

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕУСТАНОВИВШИХСЯ ВОЛН НА ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА ПОТОКОВ НЕОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ

It is considered the Cauchy—Poisson problem for internal waves generated by initial disturbances at a horizontal interface between two fluids of different densities and velocities. Solution of this problem is given. It is shown that the appearance of capillarity leads to the stability of these waves.

Известно [1, 2], что неустановившиеся волны, возникающие от начальных возмущений в потоке неоднородной двухслойной жидкости, будут устойчивыми, если скорости потоков в каждом из слоев совпадают. В случае, когда скорости потоков различны (по величине или по направлению), на поверхности раздела при произвольных начальных возмущениях возникают волны, амплитуда которых растет с течением времени, т. е. они являются неустойчивыми [3, 4]. Однако в работе [5] показано, что возмущенная поверхность раздела будет устойчивой, если начальные возмущения имеют специальный вид. Заметим, что в [3, 5] не учитывалось действие капиллярных сил.

Рассмотрим двухслойный поток неоднородной бесконечно глубокой жидкости. Совместим направление оси абсцисс с направлением потока нижнего слоя, имеющего скорость $u_2 > 0$. Проекция вектора скорости верхнего потока на оси Ox и Oy обозначим через u_1 и v_1 . Тогда задача определения вида волн на поверхности раздела потоков $z = \zeta(x, y, t)$, возникающих от начальных смещений этой поверхности, сводится к решению уравнений Лапласа для потенциалов скоростей возмущенного движения [1, 2, 5]

$$\Delta\varphi_1 = 0 \quad (|x|, |y| < \infty, z \geq 0), \quad \Delta\varphi_2 = 0 \quad (|x|, |y| < \infty, z \leq 0)$$

с граничными

$$\varphi_{2t} - \gamma\varphi_{1t} + u_2\varphi_{2x} - \gamma u_1\varphi_{1x} - \gamma v_1\varphi_{1y} + g\epsilon\zeta - \frac{T}{\rho_2}(\zeta_{xx} + \zeta_{yy}) = 0,$$

$$\zeta_t + u_1\zeta_x + v_1\zeta_y = \varphi_{1z}, \quad \zeta_t + u_2\zeta_x = \varphi_{2z} \quad \text{при } z = 0;$$

$\varphi_1 \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$, $\varphi_2 \rightarrow 0$ при $z \rightarrow -\infty$, $\varphi_{1,2} \rightarrow 0$ при $|x|, |y| \rightarrow \infty$
и начальными условиями

$$\rho_1\varphi_1 = \rho_2\varphi_2, \quad \zeta = a_0 f(x, y) \quad \text{при } t = 0, z = 0,$$

где $\rho_{1,2}$ — плотности жидкостей в потоках, $\gamma = \rho_1/\rho_2$, $\epsilon = 1 - \gamma$, T — коэффициент поверхностного натяжения.

Методом интегральных преобразований для произвольной функции $f(x, y)$, представимой интегралом Фурье, находим для вида поверхности раздела выражение

$$\zeta = \frac{a_0}{2\pi} \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty r F(r \cos \theta, r \sin \theta) (e^{iN_1} + e^{iN_2}) d\theta dr, \quad (1)$$

где

$$F(m, n) \leftarrow f(x, y), \quad m = r \cos \theta, \quad n = r \sin \theta,$$

$$N_{1,2} = N(r, \theta) \mp v r \cos(\theta - \bar{\varphi}), \quad v = R_1/t, \quad \psi = \operatorname{arctg}(v_1/(u_1 - u_2)),$$

$$R_1 = ((x - c_1 t)^2 + (y - c_2 t)^2)^{1/2}, \quad \bar{\varphi} = \operatorname{arctg}((y - c_2 t)/(x - c_1 t)),$$

$$N(r, \theta) = (g_1 r + \xi_1 r^3 - \gamma_1 r^2 c^2 \cos^2(\theta - \psi))^{1/2},$$

$$c_1 = \gamma v_1 / (1 + \gamma), \quad c_2 = (u_2 + \gamma u_1) / (1 + \gamma), \quad c^2 = (u_1 - u_2)^2 + v_1^2,$$

$$g_1 = g\epsilon_1, \quad \epsilon_1 = \epsilon / (1 + \gamma), \quad \xi_1 = T / \rho_2 (1 + \gamma), \quad \gamma_1 = \gamma / (1 + \gamma)^2.$$

