(Четвертое уравнение соответствует значению $n=0$.)

В этом примере $g_n=0$, $n=-1, -2, -3, \ldots$, $g_n=(n+1)/3^n$, $n=0, 1, 2, \ldots$, $a_{n,0}=a_{0,n}=a_{-1,-n-1}=a_{-n-1,-1}=3^{-n}$, $n=1, 2, 3, \ldots$, а остальные коэффициенты $a_{n,k}$ и коэффициенты $b_{n,k}$ вычислены по указанным выше формулам. (Можно было бы явно, без рекуррентных соотношений указать выражения в общем виде для коэффициентов в примере.)

Легко вычислить, что

$$A_1(z)=\frac{3}{3-z},\ A_2(z)=\frac{3z}{3z-1},\ \overline{A_3(\bar z^{-1})}A_4(z)=\frac{9}{(3-z)^2}.$$

Отсутствие нулей у этих функций (соответственно в областях $|z|<1$, $|z|>1$, $|z|<1$) говорит о том, что решение системы безусловно существует и единственно. Вычисления дают в качестве решения значения $x_n=-3^n$, $n=-1, -2, -3, \ldots$, $x_0=8/9$, $x_n=(8(n+1)-9)/3^{n+2}$, $n=1, 2, 3, \ldots$.

1. Г а х о в Ф. Д., Ч е р с к и й Ю. И. Уравнения типа свертки. М., 1978.
2. Ч е р с к и й Ю. И. // Докл. АН УССР. Сер. А. 1982. № 6. С. 29.

Поступила в редакцию 08.02.94

УДК 517.948.32:517.544

Э. И. ЗВЕРОВИЧ, Л. А. КОРЗАН

РЕШЕНИЕ В ЗАМКНУТОЙ ФОРМЕ ОДНОГО ЧАСТНОГО СЛУЧАЯ ЗАДАЧИ СОПРЯЖЕНИЯ НА РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

This paper gives a solution in closed form of one special case of the problem of the conjugation on the Rieman's surface. A peculiarity of this problem is that for its solution does not need a solution of the auxiliary Jacoby's problem.

Пусть R—замкнутая ориентируемая риманова поверхность рода $h>0$. Зафиксируем на ней достаточно гладкое каноническое рассечение $a_1, b_1, \ldots, a_h, b_h$ и обозначим через $L=a_1\cup b_1\cup\ldots\cup a_h\cup b_h$. Ориентация контура L показана на рисунке, где поверхность $R\setminus L$ представлена в виде нормального фундаментального многоугольника. Рассмотрим задачу линейного сопряжения для нахождения функций Φ, аналитических на $R\setminus L$, H-непрерывно продолжимых слева и справа на L, по соотношению:

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t)+g(t),\ t\in L, \tag{1}$$

$$\text{где } G(t)=\begin{cases} A_1 & \text{при } t\in a_1,\\ B_1 & \text{при } t\in b_1,\\ \cdots\cdots & \\ A_h & \text{при } t\in a_h,\\ B_h & \text{при } t\in b_h.\end{cases} \tag{1'}$$

Здесь A_ν, B_ν — заданные отличные от нуля константы, $\nu=1, \ldots, h$.

Эта задача при более общих предположениях исследовалась в [1]. Однако там ее решение выражено через решение вспомогательной проблемы обращения Якоби [2]. Цель данной статьи — выделить такие частные случаи задачи линейного сопряжения, которые для своего решения не требуют привлечения проблемы Якоби.

