

Указанные построения необходимо проводить для любой вершины v_0 гиперграфа, поэтому общая трудоемкость проверки условий теоремы 1 будет $O(n^2(n+m+1))$.

Очевидна следующая

Теорема 2. Гиперграф H реализуется звездой тогда и только тогда, когда существует хотя бы одна вершина, инцидентная каждому гиперребру гиперграфа.

Работа выполнена при содействии Фонда фундаментальных исследований Республики Беларусь.

1. Баталов Б. В., Казенков Г. Г., Курнаев Ф. А., Щемилин В. М. Алгоритм взаимного размещения компонентов интегральных схем с минимальным числом внутрисхемных соединений. М., 1969. Вып. 3. С. 282.

2. Петренко А. И., Тетельбаум А. Я., Шранченко Б. Л. Автоматизация проектирования электронной аппаратуры (топологический подход). Киев, 1980. С. 170.

3. Van Cleemput W. M. Mathematical Models for the Circuits Layout Problem // IEEE Transaction on Circuits and Systems. 1976. V. CAS-23. № 12. P. 759.

4. Азаренок А. С., Сарванов В. И. О сложности планарной реализации гиперграфов // Вестн АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1987. № 4. С. 10.

5. Johnson D. S., Pollan H. O. Hypergraph Planarity and the Complexity of Drawing Venn Diagrams // Journ. Graph. Theory. 1987. V. 11. № 3. P. 309.

6. Gavril F. The Intersection Graphs of Subtrees in Trees are Exactly the Chordal Graphs // Journ. Combinatorial Theory. 1974. V. B. 16. Pt. 1.

7. Slater P. A. Characterization of SOFT Hypergraphs // Canad. Math. Bull. 1978. V. 21. № 3. P. 335.

8. Flament C. Hypergraphs Arbores // Diskete Mathematics. 1978. V. 21. № 3. P. 223.

9. Амбарян С. Л., Мовсесян А. А., Пилипосян Т. Э. О минимальных реализациях гиперграфов // Вопр. радиоэлектроники. Сер. ЭВТ. 1981. Вып. 16. С. 37.

10. Booth K. S., Lueker G. S. Testing for the Consecutive Ones Property, Interval Graphs and Graph Planarity Using PQ-Tree Algorithms // Journ. of Comp. and Syst. Sciences. 1976. V. 13. P. 335.

11. Левин А. Г., Мельников О. И. Ослабленное условие Хеллаи и планарность гиперграфа // Вестн АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1988. № 3. С. 12.

12. Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И. Лекции по теории графов. М., 1990.

Поступила в редакцию 16.06.93.

УДК 519.233.2

Д. В. СИНЬКЕВИЧ, Н. Н. ТРУШ

ВЫЧИСЛЕНИЕ МОМЕНТОВ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ АГРЕГИРОВАННЫХ ЧАСТОТ СОСТОЯНИЙ ОДНОРОДНОЙ МАРКОВСКОЙ ЦЕПИ ДЛЯ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ СХЕМЫ

The formulae for calculation of mathematical expectation of arbitrary number product of homogeneous Markovian chain state frequency is obtained taken in the same time moments under condition that each multiply degree is some natural number.

Пусть в каждый из T моментов времени имеются система из $N = N(t)$, $t = 1, \overline{T}$, микрообъектов, распределенных по r состояниям, и наблюдения $p_{j,t}$, $j = 1, \overline{r}$, $t = 1, \overline{T}$, являющиеся абсолютными частотами попадания микрообъектов в j -е состояние в момент времени t . Математической моделью эволюции каждого из N микрообъектов служит однородная, конечного числа состояний марковская цепь с одной и той же матрицей $P = (P_{ij})$, $i, j = 1, \overline{r}$, переходных вероятностей, причем все N марковские цепи независимы.

Пусть $q_{j,t}$, $j = 1, \overline{r}$, $t = 1, \overline{T}$, обозначает безусловную вероятность попадания микрообъекта в j -е состояние в момент времени t . Эта вероятность постоянна для каждого отдельного микрообъекта в данный момент времени и меняется с изменением t .