У нас нет возможности привести здесь полный анализ выражения (1).

Несколько упростим задачу. Будем считать, что $v_1 = 0$, $u_1 \neq u_2$, а $f(x, y) = f(x)$, т. е. рассмотрим плоский случай. Тогда из (1) имеем

$$\zeta = \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} F(r) (e^{itM_1} + e^{itM_2}) dr, \quad (2)$$

где $F(r) \leftarrow f(x)$, $M_{1,2} = rv \mp M$, $v = (x - ct)/t$,

$$M = (g_1 r + \xi_1 r^3 - \gamma_1 c_1^2 r^2)^{1/2}, \quad c_1 = u_1 - u_2, \quad c = (u_2 + \gamma u_1)/(1 + \gamma).$$

Если скорости потоков верхнего и нижнего слоев жидкости совпадают ($u_1 = u_2$), то $M^2 \geq 0$ и к интегралу (2) применим метод стационарных фаз. Очевидно, что при больших значениях t получается $\zeta = O(t^{-1/2})$, т. е. образующиеся волны на поверхности раздела являются устойчивыми. Анализ ζ при $u_1 = u_2$ проведен в [2] и поэтому здесь его не даем.

При $c_1 \neq 0$ особенность интегралов (2) состоит в том, что подкоренное выражение в M при некоторых значениях параметров g_1 , ξ_1 , γ_1 и c_1 может быть отрицательным. Уравнение $M^2 = 0$ относительно положительных r имеет корни $n_{1,2} = (\gamma_1 c_1^2 \mp \sqrt{\Delta})/2\xi_1$ при $\Delta = \gamma_1^2 c_1^4 - 4\xi_1 g_1 \geq 0$, а при $\Delta < 0$ — корней не имеет. Рассмотрим эти случаи отдельно.

1) $\Delta < 0$. Это означает, что существует некоторая критическая скорость $c_0 = (4g_1 \xi_1 \gamma_1^{-2})^{1/4}$ такая, что при $|c_1| \leq c_0$ (u_1 может иметь любой знак) подкоренное выражение в M остается положительным и интегралы (2) можно исследовать при больших t и $|x|$ порядка t методом стационарных фаз. Уравнения $M'_{1,2} = 0$, которые определяют стационарные точки, равносильны следующим:

$$v = \pm \varphi(r) = \pm \frac{1}{2} (3\xi_1 r^2 - 2\gamma_1 c_1^2 r + g_1)/M. \quad (3)$$

а) $|c_1| < c_0 = (3g_1 \xi_1 \gamma_1^{-2})^{1/4} < c_0$. В этом случае $\varphi(0) = \varphi(\infty) = \infty$, а в точке $r = r^0$ функция $\varphi(r)$ имеет минимум, где r^0 — единственный корень уравнения $\varphi'(r) = 0$. Уравнение $M'_1 = 0$ имеет два вещественных корня r_1 и r_2 при $x > v_1 t$ и не имеет корней при $x < v_1 t$. Уравнение $M'_2 = 0$ не имеет корней при $x > v_2 t$, а при $x < v_2 t$ имеет два вещественных корня r_3 и r_4 ($v_{1,2} = c \pm \varphi(r^0)$). Следовательно,