Рассмотрим сначала однородную задачу (1), предполагая, что $g(t)\equiv 0$;

$$\Phi_0^+(t)=G(t)\Phi_0^-(t),\ t\in L. \tag{2}$$

Применяя к этому равенству принцип аргумента, заключаем, что решение задачи (2), если оно существует, не может иметь нулей на R, а значит, в силу теоремы о монодромии [3], должна существовать однозначная на $R\setminus L$ ветвь логарифма $\ln\Phi_0(p)$. Логарифмируя равенство (2), получим:

$$\ln\Phi_0^+(t)=\ln\Phi_0^-(t)+\ln G(t),\ t\in L. \tag{3}$$

Дифференцируя это последнее равенство и учитывая, что $G(t)$ постоянна на каждой линии a_ν и b_ν, имеем:

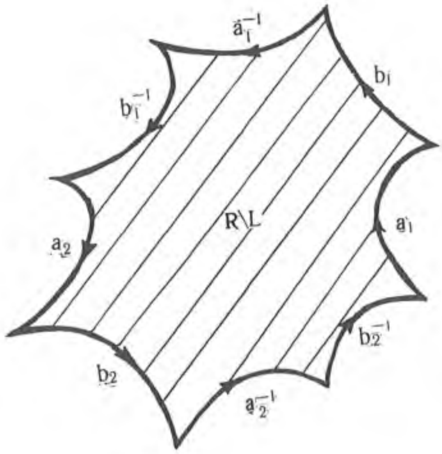
$$d\ln\Phi_0^+(t) = d\ln\Phi_0^-(t), \quad t\in L. \tag{4}$$

Отсюда, в силу теоремы об аналитическом продолжении, заключаем, что $d\ln\Phi_0(p)$ есть абелев дифференциал первого рода:

$$d\ln\Phi_0(p) = dw(p), \tag{5}$$

где через $dw(p)$ обозначен общий вид абелевых дифференциалов первого рода римановой поверхности R. Интегрируя и потенцируя равенство (5), заключаем, что общее решение задачи (2) содержится в формуле:

$$\Phi_0(p) = Ce^{w(p)}, \tag{6}$$



где C — постоянная, а $w(p) = \int\limits_{p_0}^{p} dw(p)$ — абелев интеграл первого рода, обращающийся в нуль в фиксированной точке $p_0\in R$.

Для решения вопроса о том, при каких условиях правая часть равенства (6) является общим решением задачи (2), введем в рассмотрение базис абелевых дифференциалов первого рода $dw_1, \ldots, dw_h$. Будем считать его комплексно-нормированным, т. е. таким, что $\int\limits_{a_k} dw_j = \delta_{kj}$, где δ_{kj} — символ Кронекера ($k, j = 1, \ldots, h$). Если каноническое рассечение поверхности выбрано так, как показано на рисунке, то B-периоды $B_{kj} = \int\limits_{b_k} dw_j$, $k, j = 1, \ldots, h$ образуют симметричную матрицу ($B_{kj} = B_{jk}$), мнимая часть которой положительно определена (а значит, и невырождена). Подставляя выражение (6) в (2) и учитывая (1'), получим:

$$e^{w^+(t) - w^-(t)} = \begin{cases} A_j & \text{при } t\in a_j, \\ B_j & \text{при } t\in b_j, \end{cases} \quad j = 1, \ldots, h. \tag{7}$$

Но

$$w^+(t) - w^-(t) = \begin{cases} -\int\limits_{b_j} dw, & t\in a_j, \\ \int\limits_{a_j} dw, & t\in b_j, \end{cases} \quad j = 1, \ldots, h. \tag{8}$$

Подставляя (8) в (7), получим:

$$\exp\{-\int\limits_{b_j} dw\} = A_j, \quad j = 1, \ldots, h, \tag{9}$$

$$\exp\{\int\limits_{a_j} dw\} = B_j, \quad j = 1, \ldots, h. \tag{10}$$

Подставляя в (10) выражение дифференциала dw через базис, т. е. $dw = \sum\limits_{k=1}^{h} z_k dw_k$, получим $e^{z_j} = B_j$, $j = 1, \ldots, h$. Отсюда находим:

$$z_j = \ln B_j - 2\pi i n_j, \quad j = 1, \ldots, h, \tag{10'}$$

где n_j пока произвольные целые числа. Чтобы их найти, используем равенства (9):

$$\exp\left\{-\int\limits_{b_j} \sum_{k=1}^{h} (\ln B_k - 2\pi i n_k) dw_k\right\} = A_j, \quad j = 1, \ldots, h.$$

