1. Федосенко В. С., Черкесов Л. В. // Изв. АН СССР. МЖГ. 1970. № 4. С. 137.
2. Букатов А. Е., Черкесов Л. В. Волны в неоднородном море. Киев, 1983.
3. Гандин Л. С. // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. 1957. № 3. С. 407.
4. Куликовский А. Г., Шикина И. С. // Изв. АН СССР. МЖГ. 1979. № 3. С. 12.
5. Сретенский Л. Н. // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. 1955. № 6. С. 505.

Поступила в редакцию 22.02. 94.

УДК 517.917

Б. В. ЗАДВОРНЫЙ

ПРИМЕНЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПЕРЕМЕННЫХ К ИССЛЕДОВАНИЮ ОБОБЩЕННОЙ НЕПРЕРЫВНОЙ ЗАВИСИМОСТИ РЕШЕНИЙ ОТ НАЧАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Variables transformations are applied to an investigation of relative behavior of integral curves. The extended continuous dependence of diagonal sistems solutions are studied.

1. В [1] для задачи

$$\dot{x} = f(t, x),\ x(s) = \xi,\ x \in R^n,\ f: D \subset R^{n+1} \to R^n, \tag{1}$$

с $D = [s, +\infty[\times R^n$, определяется понятие обобщенной непрерывной зависимости решений от начальных данных (условие А). Обозначая: решения задачи (1) $x(t) = x(t;\ s,\ \xi)$ (в [1] s было фиксировано), правый максимальный промежуток существования этого решения $[s, \beta(s, \xi)[$; для $(s, \xi) = (s_0, \xi_0)$ соответственно $x_0(t) = x(t;\ s_0,\ \xi_0)$, $[s_0, \beta(s_0, \xi_0)[= [s_0, \beta_0[$; $\gamma_0 = \{(t, x_0(t)),\ t \in [s_0, \beta_0[\}$ — интегральная кривая решения $x_0(t)$ в пространстве переменных t, x; $|\cdot,\cdot|$ — евклидово расстояние между точками в пространстве R^{n+1}, $d(\cdot,\cdot)$ — расстояние от точки до множества в R^{n+1}, дадим следующее определение условию А.

Определение. Решения задачи (1) обобщенно непрерывно зависят от начальных значений (s, ξ) при $(s, \xi) = (s_0, \xi_0)$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0$, $\forall (s, \xi)$, $|(s, \xi), (s_0, \xi_0)| \leqslant \delta(\varepsilon)$, $\forall t \in [s, \beta(s, \xi)[$,

$$\exists \bar{t} \in [s_0, \beta_0[\Rightarrow |(t, x(t;\ s,\ \xi)),\ (\bar{t}, x_0(\bar{t}))| \leqslant \varepsilon.$$

Примечания. 1) Везде в этой статье будем рассматривать продолжение решений вправо от s, а $D = [t_0, +\infty[\times R^n$, $t_0 \leqslant s$. 2) Последнюю строчку в определении можно заменить условием $d((t, x(t;\ s,\ \xi)), \gamma_0) \leqslant \varepsilon$.

В [2] указывается, что условие А занимает промежуточное положение между устойчивостью по Ляпунову и орбитальной устойчивостью (в случае продолжимости лишь на конечный промежуток речь идет о решениях специальной вспомогательной задачи), откуда возникает идея использования для исследований метода функций Ляпунова [1]. В предлагаемой статье применяется нелинейный аналог преобразования Ляпунова, сохраняющий выполнение или невыполнение условия А, что в принципе позволяет упростить исследование некоторых систем. С этой целью в п. 3 рассматривается обобщенная непрерывная зависимость решений диагональных уравнений, которые, впрочем, и сами по себе представляют интересные случаи взаимного расположения интегральных кривых в окрестности концов промежутка существования.

2. Рассмотрим диффеоморфизм $L: D \to E \subset R^{n+1}$,

$$L(t, x) = (L_0(t, x), L_1(t, x), \ldots, L_n(t, x)) = (\tau, y_1, \ldots, y_n) = (\tau, y),$$

преобразующий задачу (1) в задачу

$$dy/d\tau = g(\tau, y),\ y(\sigma) = \eta,\ (\sigma, \eta) = L(s, \xi),\ g: E \to R^n. \tag{2}$$

Заметим следующее:

1) Расстояние между образами (τ, y), $(\tau', y') \in E$ точек (t, x), $(t', x') \in D$ можно оценить с помощью теоремы о модуле конечного приращения дифференцируемого отображения:

$$|(\tau, y),\ (\tau', y')| \leqslant M \cdot |(t, x),\ (t', x')|,$$

где M — верхняя грань нормы матрицы Якоби отображения L на отрезке, соединяющем точки (t, x) и (t', x');

2) Для любой замкнутой окрестности U точки $(s, \xi)\in D$ найдется замкнутая окрестность V точки $(\sigma, \eta)\in E$ такая, что прообраз множества V целиком лежит в U, т. е. $L^{-1}(V)\subset U$.