$$\zeta = \zeta_1 + \zeta_2 + O(t^{-1}), \quad (4)$$

$$\zeta_1 = \begin{cases} \eta_1(r_1) + \eta_2(r_2); & x > v_1 t; \\ 0; & x < v_1 t \end{cases}$$

$$\zeta_2 = \begin{cases} \bar{\eta}_1(r_3) + \bar{\eta}_2(r_4); & x < v_2 t; \\ 0; & x > v_2 t; \end{cases} \quad (5)$$

$$\eta_{1,2}(r) = A(r) \cos(tM_1(r) \pm \frac{\pi}{4}), \quad A = \frac{a_0}{\sqrt{t}} \frac{F(r)}{\sqrt{|M|}},$$

$$\bar{\eta}_{1,2}(r) = A(r) \cos(tM_2(r) \mp \frac{\pi}{4}), \quad 0 < r_{1,3} < r^0 < r_{2,4} < \infty.$$

Отсюда следует, что по всей поверхности раздела, за исключением ее части $x \in D = (v_2 t, v_1 t)$, распространяются неустановившиеся капиллярно-гравитационные ($\eta_1, \bar{\eta}_1$) и капиллярные ($\eta_2, \bar{\eta}_2$) волны, напминающие прогрессивные, но амплитуда которых зависит от x и t и затухает с ростом t как $t^{-1/2}$. Эти основные волны имеют ярко выраженные задние фронты, существование которых обусловлено исключительно действием капиллярных сил. В области D образуются волны, амплитуда которых затухает, по крайней мере, как t^{-1} .

б) $c^0 < |c_1| < C_0$. Так как в этом случае $\varphi(0) = \varphi(\infty) = \infty$, $\varphi'(r^0) = 0$, $\varphi(m_1) = \varphi(m_2) = 0$, $\varphi(r^0) < 0$, где $m_1 < r^0 < m_2$,

$$m_{1,2} = (\gamma_1 c_1^2 + \sqrt{\gamma_1^2 c_1^4 - 3\xi_1 g_1})/3\xi_1,$$

то при $x > v_3 t$ уравнение $M'_1 = 0$, а при $x < v_4 t$ уравнение $M'_2 = 0$ всегда

имеют по два корня $r_{1,2}$ и $r_{3,4}$ соответственно ($v_{3,4} = c \mp v$, $v = |\varphi(r^0)|$, $v_3 < v_4$). Тогда вид поверхности раздела будет определяться формулами (4), где в выражениях (5) необходимо заменить $v_{1,2}$ соответственно на $v_{3,4}$. Следовательно, при $c^0 < |c_1| < c_0$ вся поверхность раздела покрыта неустановившимися волнами, амплитуда которых затухает как $t^{-1/2}$. В областях $x > v_4 t$ и $x < v_3 t$ эти волны напоминают прогрессивные, а в области $x \in (v_3 t, v_4 t)$ образуются своеобразные прогрессивно-стоячие волны.

2) $\Delta > 0$. Поскольку при $r \in (n_1, n_2)$ подкоренное выражение в M отрицательно, то выражение (2) принимает вид:

$$\zeta = \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3, \quad (6)$$

$$\zeta_{1,2} = \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{Re} \int_{a_{1,2}}^{a_1} F(r) (e^{itM_1} + e^{itM_2}) dr, \quad (7)$$

$$\zeta_3 = \frac{a_0}{\sqrt{2\pi n_1}} \int_{r_1}^{r_2} F(r) (e^{itN} + e^{-itN}) \cos(vtr) dr, \quad (8)$$

$$N = (\gamma_1 c_1^2 r^2 - \xi_1 r^3 - g_1 r)^{1/2} \quad (N^2 \geq 0), \quad a_1 = 0, \quad \bar{a}_1 = n_1, \quad a_2 = n_2, \quad \bar{a}_2 = \infty.$$

