

5. Отметим следующие особенности полученного результата: 1) ООСВ, определенная на функциональном пространстве, сводится к оптимальной обратной связи по конечному числу оценок; 2) количество и содержание оценок полностью определяются исходной задачей оптимального управления; 3) оценки $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ представляют оценки терминальных ограничений и лишь косвенно — оценки состояний оптимизируемой системы; 4) для задачи построения ООСВ справедлив *принцип разделения*, согласно которому сначала независимо от управления решаются задачи наблюдения, а затем по результатам наблюдения (оценкам) строится оптимальное управление; 5) обратная связь (5) введена в полную аналогии с классической обратной связью по состоянию. Однако между классической моделью задачи и задачей данной работы есть существенная разница: классическая модель (даже в случае управления по выходу) не содержит неопределенностей, в исследуемой модели имеются два источника неопределенности. В связи с этим возможны различные типы обратных связей. Обратную связь (5) можно, следуя [10], назвать размыкаемой. Более сложные (замыкаемые) обратные связи можно исследовать изложенными методами. Наиболее полными («истинными») являются замкнутые обратные связи, для построения которых в задаче (1)—(4) пока не предложено эффективных методов; 6) относительно действующих на систему управления возмущений нет никакой информации. ООСВ определяется для задачи без учета аддитивных возмущений и поэтому вопрос об ее оптимальности относительно возмущений не имеет смысла; 7) ГООСВ в каждом процессе вырабатывает в режиме реального времени такие управления, которые циркулировали бы в системе, замкнутой ООСВ.

1. Ф е л ь д б а у м А. А. Основы теории оптимальных автоматических систем. М., 1961.
2. О с т р е м К. Введение в стохастическую теорию управления. М., 1973.
3. S t o o r v o g e l A. A. The H_∞ control problem: a state space approach. Englewood Cliffs, 1992.
4. S c h w e r p e F. C. Uncertain dynamic system. Englewood Cliffs, 1973.
5. W i t s e n h a u s e H. S. // IEEE Trans. Automat. Control. 1968. V. AC-13. № 1.
6. К р а с о в с к и й Н. Н. Теория управления движением. М., 1968.
7. Г а б а с о в Р., К и р и л л о в а Ф. М., К о с т ю к о в а О. И. // Докл. АН СССР. 1991. Т. 320. № 6.
8. Г а б а с о в Р., К и р и л л о в а Ф. М., К о с т ю к о в а О. И. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1992. № 2.
9. Г а б а с о в Р., К и р и л л о в а Ф. М., К о с т ю к о в а О. И. // Автоматика и телемеханика. 1993. № 4.
10. Фильтрация и стохастическое управление в динамических системах/ Под ред. К. Т. Леондеса. М., 1973.

Поступила в редакцию 18.02.94.

УДК 519.853.32

А. В. ЦОКАТАЕВ, Т. В. ЧЕМИСОВА

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ПРОСТЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ПЕРЕМЕННЫЕ

The combined algorithm for solving the separable problem of geometric programming with box constraints on variables is suggested. The algorithm consists of two types of iterations, based on the new principle of choosing the suitable direction.

Важным разделом математического программирования является геометрическое программирование (ГП). Его модели находят широкое применение в различных областях науки и техники и, в частности, при решении целого ряда инженерных задач [1, 2].

Рассмотрим пару двойственных задач ГП с простыми ограничениями на переменные в сепарабельной форме:

$$g(z, x) = \sum_{i \in I} c^{x_i} \rightarrow \min, \quad (1)$$

$$x = Az + b, \quad d_* \leq z \leq d^*,$$

где $z = (z_j, j \in J)$, $J = \{1, 2, \dots, m\}$; $x = (x_i, i \in I)$, $I = \{1, 2, \dots, n\}$; $A - (n \times m)$ -матрица экспонент, $n > m$, $\text{rank } A = m$; $b \in R^n$; d_* , $d^* \in R^m$;

$$\varphi(\lambda, v_*, v^*) = \sum_{i \in I} \lambda_i (1 + b_i - \ln \lambda_i) + v_* \cdot d_* - v^* \cdot d^* \rightarrow \max, \quad (2)$$

$$A' \lambda - v_* + v^* = 0,$$

$$v_* \geq 0, \quad v^* \geq 0; \quad \lambda > 0,$$

где $\lambda = (\lambda_i, i \in I)$, $v_* = (v_{*j}, j \in J)$, $v^* = (v^*_j, j \in J)$.

