Математика и механика

УДК 517.925.6

В. Н. ГОРБУЗОВ, Ю. Ю. ГНЕЗДОВСКИЙ

О ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ СИСТЕМ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

The set of systems of algebraic ordinary differential equations (1), when the set of polynomials (3) in solution is pickedout.

В [1] изложены методы построения полиномиальных решений алгебраических дифференциальных уравнений. Считается, что впервые эта задача рассматривалась в работах [2,3], исследования были продолжены в работах [4—15].

В настоящей статье рассматривается задача о нахождении степеней полиномиальных решений в системах алгебраических дифференциальных уравнений

$$\sum_{i=0}^{N_j} A_{ij}(z) \prod_{k=1}^{M_{ij}} \prod_{\tau=1}^{n} \{ \omega_\tau^{(l_{\tau kij})} \}^{\nu_{\tau kij}} = 0, \quad j = \overline{1, n}, \tag{1}$$

где $l_{\tau kij}$ и $\nu_{\tau kij}$ — целые неотрицательные числа, коэффициенты $A_{ij}(z) = \alpha_{ij} z^{a_{ij}} + \dots, \ \alpha_{ij} \neq 0$.

В основу рассуждений положена асимптотическая формула выражения производной полинома $w^{(l)}(z)$ через сам полином $w(z)$ степени $\deg w(z) = m \geqslant l$ вида:

$$w^{(l)}(z) = (-1)^l (-m)_l z^{-l} w(z) \{1 + \varepsilon_l(z)\}, \tag{2}$$

где $\varepsilon_l(z)$ — рациональная функция такая, что $\varepsilon_0(z) = 0$ и $\varepsilon_l(z) \to 0$ при $z \to \infty$, $(-m)_l$ — символ Похгаммера.

Полиномиальные решения системы (1) будем искать в виде:

$$w_\tau = w_\tau(z), \quad \tau = \overline{1, n}, \tag{3}$$

где $w_\tau(z)$ — полиномы степени $\deg w_\tau(z) = m_\tau \geqslant \Lambda_\tau$, $\Lambda_\tau = \max\{\Lambda_{\tau ij} : i = \overline{0, N_j}, j = \overline{1, n}\}$ — порядок системы (1) по переменной w_τ, $\Lambda_{\tau ij} = \max\{l_{\tau kij} : k = \overline{1, M_{ij}}\}$ — порядок i-го члена j-го уравнения по переменной w_τ.

Для дальнейших рассуждений введем следующие условные обозначения: $\sum_{k=1}^{M_{ij}} \nu_{\tau kij} = \kappa_{\tau ij}$ — размерность, $\sum_{k=1}^{M_{ij}} l_{\tau kij} \nu_{\tau kij} = \Omega_{\tau ij}$ — вес i-го члена j-го уравнения по переменной w_τ; $\sum_{\tau=1}^{n} \Omega_{\tau ij} = \Omega_{ij}$ — вес i-го члена j-го уравнения; $S_{ij}(m_\tau) = \sum_{\tau=1}^{n} \kappa_{\tau ij} m_\tau - \Omega_{ij}$ — функция степени i-го члена j-го уравнения,

$$m_\tau \geqslant \Lambda_\tau, \tau = \overline{1, n}; \quad k_{ij}(m_\tau) = (-1)^{\Omega_{ij}} \prod_{k=1}^{M_{ij}} \prod_{\tau=1}^{n} \{ (-m_\tau)_{l_{\tau kij}} \}^{\nu_{\tau kij}}$$

— функция коэффициента i-го члена j-го уравнения, $m_\tau \geqslant \Lambda_\tau$, $\tau = \overline{1, n}$.

Заметим, что ограничения на степени m_τ полиномиальных составляющих решения (3) общности рассуждений не нарушают, ибо в таких случаях рассматриваются «укороченные» системы из (1).