В работе [1] предложено рассматривать описанную вероятностную модель как полиномиальное распределение, и на этой основе построена оценка максимального правдоподобия $\hat{\rho}$ матрицы p . Для исследования асимптотических свойств оценки $\hat{\rho}$ в работе [2] получены достаточно общие формулы вычисления моментов высших порядков случайных

величин $p_{j,t}$, $j = \overline{1, r}$, $t = \overline{1, T}$. В статье даются обобщения результатов [2]. Предварительно докажем вспомогательную лемму.

Лемма 1. Для любых натуральных чисел m , k имеет место соотношение

$$m^k = \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{(i-1)!} (m-1)_{i-1} \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j C_{i-1}^j (i-j)^k,$$

где

$$(m-1)_{(i-1)} = \begin{cases} (m-1)(m-2) \dots (m-1-(i-2)) = \frac{(m-1)!}{(m-i)!}, & i \leq m; \\ 0, & i > m. \end{cases}$$

Доказательство. Его проведем методом математической индукции по k .

1. Для $k=1$ имеем верное равенство. Действительно,

$$\sum_{i=1}^2 \frac{1}{(i-1)!} (m-1)_{(i-1)} \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j C_{i-1}^j (i-j) = 1 + (m-1) = m.$$

2. Предположим верность утверждения для $k=s-1$, т. е.

$$\begin{aligned} m^{s-1} &= 1 + \frac{1}{1!} (2^{s-1} - 1) (m-1) + \frac{1}{2!} (3^{s-1} - 2 \cdot 2^{s-1} + 1) (m-1)_2 + \\ &\quad + \frac{1}{3!} (4^{s-1} - 3 \cdot 3^{s-1} + 3 \cdot 2^{s-1} - 1) (m-1)_3 + \dots + \\ &+ \frac{1}{(s-1)!} (C_{s-1}^0 s^{s-1} - C_{s-1}^1 (s-1)^{s-1} + \dots + (-1)^{s-1} C_{s-1}^{s-1}) (m-1)_{(s-1)}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь целесообразно отметить, что

$$\begin{aligned} C_{s-1}^0 s^{s-1} - C_{s-1}^1 (s-1)^{s-1} + C_{s-1}^2 (s-2)^{s-1} + \dots + \\ + (-1)^{s-1} C_{s-1}^{s-1} = (s-1)! \end{aligned} \quad (2)$$

Этот результат можно найти в [3] или непосредственно доказать, также используя метод математической индукции.

3. Докажем верность утверждения леммы 1 для $k=s$. Используя равенство (1), будем иметь:

$$\begin{aligned} m^s &= m \cdot m^{s-1} = (m-1+1) + \frac{1}{1!} (2^{s-1} - 1) (m-1) (m-2+2) + \\ &\quad + \frac{1}{2!} (3^{s-1} - 2 \cdot 2^{s-1} + 1) (m-1) (m-2) (m-3+3) + \dots + \\ &\quad + \frac{1}{(s-2)!} (C_{s-2}^0 (s-1)^{s-1} - C_{s-2}^1 (s-2)^{s-1} + \dots + (-1)^{s-2} C_{s-2}^{s-2}) \times \\ &\quad \times (m-1) \dots (m-s+2) (m-(s-1) + (s-1)) + \frac{1}{(s-1)!} \times \\ &\quad \times (C_{s-1}^0 s^{s-1} - C_{s-1}^1 (s-1)^{s-1} + C_{s-2}^2 (s-2)^{s-1} + \dots + (-1)^{s-1} C_{s-1}^{s-1}) \times \\ &\quad \times (m-1) \dots (m-s+1) (m-s+s). \end{aligned} \quad (3)$$

Производя несложную группировку слагаемых в правой части (3) и учитывая, что

$$(C_l^i (l+1) - (l+2) C_{l+1}^{i+1}) (l-i+1)^n = -C_{l+1}^{i+1} (l-i+1)^{n+1},$$

где l, i, n — произвольные натуральные числа, $l \geq i$, получим:

$$\begin{aligned} m^s &= 1 + \frac{1}{1!} (2^s - 1) (m-1) + \frac{1}{2!} (3^s - 2 \cdot 2^s + 1) (m-1)_2 + \\ &\quad + \frac{1}{3!} (4^s - 3 \cdot 3^s + 3 \cdot 2^s - 1) (m-1)_3 + \dots + \frac{1}{(s-1)!} \times \\ &\quad \times (C_{s-1}^0 s^s - C_{s-1}^1 (s-1)^s + C_{s-1}^2 (s-2)^s + \dots + (-1)^{s-1} C_{s-1}^{s-1}) \times \end{aligned}$$

$$\times (m-1)_{(s-1)} + \frac{1}{(s-1)!} (C_{s-1}^0 s^{s-1} - C_{s-1}^1 (s-1)^{s-1} + C_{s-1}^2 (s-2)^{s-1} + \dots + (-1)^{s-1} C_{s-1}^{s-1}) (m-1)_s. \quad (4)$$