При $r \in (0, n_1) \cup (n_2, \infty)$ стационарные точки в интегралах (7) определяются из уравнений (3). Анализ показывает, что при $r \in (0, n_1)$ функция $\varphi(r)$ является монотонно убывающей; при $r \in (n_2, \infty)$ $\varphi(r)$ имеет единственный минимум в точке r^0 . При этом $0 < m_1 < n_1 < m_2 < n_2 < r^0 < \infty$, $\varphi(m_1) = 0$, $\varphi(r^0) = 0$, $\varphi(0) = \varphi(n_2 + 0) = \varphi(\infty) = \infty$, $\varphi(n_1 - 0) = -\infty$. Применяя теперь к интегралам (6) метод стационарных фаз, имеем

$$\zeta = \zeta_1 + \zeta_2 + \mu_1(\bar{r}_1) + \mu_2(\bar{r}_2) + O(t^{-1}), \quad (9)$$

где

$$\mu_{1,2}(r) = \frac{a_0}{\sqrt{t}} \frac{F(r)}{\sqrt{|M'|}} \cos(tM_{1,2}(r) \pm \frac{\pi}{4}) + O(t^{-3/2}),$$

$\zeta_{1,2}$ определяются формулами (5), причем $n_2 < r_{1,3} < r^0 < r_{2,4} < \infty$, а $\bar{r}_{1,2}$ являются корнями уравнений (3) при $r \in (0, n_1)$.

Для интеграла (8) имеем:

$$\zeta_3 = \zeta_{31} + \zeta_{32},$$

$$\zeta_{3k} = \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{Re} \int_{n_1}^{n_2} F(r) e^{itN_k} dr \quad (k = 1, 2), \quad (10)$$

$$N_{1,2} = ivr \pm N(r) \quad (N(n_{1,2}) = 0).$$

Так как $N'_{1,2}(r)$ не обращаются в ноль на промежутке интегрирования, то, проводя вычисление интегралов (10) по частям, легко показать, что $\zeta_{3k} = O(t^{-2})$.

Таким образом, при $\Delta > 0$ вид поверхности раздела определяется формулами (9). В данном случае $n_2 \gg 1$, а $F(r)$ при $r \rightarrow \infty$ убывает, по крайней мере, как r^{-1} ; поэтому амплитуды волн $\zeta_{1,2}$ в (9) весьма малы по сравнению с аналогичными волнами в случае $|c_1| < c^0$, хотя они во многом похожи.

Неустановившиеся волны $\mu_{1,2}$ покрывают всю поверхность раздела и в сумме представляют собой прогрессивно-стоячие волны, амплитуда которых зависит от x и t и затухает как $t^{-1/2}$.

Таким образом, наличие сил поверхностного натяжения приводит к устойчивости внутренних волн в случае, когда потоки верхнего и нижнего слоев имеют различные по величине или по направлению скорости. Заметим, что на функцию начального смещения поверхности раздела существенных ограничений не накладывалось: $f(x)$ должна быть представима интегралом Фурье. Образующиеся при этом в некоторых случаях неустановившиеся волны отличны от традиционных и могут носить характер прогрессивно-стоячих волн.

1. Федосенко В. С., Черкесов Л. В. // Изв. АН СССР. МЖГ. 1970. № 4. С. 137.
 2. Букатов А. Е., Черкесов Л. В. Волны в неоднородном море. Киев, 1983.
 3. Гандин Л. С. // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. 1957. № 3. С. 407.
 4. Куликовский А. Г., Шикина И. С. // Изв. АН СССР. МЖГ. 1979. № 3. С. 12.
 5. Сретенский Л. Н. // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. 1955. № 6. С. 505.
- Поступила в редакцию 22.02. 94.

УДК 517.917

Б. В. ЗАДВОРНЫЙ

ПРИМЕНЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПЕРЕМЕННЫХ К ИССЛЕДОВАНИЮ ОБОБЩЕННОЙ НЕПРЕРЫВНОЙ ЗАВИСИМОСТИ РЕШЕНИЙ ОТ НАЧАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Variables transformations are applied to an investigation of relative behavior of integral curves. The extended continuous dependence of diagonal systems solutions are studied.