Учитывая эти замечания, несложно получить достаточное условие сохранения условия А при преобразовании L.

Теорема 1. Если все частные производные $\partial L_j/\partial t$, $\partial L_j/\partial x_i$, $j=0, 1, \ldots, n$; $i=1, \ldots, n$, ограничены в области D, то выполнение условия А для решений задачи (1) с любыми начальными значениями (s, ξ) обеспечивает выполнение условия А для решений соответствующей начальной задачи (2).

Следствие. Если все частные производные обратного отображения $L^{-1}(\tau, y)=(t, x)$ также окажутся ограниченными (на E), то задачи (1) и (2) эквивалентны в смысле выполнения условия А.

3. Будем далее рассматривать задачу (1) с диагональной функцией $f(t, x)$, т. е. $f(t, x)=(f_1(t, x_1), \ldots, f_n(t, x_n))$. Ясно, что компоненты $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ решения такой задачи являются сужениями продолженных решений одномерных задач

$$\dot{x}_i=f_i(t, x_i),\ x_i(s)=\xi_i,\ i=1, \ldots, n, \tag{3_i}$$

на промежуток $[s, \beta(s, \xi)[$ (ξ_i — компоненты вектора ξ). Обозначив $\beta_i=\beta_i(s, \xi_i)$ правый конец максимального промежутка существования решения задачи (3_i), очевидно, будем иметь:

$$\beta=\beta(s, \xi)=\min\{\beta_i(s, \xi_i),\ i=1, \ldots, n\}, \tag{4}$$

причем β как функция начальных значений будет непрерывна в точке (s, ξ), если окажется непрерывной функция $\beta_\kappa(s, \xi_\kappa)$, на которой достигается минимум в (4) (если таких функций β_κ несколько, то достаточно непрерывности одной из них).

Для диагональных уравнений исследование условия А можно во многих случаях свести к изучению поведения отдельных компонент их решений. В дальнейшем изложении интерес представляет только случай конечного значения $\beta(s, \xi)$, что мы и будем предполагать. Кроме того, всюду далее $f(t, x)$ определена и непрерывна во всем пространстве R^{n+1} $(D=R^{n+1})$ и каждая точка интегральной кривой γ_0 является точкой локальной единственности.

Рассмотрим два естественных случая поведения решений задачи (1) с начальными значениями (s, ξ_0) (ξ_i^0 — компоненты вектора ξ_0).

Теорема 2. Пусть для некоторого к, $1\leqslant\kappa\leqslant n$, выполняется $\beta_0=\beta_\kappa(s_0, \xi^0_\kappa)$, причем функция β_κ непрерывна в точке (s_0, ξ_κ^0), и $\beta_i(s_0, \xi^0_i)>\beta_0$, $i=1, \ldots, n$, $i\neq\kappa$. Тогда решения задачи (1) обобщенно непрерывно зависят от начальных данных при $(s, \xi)=(s_0, \xi_0)$.

Теорема 3. Если существуют по крайней мере два номера к и l, $1\leqslant\kappa\leqslant n$, $1\leqslant l\leqslant n$, такие, что $\beta_0=\beta_\kappa(s_0, \xi_\kappa^0)=\beta_l(s_0, \xi_l^0)$, причем функции $\beta_i(s_0, \xi_i)$ непрерывны и строго монотонны по ξ_i в некоторых окрестностях значений ξ_i^0, а функции $f_i(t, x_i)$ сохраняют знак $(\operatorname{sign} f_i)$ на некоторых множествах $\{(t, x_i),\ t\in[\beta_0-r, \beta_0],\ (\operatorname{sign} f_i)\cdot x_i\geqslant M\}$, $i=\kappa, l$, $r>0$ — сколь угодно мало, $M>0$, то решения задачи (1) не удовлетворяют условию А при $(s, \xi)=(s_0, \xi_0)$.

Утверждение теоремы 2 следует из того, что для любого достаточно малого $\varepsilon>0$:

1) имеет место обычная непрерывная зависимость решений задачи (3_κ) от начальных данных в точке (s_0, ξ_κ^0) на отрезке $[s_0, \beta_0-\varepsilon]$ и решений задач (3_i), $i\neq\kappa$, в точках (s_0, ξ_i^0) на $[s_0, \beta_0+\varepsilon]$, [3];

2) решение $x_0(t)\to\infty$, а вместе с ним $x_\kappa(t;\ s_0, \xi_\kappa^0)\to\infty$ при $t\to\beta_0-0$, что вместе с непрерывностью β_κ обеспечивает обобщенную непрерывную зависимость решений задачи (3_κ) от начальных данных при (s_0, ξ_κ^0) (ср. [4]), т. е. для всех (s, ξ) достаточно близких к (s_0, ξ_0) будет выполняться условие приведенного выше определения (в одномерном случае);

