

$$(N) \sum_{i=1}^1 s_{(i)} = 0.$$

1. Ли Ц., Джадж Д., Зельнер А. Оценивание параметров марковских моделей по агрегированным временным рядам. М., 1977.

2. Синькевич Д. В., Труш Н. Н. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1992. № 2.

3. Феллер Ф. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М., 1984.

Поступила в редакцию 11.01.93.

УДК 517.929

ГАО СЮЭДУН (КНР)

РЕШЕНИЕ ДВУХ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Necessary and sufficient conditions of optimality of a support control are proved for optimal control problems with piecewise linear output and piecewise linear cost function.

1. Рассмотрим задачу оптимального управления:

$$J(u) = c'x(t^*) \rightarrow \max, \quad \dot{x} = Ax + bu, \quad x(0) = x_0,$$

$$Hx(t^*) = g, \quad d'x(t^*) \geq \alpha_0 (\leq \alpha_0), \quad |u(t)| \leq 1, \quad t \in T = [0, t^*], \quad (1)$$

$$(x \in R^n, u \in R, A \in R^{n \times n}, b, c, d \in R^n, H \in R^{m \times n}, g \in R^m, \alpha_0 \in R, m < n).$$

Допустимое и оптимальное управления определяются стандартно [1. С. 11].

Пусть $u(t)$, $t \in T$, — допустимое управление задачи (1). Исследуем случай, когда допустимая траектория $x(t)$, $t \in T$, попадает на плоскость $d'x = \alpha_0$ в конечный момент t^* .

Обозначим: $F(t, \tau)$, $\tau \in [0, t]$, — фундаментальная матрица решений уравнения $\dot{x} = Ax$; $\bar{H}' = (H', d)$, $\bar{H}(t) = \bar{H}'F(t^*, t)b$, $c(t) = c'F(t^*, t)b$, $t \in T$.

Пусть $T_{\text{оп}} = \{t_1, t_2, \dots, t_m, t_{m+1}\} \subset T$ — совокупность из $m+1$ изолированного момента.

Определение 1. Множество $T_{\text{оп}}$ — опора задачи (1), если невырождена матрица $P = (\bar{H}(t), t \in T_{\text{оп}})$; 2. Пара $\{u(\cdot), T_{\text{оп}}\}$ из допустимого управления $u(t)$, $t \in T$, и опоры $T_{\text{оп}}$ — опорное управление; 3. Опорное управление $\{u(\cdot), T_{\text{оп}}\}$ — невырожденное, если $|u(t+0) + u(t-0)|/2 < 1$, $t \in T_{\text{оп}}$.

Подсчитаем вектор потенциалов $v' = (v, v_{m+1})' = c'_{\text{оп}} P^{-1} = (c(t), t \in T_{\text{оп}})' P^{-1}$, и коуправление $\Delta(t) = (v'H - c')F(t^*, t)b$, $t \in T$.

Теорема 1. Для оптимальности опорного управления $\{u(\cdot), T_{\text{оп}}\}$ задачи (1) достаточно, а в случае его невырожденности и необходимо, чтобы выполнялись соотношения:

$$1) \Delta(t) \leq 0 \text{ при } u(t) = 1; \Delta(t) \geq 0 \text{ при } u(t) = -1;$$

$$\Delta(t) = 0 \text{ при } -1 < u(t) < 1, t \in T. \quad (2)$$

$$2) v_{m+1} \leq 0 (v_{m+1} \geq 0, \text{ если } d'x(t^*) \leq \alpha_0). \quad (3)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $\{u(\cdot), T_{\text{оп}}\}$ — опорное невырожденное оптимальное управление задачи (1). Доказательство соотношений (2) аналогично [1. С. 56].

Докажем неравенство (3). Предположим, что оно неверно, т. е. $v_{m+1} > 0$. Построим промежутки $T_j^* = [0, \varepsilon]$, если $t_j = 0$; $T_j^* = [t^* - \varepsilon, t^*]$, если $t_j = t^*$; $T_j^* = [t_j - \varepsilon/2, t_j + \varepsilon/2]$, если $0 < t_j < t^*$, $t_j \in T_{\text{оп}}$. Наряду с $u(t)$, $t \in T$, рассмотрим зависящее от параметра $\varepsilon > 0$ семейство функций $\bar{u}(t) = u(t_j) + v_j$, $t \in T_j^*$, $t_j \in T_{\text{оп}}$; $\bar{u}(t) = u(t)$, $t \in T \setminus \bigcup_{j=1}^{m+1} T_j^*$.