Теорема 1. Пусть для j-го уравнения системы (1) выполняются условия:

$$\varkappa_{r\theta j} = \varkappa_{r\rho j} = \ldots = \varkappa_{r_{\rho+\lambda_r} j} > \varkappa_{r f_r j},\ r \in \{1, \ldots, n\},$$
$$0 \leqslant \rho \leqslant N_j,\ \theta = \overline{0, \rho - 1},\ f_r = \overline{\rho + \lambda_r + 1,\ N_j}; \tag{4}$$

$$\varkappa_{\tau\rho j} = \ldots = \varkappa_{\tau_{\rho+\lambda_\tau} j},\ 0 \leqslant \lambda_\tau \leqslant \lambda_r,\ \tau = \overline{1, n},\ \tau \neq r; \tag{5}$$

$$\alpha_{\rho j} - \Omega_{\rho j} > \alpha_{lj} - \Omega_{lj},\ l = \overline{\rho + 1, \rho + \lambda},\ \lambda = \min\{\lambda_\tau : \tau = \overline{1, n}\}. \tag{6}$$

Тогда относительно существования полиномиальных решений (3) справедливы следующие утверждения:

1) при $\rho = 0$, $\lambda = N_j$ решений (3) нет;

2) при $\rho = 0$, $\lambda < N_j$ степени m_τ могут быть лишь такими, что выполняется хотя бы одно из неравенств

$$\sum_{\tau=1}^{n} (\varkappa_{\tau\eta j} - \varkappa_{\tau\rho j}) m_\tau \geqslant (\alpha_{\rho j} - \Omega_{\rho j}) - (\alpha_{\eta j} - \Omega_{\eta j}),\ \eta = \overline{\lambda + 1,\ N_j}; \tag{7}$$

3) при $0 < \rho \leqslant N_j$, $\lambda = N_j - \rho$ степени m_τ могут быть лишь такими, что выполняется хотя бы одно из неравенств

$$\sum_{\tau=1}^{n} (\varkappa_{\tau\theta j} - \varkappa_{\tau\rho j}) m_\tau \geqslant (\alpha_{\rho j} - \Omega_{\rho j}) - (\alpha_{\theta j} - \Omega_{\theta j}),\ \theta = \overline{0, \rho - 1}; \tag{8}$$

4) при $0 < \rho < N_j$, $\lambda < N_j - \rho$ степени m_τ, при которых выполняются неравенства

$$\sum_{\tau=1}^{n} (\varkappa_{\tau\eta j} - \varkappa_{\tau\rho j}) m_\tau < (\alpha_{\rho j} - \Omega_{\rho j}) - (\alpha_{\eta j} - \Omega_{\eta j}),\ \eta = \overline{\rho + \lambda + 1,\ N_j}, \tag{9}$$

могут быть лишь такими, что выполняется хотя бы одно из неравенств (8);

5) при $0 < \rho < N_j$, $\lambda < N_j - \rho$ степени m_τ, при которых выполняются неравенства

$$\sum_{\tau=1}^{n} (\varkappa_{\tau\theta j} - \varkappa_{\tau\rho j}) m_\tau < (\alpha_{\rho j} - \Omega_{\rho j}) - (\alpha_{\theta j} - \Omega_{\theta j}),\ \theta = \overline{0, \rho - 1}, \tag{10}$$

могут быть лишь такими, что выполняется хотя бы одно из неравенств (7) при $\eta = \overline{\rho + 1 + \lambda,\ N_j}$.

Доказательство. Основываясь на асимптотической формуле (2), устанавливаем, что система полиномов (3) является решением системы (1) тогда и только тогда, когда совместна система тождеств:

$$\sum_{\theta=0}^{\rho-1} K_{\theta j}(m_\tau) K_{\rho j}^{-1}(m_\tau) A_{\theta j}(z) A_{\rho j}^{-1}(z) (1 + \varepsilon_{\theta j}(z)) \times$$
$$\times \exp_z \{S_{\theta j}(m_\tau) - S_{\rho j}(m_\tau)\} + \varepsilon_{\rho j}(z) + 1 + \sum_{l=\rho+1}^{\rho+\lambda} K_{lj}(m_\tau) K_{\rho j}^{-1}(m_\tau) \times$$
$$\times A_{lj}(z) A_{\rho j}^{-1}(z) (1 + \varepsilon_{lj}(z)) \exp_z \{\Omega_{\rho j} - \Omega_{lj}\} + \tag{11}$$
$$+ \sum_{\eta=\rho+\lambda+1}^{N_j} K_{\eta j}(m_\tau) K_{\rho j}^{-1}(m_\tau) A_{\eta j}(z) A_{\rho j}^{-1}(z) (1 + \varepsilon_{\eta j}(z)) \times$$
$$\times \exp_z \{S_{\eta j}(m_\tau) - S_{\rho j}(m_\tau)\} \equiv 0,$$

где $\varepsilon_{ij}(z) \to 0$ при $z \to \infty$.

