

УДК 519.1

А. Ю. БАБАЙЦЕВ, Ю. М. МЕТЕЛЬСКИЙ, Р. И. ТЫШКЕВИЧ

НОВОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ БАЙНЕКЕ О РЕБЕРНЫХ ГРАФАХ

The article deals with the new proof of Beineke's theorem, characterizing line graphs of simple graphs by the list of forbidden induced subgraphs. The proof is based on classical theorem of Krausz.

Множество вершин и множество ребер графа G обозначаются через VG и EG соответственно.

Для произвольного графа G *реберный граф* $L(G)$ определяются следующими условиями:

- (1) $VL(G) = EG$;
- (2) вершины e_1 и e_2 смежны в $L(G)$ тогда и только тогда, когда ребра e_1 и e_2 смежны в G (рис. 1).

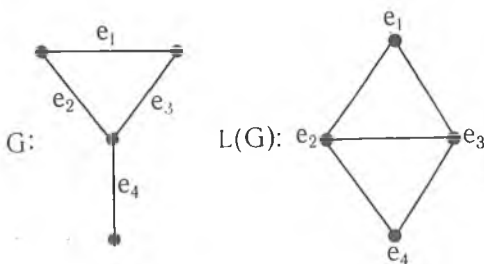


Рис. 1. Граф и его реберный граф

Граф H называется *реберным*, если существует такой граф G , что $L(G) \cong H$.

Широко известны два классических критерия реберности. Первый — это теорема Краусса [1], дающая глобальную характеристику реберных графов.

Объединение $G_1 \cup G_2$ графов G_1 и G_2 определяется следующим образом: $V(G_1 \cup G_2) = VG_1 \cup VG_2$, $E(G_1 \cup G_2) = EG_1 \cup EG_2$.

Семейство графов $(G_i : i = \overline{1, m})$ называется *покрытием*

графа G , а графы G_i — *компонентами* этого покрытия, если $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_m$.

Одновершинные компоненты называются *тривиальными*.

Назовем покрытие *крауссовым*, если оно удовлетворяет следующим трем условиям:

- 1) все компоненты покрытия являются полными графами;
- 2) каждая вершина входит не более чем в две компоненты;
- 3) любые две компоненты имеют не более одной общей вершины.

Характеризационную теорему из [1] можно сформулировать так:

Теорема Краусса. Граф является реберным тогда и только тогда, когда существует крауссово покрытие этого графа.

Эта характеристика близка к определению, доказательство теоремы несложно.

Второй из упомянутых критериев — локальная характеристика реберных графов Байнеке в терминах запрещенных порожденных подграфов [2].

Теорема Байнеке. Для графа G следующие два утверждения эквивалентны:

- (i) граф G является реберным;
(ii) ни один из девяти графов, изображенных на рис. 2, не является порожденным подграфом графа G .

Здесь предлагается новое доказательство теоремы Байнеке, свободное от большого перебора. В нем максимальным образом используется теорема Краусса.

Обозначения: $G(X)$ — подграф графа G , порожденный подмножеством вершин X ; $N_G(v) = N_G(v)$ — окружение вершины v в графе G ; если α — покрытие, а H — подграф графа G , то $H \in \alpha$ означает, что граф H слугит компонентой покрытия α ; (a, b, c) — треугольник с вершинами a, b, c ; $a-b$ ($a \neq b$) — вершины a и b смежны (не смежны). Другие обозначения общеприняты и взяты из [3].