Предлагается комбинированный алгоритм решения прямой задачи (1) и двойственной задачи (2), основанный на аппроксимации их целевых функций минорантой и мажорантой соответственно, который обобщает алгоритмы [3]. Направления улучшения планов этих задач строятся на основе экстремальных свойств аппроксимирующих функций. Алгоритм состоит из итераций прямого и двойственного типов и способен переключаться с одного типа на другой, что позволяет решать задачи (1), (2) одновременно и вместе с тем повышает эффективность решения каждой из них в отдельности.

Двойственный план (λ, v_*, v^*) задачи (1) назовем согласованным, если $v_{*j} = 0$, $v^*_j = -\delta_j$ при $\delta_j \leq 0$; $v_{*j} = \delta_j$, $v^*_j = 0$ при $\delta_j > 0$, $j \in J$, где $\delta = A' \lambda$. При заданном векторе на согласованном плане (λ, v_*, v^*) достигается максимум целевой функции двойственной задачи (2), поэтому в дальнейшем будем рассматривать только согласованные двойственные планы.

Назовем опорной задачи (1) совокупность множеств $K_0 = \{I_0, J_0\}$, $I_0 \subset I$, $J_0 \subset J$, $|I_0| = |J_0|$, для которых матрица $A_0 = A(I_0, J_0)$ невырождена [4]. Множества I_0 , J_0 будем называть опорными, множества $I_n = I \setminus I_0$, $J_n = J \setminus J_0$ — неопорными.

Обозначим $x_0 = x(I_0)$, $x_n = x(I_n)$; $z_0 = z(J_0)$, $z_n = z(J_n)$; $b_0 = b(I_0)$, $b_n = b(I_n)$. Тогда $z_0 = A_0^{-1} (x_0 - A(I_0, J_n)z_n - b_0)$. Положив $B(I_n, I_0) = A(I_n, J_0)A_0^{-1}$, $D(I_n, J_n) = A(I_n, J_n) - B(I_n, I_0)A(I_0, J_n)$, $c(I_n) = b_n - B(I_n, I_0)b_0$, задачу (1) можно представить в эквивалентном виде:

$$g(z, x) = \sum_{i \in I} e^{x_i} \rightarrow \min,$$

$$x_n = B(I_n, I_0)x_0 + D(I_n, J_n)z_n + c(I_n), \quad (3)$$

$$d_{*0} \leq A_0^{-1} (x_0 - A(I_0, J_n)z_n - b_0) \leq d_{*0}^*,$$

$$d_{*n} \leq z_n \leq d_{*n}^*,$$

где $d_{*0} = d_*(J_0)$, $d_{*n} = d_*(J_n)$, $d_{*0}^* = d^*(J_0)$, $d_{*n}^* = d^*(J_n)$.

Совокупность из плана (z, x) задачи (3) и опоры K_0 будем называть опорным планом (z, x, K_0) ; а опорный план — невырожденным, если $d_{*0} < z_0 < d_{*0}^*$. Будем считать, что двойственный план λ сопровождает опору K_0 , если $\delta(J_0) = 0$, т. е. $\lambda_0 = -(A_0')^{-1} A'(I_n, J_0) \lambda_n$. Учитывая ограничения типа равенств задачи (2), получим $\delta(J_n) = D'(I_n, J_n) \lambda_n$.

Остановимся на подробном описании итераций прямого типа.

В начале работы алгоритма имеем некоторый невырожденный опорный план (z, x, K_0) задачи (1) и согласованный двойственный план λ , сопровождающий опору K_0 . На первой итерации $K_0 = \emptyset$.

Теорема 1. Пусть (z, x, K_0) — невырожденный опорный план. Для оптимальности плана (z, x) необходимо, чтобы выполнялись соотношения:

$$e^{x_i} + r_i(x) = 0, \quad i \in I_0;$$

$$\Delta_j(x) \geq 0 \quad \text{при } z_j = d_{*j}; \quad \Delta_j(x) \leq 0 \quad \text{при } z_j = d_{*j}^*;$$

$$\Delta_j(x) = 0 \quad \text{при } d_{*j} < z_j < d_{*j}^*, \quad j \in J_n, \quad (4)$$

где

$$r_i(x) = \sum_{j \in I_H} b_{ij} e^{x_j}, i \in I_0; \Delta_j(x) = \sum_{i \in I_H} d_{ij} e^{x_i}, j \in J_H.$$

2. Пусть для опорного плана (z, x, K_0) выполняются соотношения (4). Тогда план (z, x) является оптимальным.

