q_n(x)$ — алгебраические полиномы порядка не выше n.

Если бесконечно малые (α_n) и (β_n) имеют одинаковый порядок, то пишем $\alpha_n \asymp \beta_n$, и через C_j обозначаем положительные константы, не зависящие от n и f.

Теорема 1.

$$\sup_{f\in W^r\Omega_M} R_n(f) \asymp \left(\frac{1}{n}\right)^{r+1},\ r\in N. \tag{2}$$

Доказательство теоремы базируется на промежуточном приближении класса $W^r\Omega_M$ такими функциями, которые имеют r-ую производную ограниченной вариации. Пусть W^rV_M, $r\in N$, есть класс функций $f(x)$ из пространства $C[a, b]$, которые можно представить по формуле:

$$f(x)=\sum_{j=0}^{r}\frac{f^{(\nu)}(x)}{\nu!}(x-a)^\nu+\frac{1}{r!}\int_a^x (x-t)^r df^{(r)}(t),\ \left[\operatorname{Var} f(x)\right]_a^b\leqslant M.$$

Непосредственно проверяется, что имеется вложение

$$W^rV_M\subset W^r\Omega_{C_1M},\ r\in N. \tag{3}$$

Из [1, 2] следует, что существует такое непрерывное финитное продолжение $F(x)$ на $(-\infty, \infty)$, для которого $F(x)=f(x)$, если $x\in[a, b]$, и выполнено неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\Delta_{r+1}^{\tau}F(x)|\,dx\leqslant C_2M\tau^{r+1}. \tag{4}$$

Для продолженной функции $F(x)$ определим функции Стеклова, полагая

$$F_{h,1}(x)=\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}F(u)du=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}F(x+v)dv,$$

$$F_{h,j}(x)=\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}F_{h,j-1}(u)du.$$

Пользуясь свойствами конечных разностей и функций Стеклова [3], с помощью (1) находим, что усреднение $F_{h,r+1}(x)$ удовлетворяет условию (4), имеет абсолютно непрерывную производную порядка r и при любом h

$$\left[\operatorname{Var}F_{h,r+1}^{(r)}(x)\right]_a^b=\int_a^b|F_{h,r+1}^{(r+1)}(x)|\,dx\leqslant C_2M. \tag{5}$$

Кроме того, выполняется равенство

$$\lim_{h\to 0}F_{h,r+1}(x)=f(x),\ x\in[a, b].$$

В силу неравенства (5) и теоремы В. А. Попова [4] существует рациональная функция $r_{n,h}(x)$ порядка не выше n такая, что

$$\|F_{h,r+1}(x)-r_{n,h}(x)\|\leqslant\frac{C_3}{n^{r+1}}, \tag{6}$$

причем полюсы $\{z_k\}$ рациональной функции $r_{n,h}(x)$ подчинены соотношению

$$|z_k-x|\geqslant C_4/n^{r+1},\ x\in[a, b],$$

а положительные константы не зависят от h.

Таким образом, рациональные функции $r_{n,h}(x)$ образуют нормальное семейство, из которого можно выделить последовательность, сходящуюся по норме пространства $C[a, b]$. Перейдя в (6) к пределу при $h\to 0$ по указанной последовательности, получим

$$\|f(x)-r_n(x)\|\leqslant\frac{C_3}{n^{r+1}}.$$

Что касается нижней оценки в соотношении (2), то она вытекает из вложения (3), поскольку в согласии с [4] точный порядок рациональных приближений на более узком классе W^rV_M также равен $(1/n)^{r+1}$.

Замечание 1. Для наилучших полиномиальных приближений на классе $W^r\Omega_M$ нетрудно получить оценку

$$\sup_{f\in W^r\Omega_M} E_n(f) \asymp \left(\frac{1}{n}\right)^r, \quad r\in N,$$

которая в сравнении с (2) означает, что полиномиальная аппроксимация на этом классе на порядок больше, чем рациональная.

1. Б е с о в О. В. // Докл. АН СССР. 1963. Т. 150. № 3. С. 497.
2. Б е с о в О. В. // Матем. сб. 1965. Т. 66. № 1. С. 963.
3. Т и м а н А. Ф. // Теория приближения функций действительной переменной. М., 1960. С. 177.
4. P e t r u s h e v P. P., P o p o v V. A. Rational Approximation of real Functions. Cambridge, 1987. P. 114.

Поступила в редакцию 20. 12.93.

УДК 519.1

Д. П. ПОДКОПАЕВ

О НЕЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ВЕРШИНАХ МНОГОГРАННИКА ЗАДАЧИ О k-МЕДИАНЕ ГРАФА*

New fractional vertices of graph medians polytope has been found

Многогранником $M(k, n)$, $n\geqslant 2$, $1\leqslant k\leqslant n-1$, $n, k\in N$ известной задачи о k-медиане графа [1, 2] является множество матриц $X=\|x_{ij}\|_{n\times n}$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ii} = k, \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \ \forall i\in N_n, \tag{2}$$

$$x_{ij}\leqslant x_{jj}, \ \forall (i,j)\in N_n^2, \ i\neq j, \tag{3}$$

$$x_{ij}\geqslant 0, \ \forall (i, j)\in N_n^2, \tag{4}$$

где $N_n=\{1, 2, ..., n\}$.

Известны следующие свойства многогранника $M(k, n)$ (см. [1, 3, 4,]):
1) размерность многогранника $M(k, n)$ при любом k, $1\leqslant k\leqslant n-1$, равна n^2-n-1;
2) при $k=1$, $n-1$ многогранник является целочисленным, т. е. все его вершины целочисленные;
3) количество целочисленных вершин многогранника $M(k, n)$ равно $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right] k^{n-k}$;
4) при $2\leqslant k\leqslant n-2$ многогранник имеет нецелочисленные вершины.

Если $2\leqslant k\leqslant n-2$, то, как показано в [1], для всякой пары неравных индексов $s, p\in N_n$ точка X многогранника $M(k, n)$ с компонентами

$$x_{is}=\frac{n-k-1}{n-2}, \quad \forall i\in N_n; \ x_{ii}=\frac{k-1}{n-2}, \ \forall i\in N_n\setminus\{s\}; \ x_{sp}=\frac{k-1}{n-2}; \tag{5}$$

$x_{ij}=0$ для остальных (i, j) из N^2_n является нецелочисленной вершиной. Тем самым при $2\leqslant k\leqslant n-2$ число нецелочисленных вершин многогранника $M(k, n)$ не менее числа $\left[\begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix}\right]$.

Следующая теорема указывает новые нецелочисленные вершины.

---

* Работа финансировалась Фондом фундаментальных исследований Республики Беларусь.