Исследуем уравнение

$$\bar{H}\Delta x(t^*) = \int_0^{t^*} \bar{H}(t)\Delta u(t)dt = (0, \dots, 0, \epsilon\alpha), \alpha \geq 0. \quad (4)$$

Обозначим $v_{оп} = (v_j, j = \overline{1, m+1})$. Тогда уравнение (4) примет вид: $\epsilon P v_{оп} + 0(\epsilon) = (0, \dots, 0, \epsilon\alpha)$. Оно в силу невырожденности матрицы P и теоремы о неявной функции при достаточно малых $\epsilon > 0, \alpha > 0$ имеет единственное решение

$$v_{оп} = P^{-1}(0, \dots, 0, \alpha) + 0(\epsilon)/\epsilon. \quad (5)$$

Согласно (4), построенная выше функция $\bar{u}(t), t \in T$, — допустимое управление задачи (1).

Приращение критерия качества на $\bar{u}(t), u(t), t \in T$, равно:

$$\Delta J(u) = c'\Delta x(t^*) = \int_0^{t^*} c(t)\Delta u(t)dt = \epsilon c'_{оп} v_{оп} + 0(\epsilon). \quad (6)$$

Подставив (5) в (6), получим $\Delta J(u) = \epsilon c'_{оп} P^{-1}(0, \dots, 0, \alpha) + 0(\epsilon) = \epsilon v_{m+1} \alpha + 0(\epsilon)$. Это число при $v_{m+1} > 0$ и достаточно малых $\epsilon > 0, \alpha > 0$ отрицательно, что противоречит оптимальности управления $u(t), t \in T$. Неравенство (3) доказано.

Достаточность. Пусть $\bar{u}(t) = u(t) + \Delta u(t), t \in T$, — любое допустимое управление задачи (1). Из формулы Коши [1] получим

$$\bar{H}\Delta x(t^*) = \int_0^{t^*} \bar{H}(t)\Delta u(t)dt = (0, \dots, 0, \alpha), \alpha \geq 0. \quad (7)$$

Аналогично для критерия качества

$$\Delta J(u) = c'\Delta x(t^*) = \int_0^{t^*} C(t)\Delta u(t)dt. \quad (8)$$

Вычтя $v' \times (7)$ из (8), получим формулу приращения критерия качества $\Delta J(u) = \int_0^{t^*} -\Delta(t)\Delta u(t)dt + v_{m+1}\alpha$.

Из соотношений (2) и (3) следует неравенство $\Delta J(u) \leq 0$, которое означает, что $u(t), t \in T$, — оптимальное управление задачи (1). Теорема 1 доказана.

2. Применим полученный в п. 1 результат к задаче оптимального управления с кусочно-линейным выходом:

$$J(u) = c'x(t^*) \rightarrow \max, \dot{x} = Ax + bu, x(0) = x_0, \\ Hx(t^*) + hf(d'x(t^*)) = g, |u(t)| \leq 1, t \in T. \quad (9)$$

Здесь непрерывная скалярная функция $f(\alpha), \alpha \in \mathbb{R}$, кусочно-линейна: $f(\alpha) = f^+\alpha + v^+, \alpha \geq \alpha_0; f(\alpha) = f^-\alpha + v^-, \alpha \leq \alpha_0, f^+, f^-, v^+, v^-, \alpha_0$ — заданные числа, $f^+\alpha_0 + v^+ = f^-\alpha_0 + v^-$.

Исследуем оптимальность допустимого управления $u(t), t \in T$, которому соответствует траектория $x(t), t \in T$, в конечный момент t^* попадающая на плоскость $d'x = \alpha_0$.

Опора и опорное управление для задачи (9) определяются, как и для (1) в п. 1. По опоре $T_{оп}$ задачи (9) подсчитаем вектор потенциалов $v' = (v, v_{m+1})' = c'_{оп} P^{-1}$ и коуправление $\Delta(t) = (v'\bar{H} - c')F(t^*, t)b, t \in T$.

С учетом терминального условия $Hx(t^*) + hf(d'x(t^*)) = g$ очевидно, что задача (9) эквивалентна следующим задачам:

$$c'x(t^*) \rightarrow \max, \dot{x} = Ax + bu, x(0) = x_0, \\ H^+x(t^*) = g^+, d'x(t^*) \geq \alpha_0, |u(t)| \leq 1, t \in T; \quad (10)$$

$$c'x(t^*) \rightarrow \max, \dot{x} = Ax + bu, x(0) = x_0, \\ H^-x(t^*) = g^-, d'x(t^*) \leq \alpha_0, |u(t)| \leq 1, t \in T, \quad (11)$$

где $H^+ = H + f^+hd'$, $H^- = H + f^-hd'$, $g^+ = g - v^+h$, $g^- = g - v^-h$.

