В случае, когда $O(0, 0)$ является центром для системы (3), мы имеем аналогичную теорему (тогда в системе $a_1 = 0$).

Теорема 2. Для системы (3) всегда имеет место частная изохронность центра n-го порядка. Необходимое же и достаточное условия того, чтобы для системы (3) имела место частная изохронность центра порядка 2n, состоит в выполнении одного из следующих условий:

1. $B_{kn} = b_{kn+1}b_1 - \sum_{j=1}^{k-1} B_{kn}^{jn} / b_1^2 = 0$ при k нечетных (в этом случае $\varphi_0 = \pi/2n;\ 3\pi/2n$);

2. $b_{kn+1} \neq 0$ и

$$a_{kn+1} \sum_{j=0}^{[k/2]} (-1)^j C_k^{2j} b_{n+1}^{k-2j} a_{n+1}^{2j} = b_{kn+1} \sum_{j=0}^{[k/2]} (-1)^j C_k^{2j+1} b_{n+1}^{k-2j-1} a_{n+1}^{2j+1}$$

при k нечетных (в этом случае

$$\varphi_0 = \operatorname{arctg}(A_n^0 / B_n^0)/n;\ [\operatorname{arctg}(A_n^0 / B_n^0) + \pi]/n).$$

Основываясь на свойствах коэффициентов A_{kn}, B_{kn} функций $\omega_{kn}(\varphi)$, можно доказать следующие теоремы.

Теорема 3. Для того чтобы для системы (3) в случае фокуса имела место частная изохронность n-го (а также 2n-го) порядка, достаточно, чтобы выполнялась одна из следующих двух серий условий:

1) $B_{kn}^0 = 0$ при k нечетных, а $A_{kn}^0 = 0$ при k четных; (в этом случае $\varphi_0 = \pi/2n$; $3\pi/2n$);

2) $A_{kn}^0 = 0$ при всех k (в этом случае $\varphi_0 = 0;\ \pi/n$).

Теорема 4. Для того чтобы в случае центра для системы (3) имела место частная изохронность порядка 2n, достаточно, чтобы выполнялась одна из следующих двух серий условий:

1) $b_{kn+1} = 0$ при k нечетных, а $a_{kn+1} = 0$ при k четных (в этом случае $\varphi_0 = \pi/2n;\ 3\pi/2n$);

2) $a_{kn+1} = 0$ при всех k (в этом случае $\varphi_0 = 0;\ \pi/n$).

1. Амелькин В. В., Чинь Зань Данг. Об изохронности системыКоши — Римана в случае фокуса // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1993. № 1. С. 28.

2. Амелькин В. В., Лукашевич Н. А., Садовский А. П. Нелинейные колебания в системах второго порядка. Мн., 1982.

Поступила в редакцию 24.09.93.

УДК 519.1

О. И. МЕЛЬНИКОВ, Г. А. КОРНЕЛЮК, Л. А. КЛИМОВА

РЕАЛИЗАЦИЯ ГИПЕРГРАФОВ ГРАФАМИ, ГОМЕОМОРФНЫМИ ЗВЕЗДЕ

The necessary and sufficient conditions of realizations of hypergraphs by graphs which are gomeomorfic to the star are under consideration now. The polinomial algorithm of the examination of these conditions is given.

Пусть задан гиперграф $H = (V, E)$. Реализацией гиперграфа H называется любой граф G, удовлетворяющий следующим условиям: 1) $VG = VH$; 2) любое ребро графа G содержится в некотором гиперребре гиперграфа H; 3) для любого ребра $e \in E$ порожденный подграф $G(e)$ является связным.

Необходимость построения реализаций с различными свойствами появляется при решении целого ряда практических вопросов, в частности при автоматизации проектирования радиоэлектронной аппаратуры возникает задача построения планарных реализаций [1—3]. Но эта задача является NP-полной [4, 5]. В связи с этим возникает вопрос о выделении таких классов гиперграфов, для которых задача полиноминально разрешима. Наибольшее внимание исследователей привлекла возможность реализации гиперграфа деревом [6—8]. В [9] предложен алгоритм решения этой задачи, который имеет временную сложность $O(n^2m)$. Алгоритм реализации гиперграфа цепью временной сложности $O(n+m+l)$ рассмотрен в [10]. В этих алгоритмах $n = |V|$, $m = |E|$, $l = \sum_{e \in E} |e|$. Предложены [11] достаточные условия реализации гиперграфа планарным графом.

В настоящей статье рассматриваются необходимые и достаточные условия реализации гиперграфа графом, гомеоморфным звезде. Используемая автором терминология соответствует [12].