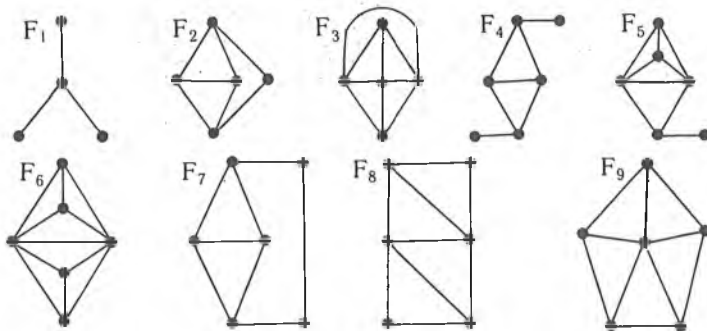


Рис. 2. Запрещенные порожденные подграфы для реберных графов

2. Доказательство теоремы Байнеке. $(i) \Rightarrow (ii)$. Очевидно, что ни один из девяти графов рис. 2 не имеет крауссова покрытия и потому не является реберным. Отсюда вытекает истинность нужной импликации, поскольку свойство графа «быть реберным» сохраняется при переходе к порожденным подграфам.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Очевидно, что полные графы и всякий граф G , максимальная степень вершин которого $\Delta(G)$ меньше трех, являются реберными, поэтому такие графы можно исключить из дальнейшего рассмотрения. Очевидно также, что достаточно рассматривать связные графы.

Итак, пусть G — связный n -вершинный граф, удовлетворяющий следующим условиям: в G нет порожденных подграфов из формулировки теоремы, $G \neq K_n$, $\Delta(G) > 2$. Пусть далее, a — вершина максимальной степени графа G , $H = G(N(a))$.

Лемма 1. Граф H имеет один из следующих двух видов:

I. $H = G_1 \cup G_2$ — объединение двух полных графов без общих вершин;

II. $H = G_1 \cup G_2 \cup M$, где G_1 и G_2 — такие, как выше, а M — совершенное паросочетание, каждое ребро которого имеет один конец в G_1 , а другой в G_2 .

Положим $H' = G - a$ и будем считать теорему верной для всех $(n-1)$ -вершинных графов. По индуктивному предположению существует крауссово покрытие графа H' . Пусть α — одно из таких покрытий. Теорема будет доказана, как только удастся преобразовать α в крауссово покрытие графа G .

Если оба графа G_1 и G_2 являются компонентами покрытия α , то после замены в α этих компонент полными графами с множествами вершин $VG_i \cup \{a\}$, $i = 1, 2$, получается крауссово покрытие графа G . Ниже мы стремимся получить эту ситуацию.

Лемма 2. Если $K = K_1$ — полный подграф в H' , не содержащийся целиком ни в одной из компонент покрытия α , то $l = 3$ и ребра графа K имеются в трех разных компонентах.

Лемма 3. Если $|VG_i| = l > 2$, то либо $G_i \in \alpha$, либо $l = 3$ и ребра графа G_i находятся в трех разных компонентах покрытия α .

Лемма 4. Пусть H_1 — компонента покрытия α , в которой есть вершина b , не входящая в G_1 , и ровно две вершины b_1 и b_2 , входящие в G_1 . Пусть далее, в G_2 есть вершина c , не смежная ни с b_1 , ни с b_2 . Тогда:

(iii) $H_1 = (b, b_1, b_2)$ — треугольник;
 (iv) существует крауссово покрытие β графа H' , удовлетворяющее следующим двум условиям:

- 1) ребро $b_1 b_2 \in \beta$ или $G_1 \in \beta$;
- 2) каждая компонента покрытия α , содержащая вершину из G_2 , служит компонентой и для β .

Доказательства этих лемм опущены.

Пусть далее, $G_1 = K_r$, $G_2 = K_s$, $r \geq s$ и пусть вначале выполняется одно из следующих условий:

- 1) $r > 3$;
- 2) для любой пары x, y вершин графа G_1 в G_2 есть вершина, не смежная ни с x , ни с y .

Тогда, используя леммы 3 и 4, можно показать, что в этой ситуации покрытие α можно выбрать так, чтобы граф G_1 был его компонентой.

Обратимся к G_2 . Если $G_2 \in \alpha$, то $s \leq 3$. При $s > 1$ выполняется условие, аналогичное условию 2): для любой пары b_1, b_2 вершин графа G_2 в G_1 есть вершина, не смежная ни с b_1 , ни с b_2 . Следовательно, к G_2 применима лемма 4. Так что можно считать, что и $G_2 \in \alpha$.

Перейдем к $s = 1$. Пусть $G_2 \notin \alpha$, $VG_2 = \{c\}$, $V_c = N_G(c) \setminus (VG_1 \cup \{a\}) \cup \{c\}$.