Отсюда находим:

$$\exp\left\{2\pi i\sum_{k=1}^{h} B_{kj}n_k\right\} = A_j\exp\left\{\sum_{k=1}^{h} B_{kj}\ln B_k\right\},\ j=1,\ \dots,\ h.$$

Логарифмируя эти равенства, получим:

$$2\pi i\sum_{k=1}^{h} B_{kj}n_k = \ln A_j + \sum_{k=1}^{h} B_{kj}\ln B_k - 2\pi i m_j,\ j=1,\ \dots,\ h. \tag{11}$$

где m_j — неопределенные целые числа. Деля (11) на $2\pi i$ и выделяя мнимые части, получим линейную систему:

$$\sum_{k=1}^{h} n_k \operatorname{Im} B_{kj} = \operatorname{Im}\left(\frac{\ln A_j + \sum\limits_{k=1}^{h} B_{kj}\ln B_k}{2\pi i}\right),\ j=1,\ \dots,\ h. \tag{12}$$

Эта система имеет единственное решение $n_1, \dots, n_h$. Таким образом, для нетривиальной разрешимости задачи (2) необходимо, чтобы решение системы (12) было целочисленным вектором. Предполагая это условие выполненным, из (11) находим числа m_j:

$$m_j = \operatorname{Re}\left\{\frac{1}{2\pi i}\ln A_j + \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{h} B_{kj}\ln B_k - \sum_{k=1}^{h} B_{kj}n_k\right\},\ j=1,\ \dots,\ h. \tag{13}$$

Для нетривиальной разрешимости задачи (2) необходимо, чтобы числа m_j из (13) также были целыми. Если все числа m_j и n_j целые, то правая часть равенства (6) уже является общим решением задачи (2). Таким образом, получен следующий результат.

Теорема 1. Для того чтобы однородная задача (2) имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы все числа n_k и m_j, которые однозначно определяются из равенств (12) и (13), были целыми. Если это условие выполнено, то общее решение задачи (2) имеет вид:

$$\Phi_0(p) = C\exp\left\{\sum_{k=1}^{h} z_k w_k(p)\right\}, \tag{14}$$

где $z_1, \dots, z_h$ находятся из (10′), а C — произвольная постоянная.

Рассмотрим теперь неоднородную задачу (1). В случае, когда соответствующая однородная задача имеет нетривиальное решение $\Phi_0(p)$, мы с помощью этого решения профакторизуем коэффициент $G(t)$ и перейдем к задаче «о скачке»:

$$\frac{\Phi^+(t)}{\Phi_0^+(t)} - \frac{\Phi^-(t)}{\Phi_0^-(t)} = \frac{g(t)}{\Phi_0^+(t)},\ t\in L, \tag{15}$$

равносильной задаче (1). Задачу (15) решаем в виде интеграла типа Коши, умножая который на $\Phi_0(t)$, находим частное решение задачи (1) в виде:

$$\Phi_1(p) = \frac{\Phi_0(p)}{2\pi i}\int_L \frac{g(t)}{\Phi_0^+(p)}\,d\hat{\omega}_{tq_0}(p). \tag{16}$$

Отсюда

Теорема 2. Если однородная задача (2) имеет нетривиальное решение, то соответствующая неоднородная задача разрешима тогда и только тогда, когда выполнены условия

$$\int_L \frac{g(t)}{\Phi_0^+(t)}\,dw_j(t) = 0,\ j=1,\ \dots,\ h.$$

Если эти условия выполняются, то частное решение задачи (1) дается формулой (16).

1. З в е р о в и ч Э. И. //Успехи мат. наук. 1971. Т. 26. № 1. С. 113.
2. Р и м а н Б. Соч. М., 1948.
3. С п р и н г е р Дж. Введение в теорию римановых поверхностей. М., 1960.

Поступила в редакцию 25.05.94.