На основании соотношения (2) имеем:

$$\frac{1}{(s-1)!} (C_{s-1}^0 s^{s-1} - C_{s-1}^1 (s-1)^{s-1} + C_{s-1}^2 (s-2)^{s-1} + \dots + (-1)^{s-1} C_{s-1}^{s-1}) = \\ = \frac{1}{s!} (C_s^0 (s+1)^s - C_s^1 s^s + C_s^2 (s-1)^s + \dots + (-1)^s C_s^s).$$

Подставляя последний результат в правую часть соотношения (4), получим утверждение леммы 1. Лемма 1 доказана. Используя полученный результат, докажем теорему.

Теорема 1. Для любых $i = \overline{1, r}$, $t = \overline{1, T}$, натурального k имеет место равенство:

$$E(n_{i,t}^k) = \sum_{s=1}^{\min(k, N)} (N)_s \frac{1}{(s-1)!} q_{i,t}^s \sum_{v=0}^{s-1} (-1)^v C_{s-1}^v (s-v)^{k-1}.$$

Доказательство. В предположениях полиномиальной схемы имеем:

$$E(n_{i,t}^k) = \sum_{n_{i,t} > 0} n_{i,t}^k \frac{N!}{n_{i,t}! (N - n_{i,t})!} q_{i,t}^{n_{i,t}} (1 - q_{i,t})^{N - n_{i,t}}, \quad i = \overline{1, r}, \quad t = \overline{1, T}.$$

Откуда следует другое равносильное соотношение

$$E(n_{i,t}^k) = \sum_{n_{i,t} \geq 1} n_{i,t}^{k-1} \frac{N!}{(n_{i,t} - 1)! (N - n_{i,t})!} q_{i,t}^{n_{i,t}} (1 - q_{i,t})^{N - n_{i,t}}, \\ i = \overline{1, r}, \quad t = \overline{1, T}.$$

Для дальнейшего преобразования правой части последнего равенства, воспользовавшись леммой 1, получим:

$$E(n_{i,t}^k) = N q_{i,t} \sum_{n_{i,t} \geq 1} \frac{(N-1)!}{(n_{i,t} - 1)! (N - n_{i,t})!} q_{i,t}^{n_{i,t}-1} (1 - q_{i,t})^{N - n_{i,t}} \times \\ \times \sum_{s=1}^k \sum_{v=0}^{s-1} (-1)^v C_{s-1}^v (s-v)^{k-1} \frac{1}{(s-1)!} (n_{i,t} - 1)_{s-1}, \quad i = \overline{1, r}, \quad t = \overline{1, T}. \quad (5)$$

Перегруппировав слагаемые в правой части соотношения (5), будем иметь:

$$E(n_{i,t}^k) = \sum_{s=1}^k \sum_{v=0}^{s-1} (N)_s q_{i,t}^s \frac{(-1)^v C_{s-1}^v (s-v)^{k-1}}{(s-1)!} \times \\ \times \sum_{n_{i,t} \geq s} \frac{(N-s)!}{(n_{i,t} - s)! (N - s - (n_{i,t} - s))!} q_{i,t}^{n_{i,t}-s} (1 - q_{i,t})^{(N-s) - (n_{i,t} - s)} = \\ = \sum_{s=1}^k \sum_{v=0}^{s-1} (N)_s q_{i,t}^s \frac{(-1)^v C_{s-1}^v (s-v)^{k-1}}{(s-1)!} (q_{i,t} + 1 - q_{i,t})^{N-s} = \\ = \sum_{s=1}^k \sum_{v=0}^{s-1} (N)_s q_{i,t}^s \frac{(-1)^v C_{s-1}^v (s-v)^{k-1}}{(s-1)!}, \quad i = \overline{1, r}, \quad t = \overline{1, T}.$$

Причем при $k > N$ имеем, что $(N)_s = 0$ для всех s из интервала $(N, k]$. Теорема 1 доказана.