Введем следующие обозначения. Пусть v_0—некоторая вершина гиперграфа H, $E(v_0)$—множество гиперребер, содержащих вершину v_0. Пусть $H(v_0) = H \setminus E(v_0)$, а $H_i(v_0)$, $i = \overline{1, s}$ —связные компоненты гиперграфа $H(v_0)$. Рассмотрим какую-нибудь связную компоненту $H_i(v_0) = (V_i(v_0), E_i(v_0))$. $E_i(v_0) = \{E_1^i(v_0), ..., E_p^i(v_0)\}$ — множество гиперребер этой компоненты. Обозначим через $\tilde{E}^i_j(v_0)$, $j = \overline{1, p}$ гиперребро, получающееся при пересечении гиперребра $E^i_j(v_0)$ с множеством вершин, принадлежащих множеству $E(v_0)$, а через $\tilde{E}_i(v_0)$ — множество таких гиперребер. Пусть $V^i = \{v^i_1, v^i_2, ..., v^i_t\}$ — множество вершин гиперграфа $H_i(v_0)$, являющихся вершинами какого-либо ребра из $E(v_0)$. Введем новую вершину u_i и построим гиперграф

$$H_{ij}(v_0) = (V_{ij}, E_{ij}),\ V_{ij} = V_i(v_0) \cup u_i,\ E_{ij} = E_i(v_0) \cup \tilde{E}_i(v_0) \cup \{v^i_j, u_i\}.$$

Теорема 1. Древовидный гиперграф H реализуется графом, гомеоморфным звезде, тогда и только тогда, когда существует такая вершина v_0, что для каждого гиперграфа $H_i(v_0)$ $(i = \overline{1, s})$ найдется такая вершина v^i_j, что гиперграф $H_{ij}(v_0)$ реализуется цепью.

Доказательство. Необходимость очевидна.

Достаточность. Реализуем гиперграфы $H_{ij}(v_0)$ цепями. Так как степень вершины u_i в этих гиперграфах равна 1 и ребро, содержащее вершину u_i, имеет ровно две вершины, то эта вершина будет концевой вершиной цепи. Удалим ребро $u_i v^i_j$ из полученных цепей и соединим ребрами вершину v_0 с вершинами v^i_j. Если какие-либо вершины гиперграфа остались изолированными в построенном графе (это могут быть только вершины из $E(v_0)$, соединим их с вершиной v_0. Из древовидности исходного гиперграфа следует, что полученный граф гомеоморфен звезде. Осталось показать, что каждое ребро гиперграфа реализовано связным графом. Для гиперребер, не содержащих v_0, это следует из реализации таких ребер цепью. Пусть E — некоторое гиперребро, содержащее v_0. Покажем, что любые две вершины этого гиперребра соединяет цепь, содержащая только вершины этого гиперребра.

Случай 1. Пусть $L = (a, ..., w, ..., b)$ — цепь, соединяющая вершины a и b, принадлежащие гиперребру E, вершина $w \notin E$ и $v_0 \notin L$.

Случай 1а. Вершины a и b не принадлежат никакому гиперребру, не входящему в $E(v_0)$. Из построения реализации следует, что существует такая последовательность гиперребер $E_1, E_2, ..., E_p$, что $a \in E_1$, $b \in E_p$, $E_i \cap E_{i+1} \neq \phi$, $i = \overline{1, p-1}$, $a, b \in E$, т. е. исходный гиперграф не древовидный.

Случай 1б. Вершины a и b принадлежат некоторому гиперребру E_1, не входящему в $E(v_0)$. В этом случае в граф $H_{ij}(v_0)$ входит гиперребро $\tilde{E}_1$, получающееся при пересечении гиперребра E_1 с множеством вершин, принадлежащих множеству $E(v_0)$. Это гиперребро по условию реализуется цепью. Отсюда следует, что случай 1*б* невозможен.

Случай 2. Пусть $L = (a, ..., v_0, v^i_j, ..., w, ..., b)$ — цепь, соединяющая вершины a и b, принадлежащие гиперребру E, а вершина $w \notin E$.

Случай 2а. $w = v^i_j$. Рассуждаем так же, как и в случае 1*а*.

Случай 2б. $w \neq v^i_j$. Если вершины w и b не принадлежат никакому гиперребру, не входящему в $E(v_0)$, то рассуждаем, как в случае 1*а* . Если же они принадлежат какому-либо гиперребру $E_1 \notin E(v_0)$, то рассуждаем, как в случае 1*б*.

Теорема доказана.

Оценим трудоемкость проверки условий теоремы *1*. Проверка гиперграфа на древовидность требует $O(n^2m)$ операций [9]. Гиперграфы $H_i(v_0)$ и множество $\tilde{E}_i(v_0)$ можно построить за $O(nm)$, поэтому такую же трудоемкость имеет и процедура построения всех гиперграфов $H_{ij}(v_0) \setminus u_i$. Проверка возможности реализации всех таких гиперграфов цепями производится за $O(n + m + l)$ [10], а так как гиперграф $H_{ij}(v_0)$ получается из $H_{ij}(v_0) \setminus u_i$ добавлением ребра $u_i v^i_j$, то проверка возможности реализации всех гиперграфов $H_{ij}(v_0)$ цепями требует $O(n(n + m + l))$ операций.