В силу специальной структуры матриц H^+ , H^- можно доказать, что если $T_{\text{оп}}$ — опора задачи (9), то $T_{\text{оп}}$ — также опора задач (10), (11). При опоре $T_{\text{оп}}$ коуправления $\Delta^+(t)$, $\Delta^-(t)$, $t \in T$, для задач (10), (11) совпадают друг с другом и равны $\Delta(t)$, $t \in T$. Векторы потенциалов v^+ , v^- задач (10), (11) равны: $v^+ = (v^+, v_{m+1}^+) = (v, v_{m+1} - f^+ v' h)$, $v^- = (v^-, v_{m+1}^-) = (v, v_{m+1} - f^- v' h)$.

Тогда с учетом теоремы 1 нетрудно убедиться, что справедлива

Теорема 2. Для оптимальности опорного управления $\{u(\cdot), T_{\text{оп}}\}$ задачи (9) достаточно, а в случае его невырожденности и необходимо, чтобы выполнялись соотношения:

1) $\Delta(t) \leq 0$ при $u(t) = 1$; $\Delta(t) \geq 0$ при $u(t) = -1$; $\Delta(t) = 0$ при $-1 < u(t) < 1$, $t \in T$.

2) $f^- v' h \leq v_{m+1} \leq f^+ v' h$.

3. Исследуем задачу оптимального управления с кусочно-линейным критерием качества:

$$J(u) = c'x(t^*) + f(d'x(t^*)) \rightarrow \max,$$

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad x(0) = x_0, \quad Hx(t^*) = g, \quad |u(t)| \leq 1, \quad t \in T, \quad (12)$$

где непрерывная скалярная функция $f(\alpha)$, $\alpha \in R$, определяется, как в п. 2.

Пусть $u(t)$, $t \in T$, — допустимое управление задачи (12), которому соответствует траектория $x(t)$, $t \in T$, в конечный момент t^* попадающая на плоскость $d'x = \alpha_0$.

Опора и опорное управление для задачи (12) определяются так же, как в п. 1 для задачи (1). Обозначения $c_{\text{оп}}$, P , $v = (v, v_{m+1})$, $\bar{H}$, $\bar{H}(t)$, $c(t)$, $\Delta(t)$, $t \in T$, совпадает с п. 1.

Разобьем задачу (12) на следующие две задачи:

$$(c^+)'x(t^*) \rightarrow \max, \quad \dot{x} = Ax + bu, \quad x(0) = x_0,$$

$$Hx(t^*) = g, \quad d'x(t^*) \geq \alpha_0, \quad |u(t)| \leq 1, \quad t \in T; \quad (13)$$

$$(c^-)'x(t^*) \rightarrow \max, \quad \dot{x} = Ax + bu, \quad x(0) = x_0,$$

$$Hx(t^*) = g, \quad d'x(t^*) \leq \alpha_0, \quad |u(t)| \leq 1, \quad t \in T, \quad (14)$$

где $c^+ = c + f^+ d$, $c^- = c + f^- d$.

Обозначим: $D(t) = d'F(t^*, t)b$, $t \in T$, $D_{\text{оп}} = (D(t), t \in T_{\text{оп}})$, $\bar{\eta}' = (\eta, \eta_{m+1})' = D_{\text{оп}} P^{-1}$, $\Omega(t) = (\bar{\eta}' \bar{H} - d')F(t^*, t)b$, $t \in T$. Тогда векторы потенциалов v^+ , v^- для задач (13), (14) примут вид: $v^+ = (v^+, v_{m+1}^+) = (v + f^+ \eta, v_{m+1} + f^+ \eta_{m+1})$, $v^- = (v^-, v_{m+1}^-) = (v + f^- \eta, v_{m+1} + f^- \eta_{m+1})$.

Коуправления $\Delta^+(t)$, $\Delta^-(t)$, $t \in T$, для задач (13), (14) имеют вид: $\Delta^+(t) = \Delta(t) + f^+ \Omega(t)$, $\Delta^-(t) = \Delta(t) + f^- \Omega(t)$, $t \in T$.

Из приведенных выкладок и теоремы 1 следует

Теорема 3. Для оптимальности опорного управления $\{u(\cdot), T_{\text{оп}}\}$ задачи (12) достаточно, а в случае его невырожденности и необходимо, чтобы выполнялись соотношения:

- 1) $\Delta(t) + f^+ \Omega(t) \leq 0$, $\Delta(t) + f^- \Omega(t) \leq 0$ при $u(t) = 1$;
 $\Delta(t) + f^+ \Omega(t) \geq 0$, $\Delta(t) + f^- \Omega(t) \geq 0$ при $u(t) = -1$;
 $\Delta(t) + f^+ \Omega(t) = \Delta(t) + f^- \Omega(t) = 0$ при $-1 < u(t) < 1$, $t \in T$.
- 2) $-f^- \eta_{m+1} \leq v_{m+1} \leq -f^+ \eta_{m+1}$.