На основании этой теоремы докажем верность более общего утверждения.

Пусть $j = j(1, 2, \dots, r)$ — произвольная перестановка индексов $(1, 2, \dots, r)$; $j(i), i = \overline{1, 1} - 1$ первых членов этой перестановки, $l = \overline{1, r}$; $k(i), i = \overline{1, 1}$ — 1 произвольных натуральных чисел. Тогда справедливо утверждение.

Теорема 2. Для любых $t = \overline{1, T}$; $j(i), i = \overline{1, 1}$; $k(i), i = \overline{1, 1}$, $l \leq r$ имеет место равенство:

$$E \left(\prod_{i=1}^1 n_{j(i),t}^{k(i)} \right) = \sum_{s(i)=1}^{k(i)} \sum_{v(i)=0}^{s(i)-1} \left(\prod_{i=1}^1 (-1)^{v(i)} \times \right. \\ \left. \times C_{s(i)-1}^{v(i)} (s(i) - v(i))^{k(i)-1} \frac{1}{(s(i)-1)!} q_{j(i),t}^{s(i)} \right) (N) \sum_{i=1}^1 s(i).$$

Доказательство. По определению математического ожидания имеем в предположениях полиномиальной схемы, что

$$E \left(\prod_{i=1}^1 n_{j(i),t}^{k(i)} \right) = \sum_{\substack{n_{j(i),t} > 0 \\ i = \overline{1, 1}}} \left(\prod_{i=1}^1 n_{j(i),t}^{k(i)} \right) \frac{N!}{\left(\prod_{i=1}^1 n_{j(i),t}! \right) \left(N - \sum_{i=1}^1 n_{j(i),t} \right)!} \times \\ \times \left(\prod_{i=1}^1 q_{j(i),t}^{n_{j(i),t}} \right) \left(1 - \sum_{i=1}^1 q_{j(i),t} \right)^{N - \sum_{i=1}^1 n_{j(i),t}}, \quad t = \overline{1, T}.$$

Откуда следует другое равносильное соотношение:

$$E \left(\prod_{i=1}^1 n_{j(i),t}^{k(i)} \right) = \sum_{\substack{n_{j(i),t} > 0 \\ t = \overline{1, T}}} \left(\prod_{i=2}^1 n_{j(i),t}^{k(i)} \right) \frac{N!}{\left(\prod_{i=2}^1 n_{j(i),t}! \right) \left(N - \sum_{i=2}^1 n_{j(i),t} \right)!} \times \\ \times \left(\prod_{i=2}^1 q_{j(i),t}^{n_{j(i),t}} \right) \left[\sum_{n_{j(1),t} > 0} n_{j(1),t}^{k(1)} \frac{1}{n_{j(1),t}! \left(\left(N - \sum_{i=2}^1 n_{j(i),t} \right) - n_{j(1),t} \right)!} \times \right. \\ \left. \times q_{j(1),t}^{n_{j(1),t}} \left(\left(1 - \sum_{i=2}^1 q_{j(i),t} \right) - q_{j(1),t} \right)^{N - \sum_{i=2}^1 n_{j(i),t} - n_{j(1),t}} \right], \quad t = \overline{1, T}. \quad (6)$$

Для дальнейшего преобразования выражения, стоящего в квадратных скобках в правой части (6), применим теорему 1 с соответствующей заменой N на $\left(N - \sum_{i=2}^1 n_{j(i),t} \right)$. Получим

$$\sum_{n_{j(1),t} > 0} n_{j(1),t}^{k(1)} \frac{\left(N - \sum_{i=2}^1 n_{j(i),t} \right)!}{n_{j(1),t}! \left(\left(N - \sum_{i=2}^1 n_{j(i),t} \right) - n_{j(1),t} \right)!} q_{j(1),t}^{n_{j(1),t}} \times \\ \times \left(\left(1 - \sum_{i=2}^1 q_{j(i),t} \right) - q_{j(1),t} \right)^{N - \sum_{i=2}^1 n_{j(i),t} - n_{j(1),t}} = \\ = \sum_{s(1)=1}^{k(1)} \sum_{v(1)=0}^{s(1)-1} \frac{(-1)^{v(1)} C_{s(1)-1}^{v(1)} (s(1) - v(1))^{k(1)-1}}{(s(1)-1)!} q_{j(1),t}^{s(1)} \times$$

$$\times \left(1 - \sum_{i=2}^1 q_{j(i),t} \right)^{N - \sum_{i=2}^1 n_{j(i),t} - s(1)} \left(N - \sum_{i=2}^1 n_{j(i),t} \right)_{s(1)}. \quad (7)$$