Тогда $G(V_c) = K$ — клика. Если $|V_c| > 1$, то покажем, что покрытие α можно выбрать так, чтобы K была его единственной нетривиальной компонентой, содержащей вершину c . Если это так, то ничто не мешает считать $G_2 \in \alpha$.

Согласно лемме 2, $|V_c| \leq 3$. Если $|V_c| = 2$, то α — нужное покрытие.

Пусть $V_c = \{c, d_1, d_2\}$. Тогда $cd_1 = H_1$, $cd_2 = H_2$, $d_1 d_2 \in EH_3$, $H_i \in \alpha$, $i = 1, 3$. Если $H_3 = d_1 d_2$, то, устранив из α компоненты H_i , $i = 1, 3$ и добавив клику K , получим крауссово покрытие графа H' , обладающее нужным свойством.

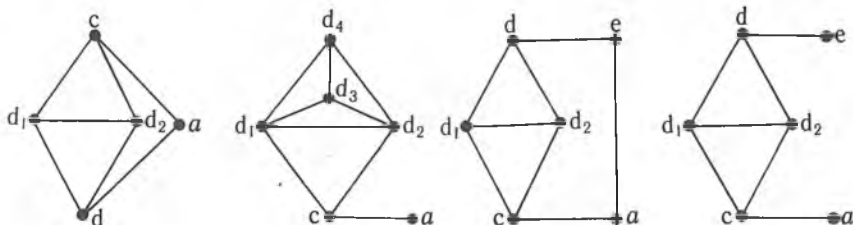


Рис. 3. Рис. 4. Рис. 5

Пусть $d_1 d_2 \notin H_3$. Заметим, что $d_1 \not\sim a$, иначе вершина d_1 входила бы в G_1 и по определению V_c получили бы, что $d_1 \notin V_c$ — противоречие. Аналогично $d_2 \not\sim a$. Если теперь $d \in VH_3$ и $d \sim a$, то $d \not\sim c$ и $G(a, c, d, d_1, d_2) = F_2$ — запрещенный подграф (рис. 3). Если $VH_3 = \{d_1, d_2, d_3, d_4, \dots\}$, то $G(a, c, d_1, d_2, d_3, d_4) = F_5$ — запрещенный подграф (рис. 4). Следовательно, $VH_3 = \{d_1, d_2, d\}$. Если теперь e — новая вершина, смежная с d , то $e \not\sim d_1$, $e \not\sim d_2$, $e \not\sim c$ и $G(a, c, d, d_1, d_2, e) = F_4$ или F_7 — запрещенные подграфы (рис. 5). Таким образом, H_3 — единственная нетривиальная компонента покрытия α , содержащая вершину d . Устранив из α компоненты H_1, H_2, H_3 и тривиальную компоненту $\{d\}$, если она есть, и добавив компоненты K, dd_1, dd_2 , получим новое крауссово покрытие с нужным свойством.

Ситуация, в которой выполняются условия 1) или 2), рассмотрена полностью. В этой ситуации можно считать, что $G_i \in \alpha$, $i = 1, 2$.

Рассмотренная ситуация охватывает следующие случаи:

- (1) $r > 3$ или $r = s = 3$;
- (2) $r = 3$ или $r = 2, s = 2$, граф H имеет вид I, или M (лемма 1) является ребром;
- (3) $r = 3$ или $r = 2, s = 1$, граф H имеет вид I.

Нарушение условий 1) или 2) приводит к нескольким ситуациям, которые объединяет обстоятельство:

- 3) граф H имеет вид II, причем мощность паросочетания M максимальна.

Эти ситуации следующие:

а) $r = 3$, $s = 1$ или $s = 2$, выполняется 3);

б) $r = 2$, $s = 1$, выполняется 3).

в) $r = 2$, $s = 2$, выполняется 3).

а) поскольку $r = 3$, то по лемме 3 $G_1 \in \alpha$. В противном случае ребра G_1 принадлежали бы трем разным компонентам покрытия α , что вело бы к противоречию с крауссовостью этого покрытия (из-за условия 3), по крайней мере одна из вершин G_1 содержалась бы в трех компонентах покрытия α).