Пусть на опорном плане (z, x, K_0) задачи (3) не выполнены условия оптимальности (4), пара (l, y) — допустимое направление, т. е. она удовлетворяет соотношениям:

$$y_H = B(I_H, I_0)y_0 + D(I_H, J_H)l_H, \\ l_0 = A_0^{-1}(y_0 - A(I_0, J_H)l_H), d_{\cdot H} - z_H \leq l_H \leq d_{\cdot H}^* - z_H, \quad (5)$$

где

$$l = (l_j, j \in J), l_0 = l(J_0), l_H = l(J_H); y = (y_i, i \in I), \\ y_0 = y(I_0), y_H = y(I_H).$$

Положим

$$\psi_1(z, x, \lambda) = \sum_{i \in I_0} (e^{x_i} - \lambda_i x_i) + \sum_{i \in I_H} (\lambda_i + \lambda_i c_i - \lambda_i \ln \lambda_i) + \sum_{j \in J_H} \delta_j z_j,$$

$$\psi_2(x, l, y) = \sum_{i \in I_0} (e^{x_i + y_i} + r_i(x) y_i) + \sum_{i \in I_H} e^{x_i} + \sum_{j \in J_H} \Delta_j(x) l_j.$$

Следуя [3], можно показать, что справедливы неравенства:

$$g(z, x) \geq \psi_1(z, x, \lambda), g(z + l, x + y) \geq \psi_2(x, l, y). \quad (7)$$

На k -той итерации прямого типа направление (l, y) улучшения прямого плана (z^k, x^k) будем находить из подзадачи минимизации миноранты $F^k(l_H, y_0)$, составленной на основании (6), (7):

$$F^k(l_H, y_0) = \\ = \max_{l \in M} \{ \psi_1(z^k + l, x^k + y, \lambda), \psi_2(x^k, z^k - z^k + l, x^k - x^k + y) \} \rightarrow \min, \\ d_{\cdot H} - z_H^k \leq l_H \leq d_{\cdot H}^* - z_H^k,$$

$M \subset \{1, 2, \dots, k\}$ — множество индексов, формируемое на итерациях алгоритма. На первой итерации $M = \{1\}$.

Лемма 1. Пусть вектор (l_H, y_0) является решением задачи (8), а компоненты l_0, y_H построены по формулам (5). Тогда

$$dg(z^k + \theta l, x^k + \theta y) / d\theta|_{\theta=0} < 0.$$

Шаг θ вдоль направления (l, y) убывания целевой функции задачи (3) вычисляем по формуле

$$\theta_0 = \min \{1, \theta_{j_0}, \theta_g\}, \text{ где } \theta_{j_0} = \min_{j \in J_0} \theta_j; \theta_j = (d_j^* - z_j^k) / l_j,$$

если

$$l_j > 0; \theta_j = (d_j - z_j^k) / l_j,$$

если $l_j < 0; \theta_j = +\infty$, если $l_j = 0, j \in J_0; \theta_g = \arg \min_{\theta \geq 0} g(x^k + \theta y)$.

После того, как решена задача (8) и вычислен шаг θ_0 вдоль направления, преобразуем опору K_0 :

1. Если

$$\theta_0 = \theta_{j_0}, j_0 \in J_0, \text{ то } \bar{J}_0 = J_0 \setminus j_0, \bar{I}_0 = I_0 \setminus i_0,$$

где

$$|\alpha_{i_0}| = \max_{i \in I_0} |\alpha_i|, \alpha_i = A_0^{-1}(i, j_0) \neq 0, i \in I_0.$$

2. Если $\theta_0 = \theta_g < \theta_{\min}$, где $\theta_{\min}$ — параметр алгоритма, то $\bar{J}_0 = J_0 \cup j_1, \bar{I}_0 = I_0 \cup i_1$. Индекс j_1 находим из условия

$$\sigma_{j1} = \min \sigma_j; \sigma_j = +\infty, \text{ если } \Delta_j(0)\Delta_j(\theta_0) \geq 0;$$

$$\sigma_j = -\frac{\Delta_j(0)\theta_0}{\Delta_j(\theta_0) - \Delta_j(0)}, \text{ если } \Delta_j(0)\Delta_j(\theta_0) < 0, j \in J_n;$$

$$|\alpha_{i1}| = \max_{i \in I_n} |\alpha_i|, \text{ где } \alpha_i = A(i, j_1) - A(i, J_0)A_0^{-1}A(I_0, j_1), i \in I_n.$$

Здесь

$$\Delta_j(0) = \sum_{i \in I_n} d_{ij} e^{x_i^k}, \Delta_j(\theta_0) = \sum_{i \in I_n} d_{ij} e^{x_i^k + \theta_0 y_i}.$$

Преобразованной опорой будет совокупность $K_0 = \{\bar{I}_0, \bar{J}_0\}$.