Подставляя правую часть соотношения (7) в (6), получим

$$\begin{aligned} E \left(\prod_{i=1}^k n_{j(i),t}^{k(i)} \right) &= \sum_{s(1)=1}^{k(1)} \sum_{v(1)=0}^{s(1)-1} (-1)^{v(1)} \times \\ &\times C_{s(1)-1}^{v(1)} (s(1) - v(1))^{k(1)-1} \frac{1}{(s(1)-1)!} q_{j(1),t}^{s(1)} \times \\ &\times \sum_{\substack{n_{j(i),t} \geq 0 \\ i=2,1}} \left(\prod_{i=2}^1 n_{j(i),t}^{k(i)} \right) \frac{N!}{\left(\prod_{i=2}^1 n_{j(i),t}! \right) \left(N - \sum_{i=2}^1 n_{j(i),t} \right)!} \left(N - \sum_{i=2}^1 n_{j(i),t} \right)_{s(1)} \times \\ &\times \left(\prod_{i=2}^1 q_{j(i),t}^{n_{j(i),t}} \right) \left(1 - \sum_{i=2}^1 q_{j(i),t} \right)^{N - \sum_{i=2}^1 n_{j(i),t} - s(1)}, \quad t = \overline{1, T}. \end{aligned} \quad (8)$$

Так как

$$\frac{\left(N - \sum_{i=2}^1 n_{j(i),t} \right)_{s(1)}}{\left(N - \sum_{i=2}^1 n_{j(i),t} \right)!} = \frac{1}{\left(N - s(1) - \sum_{i=2}^1 n_{j(i),t} \right)!},$$

то соотношение (8) равносильно следующему:

$$\begin{aligned} E \left(\prod_{i=1}^k n_{j(i),t}^{k(i)} \right) &= \sum_{s(1)=1}^{k(1)} \sum_{v(1)=0}^{s(1)-1} (-1)^{v(1)} \times \\ &\times C_{s(1)-1}^{v(1)} (s(1) - v(1))^{k(1)-1} \frac{1}{(s(1)-1)!} q_{j(1),t}^{s(1)} \times \\ &\times (N)_{s(1)} \left[\sum_{\substack{n_{j(i),t} \geq 0 \\ i=2,1}} \left(\prod_{i=2}^1 n_{j(i),t}^{k(i)} \right) \frac{(N - s(1))!}{\left(\prod_{i=2}^1 n_{j(i),t}! \right) \left(N - s(1) - \sum_{i=2}^1 n_{j(i),t} \right)!} \times \right. \\ &\times \left. \left(\prod_{i=2}^1 q_{j(i),t}^{n_{j(i),t}} \right) \left(1 - \sum_{i=2}^1 q_{j(i),t} \right)^{N - \sum_{i=2}^1 n_{j(i),t} - s(1)} \right], \quad t = \overline{1, T}. \end{aligned} \quad (9)$$

Для дальнейшего преобразования выражения, стоящего в квадратных скобках в правой части (9), выполним действия, аналогичные (6) — (8). Получим

$$\begin{aligned} E \left(\prod_{i=1}^k n_{j(i),t}^{k(i)} \right) &= \sum_{s(1)=1}^{k(1)} \sum_{v(1)=0}^{s(1)-1} \sum_{s(2)=1}^{k(2)} \sum_{v(2)=0}^{s(2)-1} (-1)^{v(1)} \times \\ &\times C_{s(1)-1}^{v(1)} (s(1) - v(1))^{k(1)-1} \frac{1}{(s(1)-1)!} q_{j(1),t}^{s(1)} (N)_{s(1)} \times \\ &\times (-1)^{v(2)} C_{s(2)-1}^{v(2)} (s(2) - v(2))^{k(2)-1} \frac{1}{(s(2)-1)!} q_{j(2),t}^{s(2)} (N - s(1))_{s(2)} \times \end{aligned}$$