Указанные построения необходимо проводить для любой вершины v_0 гиперграфа, поэтому общая трудоемкость проверки условий теоремы *1* будет $O(n^2(n+m+1))$.

Очевидна следующая

Теорема 2. Гиперграф H реализуется звездой тогда и только тогда, когда существует хотя бы одна вершина, инцидентная каждому гиперребру гиперграфа.

Работа выполнена при содействии Фонда фундаментальных исследований Республики Беларусь.

1. Баталов Б. В., Казенков Г. Г., Курнаев Ф. А., Щемилин В. М. Алгоритм взаимного размещения компонентов интегральных схем с минимальным числом внутрисхемных соединений. М., 1969. Вып. 3. С. 282.

2. Петренко А. И., Тетельбаум А. Я., Шранченко Б. Л. Автоматизация проектирования электронной аппаратуры (топологический подход). Киев, 1980. С. 170.

3. VanCleemput W. M. Mathematical Models for the Circuits Layout Problem// IEEE Transaction on Circuits and Systems. 1976. V. CAS-23. № 12. P. 759.

4. Азаренок А. С., Сарванов В. И. О сложности планарной реализации гиперграфов // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1987. № 4. С. 10.

5. Johnson D. S., Pollan H. O. Hypergraph Planarity and the Complexity of Drawing Venn Diagrams // Journ. Graph. Theory. 1987. V. 11. № 3. P. 309.

6. Gavril F. The Intersection Graphs of Subtrees in Trees are Exactly the Chordal Graphs // Journ. Combinatorial Theory. 1974. V. B. 16. Pt. 1.

7. Slater P. A. Characterization of SOFT Hypergraphs // Canad. Math. Bull. 1978. V. 21. № 3. P. 335.

8. Flament C. Hypergraphs Arbores // Diskete Mathematics. 1978. V. 21. № 3. P. 223.

9. Амбарян С. Л., Мовсесян А. А., Пилипосян Т. Э. О минимальных реализациях гиперграфов // Вопр. радиоэлектроники. Сер. ЭВТ. 1981. Вып. 16. С. 37.

10. Booth K. S., Lueker G. S. Testing for the Consecutive Ones Proporty, Interval Graphs and Graph Planarity Using PQ-Tree Algorithms // Journ. of Comp. and Syst. Sciences. 1976. V. 13. P. 335.

11. Левин А. Г., Мельников О. И. Ослабленное условие Хелаи и планарность гиперграфа // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1988. № 3. С. 12.

12. Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И. Лекции по теории графов. М., 1990.

Поступила в редакцию 16.06.93.

УДК 519.233.2

Д. В. СИНЬКЕВИЧ, Н. Н. ТРУШ

ВЫЧИСЛЕНИЕ МОМЕНТОВ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ АГРЕГИРОВАННЫХ ЧАСТОТ СОСТОЯНИЙ ОДНОРОДНОЙ МАРКОВСКОЙ ЦЕПИ ДЛЯ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ СХЕМЫ

The formulae for calculation of mathematical expectation of arbitrary number product of homogeneous Markovian chain state frequency is obtained taken in the same time moments under condition that each multiply degree is some natural number.

Пусть в каждый из T моментов времени имеются система из $N = N(t)$, $t = \overline{1, T}$, микрообъектов, распределенных по r состояниям, и наблюдения $n_{j,t}$, $j = \overline{1, r}$, $t = \overline{1, T}$, являющиеся абсолютными частотами попадания микрообъектов в j-е состояние в момент времени t. Математической моделью эволюции каждого из N микрообъектов служит однородная, конечного числа состояний марковская цепь с одной и той же матрицей $P = (P_{ij})$, $i, j = \overline{1, r}$, переходных вероятностей, причем все N марковские цепи независимы.

Пусть $q_{j,t}$, $j = \overline{1, r}$, $t = \overline{1, T}$, обозначает безусловную вероятность попадания микрообъекта в j-е состояние в момент времени t. Эта вероятность постоянна для каждого отдельного микрообъекта в данный момент времени и меняется с изменением t.

В работе [1] предложено рассматривать описанную вероятностную модель как полиномиальное распределение, и на этой основе построена оценка максимального правдоподобия $\hat{p}$ матрицы p. Для исследования асимптотических свойств оценки $\hat{p}$ в работе [2] получены достаточно общие формулы вычисления моментов высших порядков случайных