Если $s = 1$, то к G_2 применимы рассуждения, проводимые выше. Поэтому можно считать, что $G_2 \in \alpha$. Если $s = 2$, то уже по лемме 4 можно считать, что $G_2 \in \alpha$.

б) $VG_1 = \{b_1, b_2\}$, $VG_2 = \{c\}$, $b_1 - c -$ по условию 3).

Обозначим $V_{b_2} = N_H(b_2) \setminus \{b_1\} \cup \{b_2\}$, $V_c = N_H(c) \setminus \{b_1\} \cup \{c\}$. Так как $\deg \alpha = \Delta(G) = 3$, то $|V_{b_2}| > 2$ или $|V_c| > 2$ — невозможны. Невозможно и $|V_{b_2}| = |V_c| = 2$, ибо тогда появится один из запрещенных подграфов F_2 , F_4 или F_7 (так как $c \neq b_2$).

Если $|V_{b_2}| = |V_c| = 1$ или $|V_{b_2}| = 2$, $|V_c| = 1$, то, добавив к α тривиальную компоненту G_2 , получим требуемое крауссово покрытие β графа H .

Если $|V_{b_2}| = 1$, $|V_c| = 2$, то аналогично, поменяв местами обозначения вершин b_2 и c , получим требуемое крауссово покрытие β графа H .

в) $VG_1 = \{b_1, b_2\}$, $VG_2 = \{c_1, c_2\}$, $b_1 - c_1$, $b_2 - c_2$ — по условию 3).

Если по крайней мере одна из компонент G_i , $i = 1, 2$, не принадлежит α , то $G_i \subset H_i$, причем $|H_i| = 3$, а ребра b_1c_1 и b_2c_2 совпадают с компонентами крауссова покрытия α , так как $\deg \alpha = \Delta(G) = 4$. В этой ситуации из крауссова покрытия α исключаем компоненты b_1c_1 и b_2c_2 и добавляем треугольники (a, b_1, c_1) и (a, b_2, c_2) , в результате чего получаем крауссово покрытие γ графа G .

1. K r a u s z J. // Mat. Fiz. Lapok. 1943. V. 50.

2. B e i n e k e L. W. // Beitrage zur graphentheorie / Red. H. Sach, H. Voss, H. Walther. Leipzig, 1968.

3. X a p a p и Ф. Теория графов. М., 1973.

4. Berge C. Graphes et hypergraphes. Paris, 1970.

Поступила в редакцию 14.02.93.

УДК 519.2

Е. Е. ЖУК

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШАЮЩЕГО ПРАВИЛА L-СРЕДНИХ В УСЛОВИЯХ «МАЛОЙ ВЫБОРКИ»

The problem of L-means decision rule stability under «small sample» is investigated by means of risk asymptotic expansion method. The case of normal distribution mixture (Fisher model) is given and some stability measures are proposed and evaluated.

Пусть в пространстве R^N возникают подлежащие классификации независимые в совокупности случайные наблюдения $x_1, \dots, x_n$ из $L \geq 2$ классов $\{\Omega_1, \dots, \Omega_L\}$. Наблюдение из класса Ω_i есть случайный N -вектор, описываемый плотностью распределения вероятностей $q(x; \theta_i^0)$, $x \in R^N$, с параметром сдвига $\theta_i^0 \in R^N$, равным математическому ожиданию:

$$\int_{R^N} x q(x; \theta_i^0) dx = \theta_i^0, i \in S = \{1, \dots, L\}.$$

Через d_i^0 обозначим неизвестный номер класса, к которому принадлежит x_i , $t = 1, n$. Составной вектор «центров классов» (математических ожиданий) $\theta^0 = (\theta_1^{0T} | \dots | \theta_L^{0T})^T \in R^{LN}$ неизвестен. Задача заключается в оценивании вектора истинной классификации $D^0 = (d_1^0, \dots, d_n^0)^T$ по случайной выборке $X = (x_1 | \dots | x_n)^T$ объема n .