$$\times \left[\sum_{\substack{n_j(i), t > 0 \\ i=3, 1}} \left(\prod_{i=3}^1 n_j^{k(i)}(i), t \right) \frac{(N - s(1) - s(2))!}{\left(\prod_{i=3}^1 n_j(i), t! \right) \left(N - s(1) - s(2) - \sum_{i=3}^1 n_j(i), t \right)!} \times \right. \\ \left. \times \left(\prod_{i=3}^1 q_j^{n_j(i), t}(i), t \right) \left(1 - \sum_{i=3}^1 q_j(i), t \right)^{N - s(1) - s(2) - \sum_{i=3}^1 n_j(i), t} \right], \quad t = \overline{1, T}. \quad (10)$$

Так как $(N)_{s(1)}(N - s(1))_{s(2)} = (N)_{s(1) + s(2)}$, то последнее соотношение равносильно следующему:

$$E \left(\prod_{i=1}^1 n_j^{k(i)}(i), t \right) = \sum_{\substack{s(i)=1 \\ i=1, 2}}^{k(i)} \sum_{\substack{v(i)=0 \\ i=1, 2}}^{s(i)-1} \left(\prod_{i=1}^2 (-1)^{v(i)} \times \right. \\ \times C_{s(i)-1}^{v(i)} (s(i) - v(i))^{k(i)-1} \frac{1}{(s(i)-1)!} q_j^{s(i)}(i), t (N) \sum_{i=1}^2 s(i) \times \\ \times \left[\sum_{n_j(i), t > 0} \left(\prod_{i=3}^1 n_j^{k(i)}(i), t \right) \frac{(N - s(1) - s(2))!}{\left(\prod_{i=3}^1 n_j(i), t! \right) \left(N - s(1) - s(2) - \sum_{i=3}^1 n_j(i), t \right)!} \times \right. \\ \left. \times \left(\prod_{i=3}^1 q_j^{n_j(i), t}(i), t \right) \left(1 - \sum_{i=3}^1 q_j(i), t \right)^{N - s(1) - s(2) - \sum_{i=3}^1 n_j(i), t} \right], \quad t = \overline{1, T}. \quad (11)$$

Повторяя действия, аналогичные (6)–(11), еще (1–2) раза, получим

$$E \left(\prod_{i=1}^1 n_j^{k(i)}(i), t \right) = \sum_{\substack{s(i)=1 \\ i=1, 1}}^{k(i)} \sum_{\substack{v(i)=0 \\ i=1, 1}}^{s(i)-1} \left(\prod_{i=1}^1 (-1)^{v(i)} \times \right. \\ \times C_{s(i)-1}^{v(i)} (s(i) - v(i))^{k(i)-1} \frac{1}{(s(i)-1)!} q_j^{s(i)}(i), t (N) \sum_{i=1}^1 s(i) \times \\ \times \sum_{n_j(i), t > s(1)} \frac{(N - \sum_{i=1}^1 s(i))}{(n_j(k), t - s(1))! \left(N - \sum_{i=1}^1 s(i) - (n_j(1), t - s(1)) \right)!} q_j^{n_j(i), t - s(1)}(i), t \times \\ \times (1 - q_j(1), t)^{(N - \sum_{i=1}^1 s(i)) - (n_j(1), t - s(1))} = \\ = \sum_{\substack{s(i)=1 \\ i=1, 1}}^{k(i)} \sum_{\substack{v(i)=0 \\ i=1, 1}}^{s(i)-1} \left(\prod_{i=1}^1 (-1)^{v(i)} \times \right. \\ \times C_{s(i)-1}^{v(i)} (s(i) - v(i))^{k(i)-1} \frac{1}{(s(i)-1)!} q_j^{s(i)}(i), t \times \\ \times (N) \sum_{i=1}^1 s(i) (q_j(1), t + 1 - q_j(1), t)^{N - \sum_{i=1}^1 s(i)}, \quad t = \overline{1, T}.$$

Откуда непосредственно следует утверждение теоремы 2. Теорема 2 доказана. Здесь также отметим, что при $\sum_{i=1}^1 s(i) > N$ имеет место равенство:

$$(N) \sum_{i=1}^1 s_{(i)} = 0.$$

1. Ли Ц., Джадж Д., Зельнер А. Оценивание параметров марковских моделей по агрегированным временным рядам. М., 1977.