3) ввиду 1) и ограниченности непрерывных функций $f_i(t, x_i)$, $i \neq к$, на соответствующих компактных множествах, включающих в себя интегральные кривые задач (3_i) при $(s, \xi_i) = (s_0, \xi_i^0)$, будет выполняться оценка:

$$|x_i(t; s, \xi_i) - x_i(\bar{t}; s_0, \xi_i^0)| \leqslant c\varepsilon \quad (i \neq к),$$

где t и $\bar{t}$ взяты из определения (см. п. 2)), c — постоянная, которая может быть выбрана сразу для всех i; s и ξ_i — начальные значения из некоторой окрестности точки (s_0, ξ_0), которая может быть выбрана настолько малой, чтобы имело место 2).

Доказательство. Пусть для определенности $к = 1$, $l = 2$, и обе функции $\beta_i(s_0, \xi_i)$, $i = 1, 2$, убывают по ξ_i в окрестности точки (s_0, ξ_i^0). При этом в силу единственности выполняется $x_i(t, s_0, \xi_i^0) \to +\infty$ при $t \to \beta_0 - 0$, $i = 1, 2$. (Другие случаи аналогичны.)

В сколь угодно малой окрестности точки (s_0, ξ_0) всегда найдется точка $(s_0, \bar{\xi})$ с компонентами $\bar{\xi}_1 > \xi_1^0$ и $\bar{\xi}_2 < \xi_2^0$. Тогда решение $x(t; s_0, \bar{\xi})$ определено на $[s_0, \beta(s_0, \bar{\xi})[= [s_0, \beta_1(s_0, \bar{\xi}_1)[$, причем компонента $x_1(t; s_0, \bar{\xi}_1) \to +\infty$ при $t \to \beta(s_0, \bar{\xi}) - 0$, а компонента $x_2(t; s_0, \bar{\xi}_2)$ ограничена на $[s_0, \beta(s_0, \bar{\xi})[= [s_0, \beta_1(s_0, \bar{\xi}_1)[$, так как $\beta_2(s_0, \bar{\xi}_2) > \beta_1(s_0, \bar{\xi}_1)$.

Для любой точки $t_1 \in [s_0, \beta(s_0, \bar{\xi})[$ найдется точка $t_2 = t_2(t_1)$ такая, что

$$d\left((t_1, x(t_1; s_0, \bar{\xi})), \gamma_0 \right) = |(t_1, x(t_1; s_0, \bar{\xi})), (t_2, x_0(t_2))|.$$

При этом, если t_1 устремить к $\beta(s_0, \bar{\xi})$, будем иметь:

1) либо $t_2(t_1) \to \beta_0$ при $t_1 \to \beta(s_0, \bar{\xi})$;

2) либо существуют $\varepsilon_0 > 0$ и последовательность (t_1^m) такая, что $t_1^m \to \beta(s_0, \bar{\xi})$ при $m \to \infty$, и

$$t_2^m = t_2(t_1^m) \leqslant \beta_0 - \varepsilon_0, \ m = 1, 2, \ldots .$$

Однако в первом случае расстояние

$$d\left((t_1, x(t_1; s_0, \bar{\xi})), \gamma_0 \right) = |(t_1, x(t_1, s_0, \bar{\xi})), (t_2, x(t_2, s_0, \xi_0))| \geqslant$$

$$\geqslant |x_2(t_1; s_0, \bar{\xi}_2) - x_2(t_2; s_0, \xi_2^0)|$$

и неограниченно возрастает при $t_1 \to \beta(s_0 \bar{\xi})$, а во втором точно так же

$$d\left((t_1^m, x(t_1^m; s_0, \bar{\xi})), \gamma_0 \right) \geqslant$$

$$\geqslant |x_1(t_1^m; s_0, \bar{\xi}_1) - x_1(t_2^m; s_0, \xi_1^0)| \to +\infty \text{ при } m \to \infty,$$

т. е. в обоих случаях условие А выполняться не может. В силу произвольности $(s_0, \bar{\xi})$ получаем утверждение теоремы.

В заключение укажем, как изменятся условия теорем 2 и 3, если функции $f_i(t, x_i)$ в задачах (3_i) имеют вид $f_i(t, x_i) = c_i(t) \cdot x_i$, т. е. вместо (1) рассмотрим задачу

$$\dot{x} = C(t)x, \ x(s) = \xi, \ t \in [s, \beta_0[, \ x \in R^n, \tag{5}$$

где $C(t) = \mathrm{diag}[c_1(t), \ldots, c_n(t)]$, а s считаем фиксированным. Ясно, что интерес здесь представляет случай, когда матрица коэффициентов имеет в точке β_0 разрыв второго рода. При этом максимальный промежуток существования решений (вправо) $[s, \beta(s, \xi)[= [s, \beta_0[$ при любом ξ.