1. В [1] для задачи

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(s) = \xi, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad f: D \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

с $D = [s, +\infty[\times \mathbb{R}^n$, определяется понятие обобщенной непрерывной зависимости решений от начальных данных (условие А). Обозначая: решения задачи (1) $x(t) = x(t; s, \xi)$ (в [1] s было фиксировано), правый максимальный промежуток существования этого решения $[s, \beta(s, \xi)[$; для $(s, \xi) = (s_0, \xi_0)$ соответственно $x_0(t) = x(t; s_0, \xi_0)$, $[s_0, \beta(s_0, \xi_0)[= [s_0, \beta_0[$; $\gamma_0 = \{ (t, x_0(t)), t \in [s_0, \beta_0[\}$ — интегральная кривая решения $x_0(t)$ в пространстве переменных t, x ; $|\cdot|, |\cdot|$ — евклидово расстояние между точками в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$, $d(\cdot, \cdot)$ — расстояние от точки до множества в $\mathbb{R}^{n+1}$, дадим следующее определение условию А.

Определение. Решения задачи (1) обобщенно непрерывно зависят от начальных значений (s, ξ) при $(s, \xi) = (s_0, \xi_0)$, если $\forall \epsilon > 0 \exists \delta(\epsilon) > 0, \forall (s, \xi), |s - s_0|, |(s, \xi) - (s_0, \xi_0)| \leq \delta(\epsilon), \forall t \in [s, \beta(s, \xi)[$,

$$\exists \bar{t} \in [s_0, \beta_0[\Rightarrow |(t, x(t; s, \xi)) - (\bar{t}, x_0(\bar{t}))| \leq \epsilon.$$

Примечания. 1) Везде в этой статье будем рассматривать продолжение решений вправо от s , а $D = [t_0, +\infty[\times \mathbb{R}^n, t_0 \leq s$. 2) Последнюю строчку в определении можно заменить условием $d((t, x(t; s, \xi)), \gamma_0) \leq \epsilon$.

В [2] указывается, что условие А занимает промежуточное положение между устойчивостью по Ляпунову и орбитальной устойчивостью (в случае продолжимости лишь на конечный промежуток речь идет о решениях специальной вспомогательной задачи), откуда возникает идея использования для исследований метода функций Ляпунова [1]. В предлагаемой статье применяется нелинейный аналог преобразования Ляпунова, сохраняющий выполнение или невыполнение условия А, что в принципе позволяет упростить исследование некоторых систем. С этой целью в п. 3 рассматривается обобщенная непрерывная зависимость решений диагональных уравнений, которые, впрочем, и сами по себе представляют интересные случаи взаимного расположения интегральных кривых в окрестности концов промежутка существования.

2. Рассмотрим диффеоморфизм $L: D \rightarrow E \subset \mathbb{R}^{n+1}$,

$L(t, x) = (L_0(t, x), L_1(t, x), \dots, L_n(t, x)) = (\tau, y_1, \dots, y_n) = (\tau, y)$, преобразующий задачу (1) в задачу

$$dy/d\tau = g(\tau, y), \quad y(\sigma) = \eta, \quad (\sigma, \eta) = L(s, \xi), \quad g: E \rightarrow \mathbb{R}^n. \quad (2)$$

Заметим следующее:

1) Расстояние между образами $(\tau, y), (\tau', y') \in E$ точек $(t, x), (t', x') \in D$ можно оценить с помощью теоремы о модуле конечного приращения дифференцируемого отображения:

$$|(\tau, y), (\tau', y')| \leq M \cdot |(t, x), (t', x')|,$$

где M — верхняя грань нормы матрицы Якоби отображения L на отрезке, соединяющем точки (t, x) и (t', x') ;