В конце каждой итерации прямого типа по формулам (5) строим зависимые компоненты направления (l, y) , переходим к новому плану (z^{k+1}, x^{k+1}) задачи (3), где $z^{k+1} = z^k + \theta_0 l$, $x^{k+1} = x^k + \theta_0 y$, и осуществляем проверку критерия останова алгоритма.

Лемма 2. Пусть вектор (l_n^0, y_0^0) — решение задачи (8). Для ε -оптимальности плана задачи (3) достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$g(z^k, x^k) - F^k(l_n^0, y_0^0) \leq \varepsilon.$$

Остановимся подробнее на решении задачи (8). Пусть вначале $M = \{k\}$. Возможна одна из следующих ситуаций: а) минимум миноранты $F^k(l_n, y_0) = \max\{\psi_1(z^k + l, x^k + y, \lambda), \psi_2(x^k, l, y)\}$ достигается на функции $\psi_1(z^k + l, x^k + y, \lambda)$; б) минимум достигается на функции $\psi_2(x^k, l, y)$; в) в точке минимума миноранты $\psi_1(z^k + l, x^k + y, \lambda) = \psi_2(x^k, l, y)$.

Проверка этих условий заключается в следующем:

а) находим $y_i = \ln \lambda_i - x_i^k$, $i \in I$ и полагаем $l_j = d_{\cdot j} - z_j^k$ при $\delta_j > 0$; $l_j = d_j^* - z_j^k$ при $\delta_j < 0$; $l_j = 0$ при $\delta_j = 0$, $j \in J_n$. Проверяем неравенство $\psi_1(z^k + l, x^k + y, \lambda) \geq \psi_2(x^k, l, y)$. Если оно выполнено, то (l_n, y_0) — решение задачи (8). Положив $M = M \cup \{k+1\}$, переходим к поиску шага вдоль направления. Проверку условия а) осуществляем только на первой итерации;

б) если $r_i(x^k) < 0$ для каждого $i \in I_0$, то вычисляем

$$y_i = \ln(-r_i(x^k)) - x_i^k, i \in I_0;$$

$$l_j = \begin{cases} d_{\cdot j} - z_j^k, & \text{если } \Delta_j(x^k) > 0, \\ d_j^* - z_j^k, & \text{если } \Delta_j(x^k) < 0, \\ 0, & \text{если } \Delta_j(x^k) = 0, j \in J_n \end{cases} \quad (9)$$

и проверяем условие $\psi_2(x^k, l, y) \geq \psi_1(z^k + l, x^k + y, \lambda)$. Если оно выполнено, то построенное направление (l_n, y_0) — решение задачи (8). Поскольку двойственный план λ не влияет на выбор направления, то, построив новый опорный план $(z^{k+1}, x^{k+1}, \bar{K}_0)$, переходим к итерациям двойственного типа;

в) в этом случае задача (8) равносильна задаче с ограничениями:

$$\psi_2(x^k, l, y) \rightarrow \min, \psi_1(z^k + l, x^k + y, \lambda) = \psi_2(z^k, l, y),$$

$$d_{\cdot j} - z_j^k \leq l_j \leq d_j^* - z_j^k, j \in J_n.$$

Из условий оптимальности для этой задачи относительно переменных y_i , $i \in I_0$; l_j , $j \in J_n$ и множителей Лагранжа $\omega_0, w_{\cdot j}, w_j^*$, $j \in J_n$ можно получить, что

$$y_i = y_i(\omega_0) = \ln \left(\omega_0 (r_i(x^k) + \lambda_i) - r_i(x^k) \right) - x_i^k, \quad i \in I_0, \quad (10)$$

$$\rho_j = \rho_j(\omega_0) = \Delta_j(x^k) + \omega_0 (\delta_j - \Delta_j(x^k)), \quad j \in J_H; \quad (11)$$

где $\rho_j = w_{\cdot j} - w_j^*$;

$$l_j = l_j(\omega_0) = \begin{cases} d_{\cdot j} - z_j^k, & \text{если } \rho_j(\omega_0) > 0, \\ d_j^* - z_j^k, & \text{если } \rho_j(\omega_0) < 0, \\ 0, & \text{если } \rho_j(\omega_0) = 0, \end{cases} \quad j \in J_H, \quad (12)$$

где ω_0 — корень нелинейного уравнения [5]:

$$\sum_{i \in I_0} \left(y_i(\omega_0) (r_i(x^k) + \lambda_i) + \lambda_i x_i^k \right) + \sum_{j \in J_H} (l_j(\omega_0) (\Delta_j(x^k) - \delta_j) + \delta_j z_j^k) + \sum_{i \in I_H} \left(e^{x_i^k} - \lambda_i - \lambda_i c_i + \lambda_i \ln \lambda_i \right) = 0. \quad (13)$$

Лемма 3. Уравнение (13) имеет единственное решение на отрезке $[0, 1]$.