2. Синькевич Д. В., Труш Н. Н. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1992. № 2.

3. Феллер Ф. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М., 1984.

Поступила в редакцию 11.01.93.

УДК 517.929

ГАО СЮЭДУН (КНР)

РЕШЕНИЕ ДВУХ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Necessary and sufficient conditions of optimality of a support control are proved for optimal control problems with piecewise linear output and piecewise linear cost function.

1. Рассмотрим задачу оптимального управления:

$$J(u) = c'x(t^*) \rightarrow \max, \quad \dot{x} = Ax + bu, \quad x(0) = x_0,$$

$$Hx(t^*) = g, \quad d'x(t^*) \geq \alpha_0 (\leq \alpha_0), \quad |u(t)| \leq 1, \quad t \in T = [0, t^*], \quad (1)$$

$$(x \in R^n, u \in R, A \in R^{n \times n}, b, c, d \in R^n, H \in R^{m \times n}, g \in R^m, \alpha_0 \in R, m < n).$$

Допустимое и оптимальное управления определяются стандартно [1. С. 11].

Пусть $u(t)$, $t \in T$, — допустимое управление задачи (1). Исследуем случай, когда допустимая траектория $x(t)$, $t \in T$, попадает на плоскость $d'x = \alpha_0$ в конечный момент t^* .

Обозначим: $F(t, \tau)$, $\tau \in [0, t]$, — фундаментальная матрица решений уравнения $\dot{x} = Ax$; $\bar{H}' = (H', d)$, $\bar{H}(t) = \bar{H}'F(t^*, t)b$, $c(t) = c'F(t^*, t)b$, $t \in T$.

Пусть $T_{\text{оп}} = \{t_1, t_2, \dots, t_m, t_{m+1}\} \subset T$ — совокупность из $m+1$ изолированного момента.

Определение 1. Множество $T_{\text{оп}}$ — опора задачи (1), если невырождена матрица $P = (\bar{H}(t), t \in T_{\text{оп}})$; 2. Пара $\{u(\cdot), T_{\text{оп}}\}$ из допустимого управления $u(t)$, $t \in T$, и опоры $T_{\text{оп}}$ — опорное управление; 3. Опорное управление $\{u(\cdot), T_{\text{оп}}\}$ — невырожденное, если $|u(t+0) + u(t-0)|/2 < 1$, $t \in T_{\text{оп}}$.

Подсчитаем вектор потенциалов $v' = (v, v_{m+1})' = c'_{\text{оп}} P^{-1} = (c(t), t \in T_{\text{оп}})' P^{-1}$, и коуправление $\Delta(t) = (v'H - c')F(t^*, t)b$, $t \in T$.

Теорема 1. Для оптимальности опорного управления $\{u(\cdot), T_{\text{оп}}\}$ задачи (1) достаточно, а в случае его невырожденности и необходимо, чтобы выполнялись соотношения:

$$1) \Delta(t) \leq 0 \text{ при } u(t) = 1; \Delta(t) \geq 0 \text{ при } u(t) = -1;$$

$$\Delta(t) = 0 \text{ при } -1 < u(t) < 1, t \in T. \quad (2)$$

$$2) v_{m+1} \leq 0 (v_{m+1} \geq 0, \text{ если } d'x(t^*) \leq \alpha_0). \quad (3)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $\{u(\cdot), T_{\text{оп}}\}$ — опорное невырожденное оптимальное управление задачи (1). Доказательство соотношений (2) аналогично [1. С. 56].

Докажем неравенство (3). Предположим, что оно неверно, т. е. $v_{m+1} > 0$. Построим промежутки $T_j^* = [0, \varepsilon]$, если $t_j = 0$; $T_j^* = [t^* - \varepsilon, t^*]$, если $t_j = t^*$; $T_j^* = [t_j - \varepsilon/2, t_j + \varepsilon/2]$, если $0 < t_j < t^*$, $t_j \in T_{\text{оп}}$. Наряду с $u(t)$, $t \in T$, рассмотрим зависящее от параметра $\varepsilon > 0$ семейство функций $\bar{u}(t) = u(t_j) + v_j$, $t \in T_j^*$, $t_j \in T_{\text{оп}}$; $\bar{u}(t) = u(t)$, $t \in T \setminus \bigcup_{j=1}^{m+1} T_j^*$.

Исследуем уравнение