Теорема 4. Пусть выполняется одно из двух условий:

1) $\overline{\lim\limits_{t \to \beta_0 - 0}} \int\limits_s^t c_i(\tau) d\tau < +\infty$, $i = 1, \ldots, n$;

2) для некоторого к, $1 \leqslant к \leqslant n$, $\int\limits_{\beta_0 - \varepsilon}^{\beta_0} c_к(\tau) d\tau = +\infty$ и $\xi_к^0 \neq 0$, а все остальные $c_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, $i \neq к$, ограничены на $[s, \beta_0[$. Тогда решения задачи (5) обобщенно непрерывно зависят от начальных данных при любом $\xi = \xi_0$.

Теорема 5. Если хотя бы две компоненты матрицы $C(t)$ стремятся к $+\infty$ при $t \to \beta_0 - 0$, и интегралы от них на любом отрезке $[\beta_0 - \varepsilon, \beta_0]$ не ограничены, то решения уравнения (5) не могут удовлетворять условию А ни при каких начальных значениях.

Доказательства этих утверждений, несмотря на то, что $\beta(\xi) = \mathrm{const}$, идейно похожи на доказательства теорем 2 и 3.

1. З а д в о р н ы й Б. В. // Дифференц. уравнения. 1989.Т. 25. № 2. С. 332.
2. О н ж е // Материалы республиканской научно-практической конференции творческой молодежи «Актуальные проблемы информатики: математическое, программное и информационное обеспечение». Мн., 1988. С. 126.
3. Х а р т м а н Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1970.
4. З а д в о р н ы й Б. В. // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24. № 2. С. 351.

Поступила в редакцию 01.02.94

УДК 517.925

Б. С. КАЛИТИН, Л. В. КАЛИТИНА

ОПТИМИЗАЦИЯ ОЦЕНКИ ОБЛАСТИ ПРИТЯЖЕНИЯ МЕТОДОМ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА

The paper deals with the problem of the estimation of regions of asymptotic stability for continious autonomous nonlinear systems. The assumed problem on the estimation may be reduced to the solution of the special problem of nonlinear programming. The example of application is reported.

Пусть G — открытое множество, содержащее начало координат n-мерного вещественного пространства $\mathbf{R}^n$. Предположим, что G связно и рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in G, \quad f(o) = 0, \qquad (1)$$

где функция $f: G \to \mathbf{R}^n$ непрерывна и обеспечивает единственность решений (1) в G.

Известно, что теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости в прямом методе [1] позволяет оценить область притяжения нулевого решения (см. [2, С. 17]). Обобщение этого утверждения содержится в [3—5] и других работах. Центральное место в этом направлении исследований занимает критерий В. И. Зубова [6, теорема 22], однако в практическом отношении он недостаточно эффективен. Приведем одно из таких утверждений, вытекающее из [4].

Теорема 1. Пусть для системы (1) существует непрерывно дифференцируемая функция $V: G \to \mathbf{R}^+$ такая, что:
1) $V(x) > 0 \forall x \in G \setminus \{0\}$ и $V(0) = 0$;
2) область $V_c = \{x \in G | 0 \leqslant V(x) < c\}$ ограничена;
3) $\dot{V}(x) < 0 \ \forall x \in V_c \{0\}$.

Тогда нулевое решение (1) асимптотически устойчиво и множество V_c содержится в области притяжения этого решения. Здесь $\dot{V}$ — производная по времени, вычисленная от функции V в силу системы (1).

В данной статье показывается, что задача о построении наилучшей оценки V_c области асимптотической устойчивости с помощью теоремы 1 может быть сведена к задаче нелинейного программирования. Эта же идея была использована в работах [7, 8] для частного случая систем второго порядка, где в качестве функции Ляпунова взята квадратичная форма.

Определение 1. Непрерывная определенно положительная функция $V: G \to \mathbf{R}^+$ называется *концентрической* на интервале $[0, c^*[$, если множество уровня $V_c = \{x \in G | 0 \leqslant V_x < c\}$ имеет связное компактное замыкание $\bar{V}_c$ для всех $0 < c < c^*$, содержащееся в области G.

Через c_0 будем обозначать верхнюю грань всех таких чисел c^* (возможно, что $c_0 = +\infty$), т. е. $[0, c_0[$ есть наибольший интервал, на котором V является концентрической.

Теорема 2. Пусть для системы (1) существуют окрестность U точки $x = 0$ в G и непрерывно дифференируемая концентрическая на интервале $[0, c_0[$ функция $V: G \to \mathbf{R}^+$ такая, что:
1) $V(x) > 0 \forall x \in G \setminus \{0\}$ и $V(0) = 0$;