Положив $\bar{M} = M \cup \{k+1\}$, завершаем итерацию.

Пусть теперь после $(k-1)$ -й итерации ($k \geq 2$) получен прямой опорный план (z^k, x^k, K_0) и построено множество M , $|M| > 1$. Проверим вначале, не достигает ли миноранта $F^k(l_H, y_0)$ минимума на функции $\psi_2(x^k, y, 1)$. Если $r_i(x^k) < 0$, $i \in I_0$, то вычисляем компоненты y_i , $i \in I_0$, l_j , $j \in J_H$ согласно (9) и проверяем условие:

$$\psi_2(x^k, y, 1) \geq \max_{i \in M/k} \left\{ \psi_1(z^k + l, x^k + y, \lambda), \psi_2(x^k, z^k - z^i + l, x^k - x^i + y) \right\}.$$

Если оно выполнено, то, построив новый опорный план $(z^{k+1}, x^{k+1}, \bar{K}_0)$, переходим на итерации двойственного типа.

В противном случае для решения задачи (8) введем вспомогательную переменную ξ :

$$\xi = \max_{i \in M} \left\{ \psi_1(z^k + l, x^k + y, \lambda), \psi_2(x^i, z^k - z^i + l, x^k - x^i + y) \right\}.$$

Получаем эквивалентную (8) задачу с ограничениями относительно переменных ξ ; y_i , $i \in I_0$; l_j , $j \in J_H$:

$$\begin{aligned} \xi &\rightarrow \min, \\ \psi_1(z^k + l, x^k + y, \lambda) &\leq \xi, \quad \psi_2(x^i, z^k - z^i + l, x^k - x^i + y) \leq \xi, \quad i \in M, \\ d_{\cdot j} - z_j^k &\leq l_j \leq d_j^k - z_j^k, \quad j \in J_H. \end{aligned} \quad (14)$$

Решение задачи (14) с использованием условий оптимальности Куна—Таккера сводится к решению системы нелинейных уравнений относительно множителей Лагранжа ω_i , $i \in M$:

$$\sum_{i \in I_0} \left(y_i(\omega_p, p \in M) (r_i(x^s) + \lambda_i) + \lambda_i x_i^k \right) + \sum_{j \in J_H} (l_j(\omega_p, p \in M) (\Delta_j(x^s) - \delta_j) + \Delta_j(x^s) (z_j^k - z_j^s) - \delta_j z_j^k) + \sum_{i \in I_H} \left(e^{x_i^k} - \lambda_i - \lambda_i c_i + \lambda_i \ln \lambda_i \right) = 0, \quad s \in M.$$

В качестве начальных приближений ω_i^0 , $i \in M$ для системы (15) используем множители Лагранжа, полученные на предыдущей итерации. Если для вектора $(\omega_i, i \in M)$, являющегося решением системы (15), $\omega_{i_0} = \min_{i \in M} \omega_i \leq 0$, то исключаем индекс i_0 из множества M : $\bar{M} = M \setminus i_0$ и вновь решаем систему. В итоге все множители $\omega_i > 0$, $i \in M$. Если значение $\omega_0 = 1 - \sum_{i \in M} \omega_i > 0$, то, положив $\bar{M} = M \cup \{k+1\}$, завершаем итерацию.

Если $\omega_0 < 0$, то переходим с опорным планом $(z^{k+1}, x^{k+1}, \bar{K}_0)$ к итерациям двойственного типа.

1. Зенер К. Геометрическое программирование и техническое проектирование. М., 1973.

2. Даффин Р., Питерсон Э., Зенер К. Геометрическое программирование. М., 1972.

3. Покатаев А. В. // Докл. АН БССР. 1984. Т. 28. № 6. С. 492.

4. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Методы линейного программирования. Мн., 1980. Ч. 3.

5. Касько Т. В., Покатаев А. В. Алгоритм линейной аппроксимации для решения задачи безусловной оптимизации геометрического программирования. Мн., 1988. (Препринт/ИМ АН БССР. № 7 (317)).

Потупила в редакцию 22.07.93.