Так как для всех $l = \overline{\rho + 1, \rho + \lambda}$ выполняется (6), то при $z \to \infty$

$$A_{lj}(z)A_{\rho j}^{-1}(z)\exp_z\{\Omega_{\rho j}-\Omega_{lj}\}\to 0. \qquad (12)$$

Если для всех $\theta=\overline{0,\rho-1}$ выполняются неравенства $\sum_{\tau=1}^{n}(\kappa_{\tau\theta j}-\kappa_{\tau\rho j})m_\tau+\Omega_{\rho j}-\Omega_{\theta j}+\alpha_{\theta j}-\alpha_{\rho j}=0$, то при $z\to\infty$

$$A_{\theta j}(z)A_{\rho j}^{-1}(z)\exp_z\{S_{\theta j}(m_\tau)-S_{\rho j}(m_\tau)\}\to 0. \qquad (13)$$

Если для всех $\eta=\overline{\rho+\lambda+1,N_j}$ выполняются неравенства $\sum_{\tau=1}^{n}(\kappa_{\tau\eta j}-\kappa_{\tau\rho j})\times m_\tau+\Omega_{\rho j}-\Omega_{\eta j}+\alpha_{\eta j}-\alpha_{\rho j}<0$, то при $z\to\infty$

$$A_{\eta j}(z)A_{\rho j}^{-1}(z)\exp_z\{S_{\eta j}(m_\tau)-S_{\rho j}(m_\tau)\}\to 0. \qquad (14)$$

В каждом из случаев 1)—5), переходя в (11) к пределу при $z\to\infty$, с учетом соотношений (12)—(14) всякий раз получаем противоречие, которое и доказывает утверждения теоремы.

Методом, аналогичным доказательству теоремы 1, устанавливаем, что справедлива

Теорема 2. Пусть для j-го уравнения системы (1) выполняются условия (4)—(5) и

$$\alpha_{\rho j}-\Omega_{\rho j}=\ldots=\alpha_{\rho+Sj}-\Omega_{\rho+Sj}>\alpha_{\varepsilon j}-\Omega_{\varepsilon j},\quad 0<S\leqslant\lambda,$$

$$\varepsilon=\overline{\rho+S+1,\rho+\lambda},\quad \lambda=\min\{\lambda_\tau:\tau=\overline{1,n}\}.$$

Тогда относительно существования полиномиальных решений (3) справедливы следующие утверждения:

1) при $\rho=0$, $\lambda=N_j$ степени m_τ должны удовлетворять равенству

$$\sum_{\xi=\rho}^{\rho+S}\alpha_{\xi j}K_{\xi j}(m_\tau)=0; \qquad (15)$$

2) при $\rho=0$, $\lambda<N_j$ степени m_τ такие, что выполняются неравенства (9), должны удовлетворять равенству (15);

3) при $0<\rho<N_j$, $\lambda=N_j-\rho$ степени m_τ такие, что выполняются неравенства (10), должны удовлетворять равенству (15);

4) при $0<\rho<N_j$, $\lambda<N_j-\rho$ степени m_τ такие, что выполняются неравенства (9) и (10), должны удовлетворять равенству (15).

1. Горбузов В. Н. Полиномиальные решения алгебраических дифференциальных уравнений. Гродно, 1991.
2. Rainville E. D. // Amer, Math, Monthly. 1936. V. 43. P. 473.
3. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 1976. С. 44.
4. Bhargava M., Kaufman H. // Coll, Math. 1966—1967. V. 18. P. 3.
5. Лазов П. Р. // Бил. Друшт. мат. и физ. СРМ. 1974. Кн. 25. С. 41.
6. Лазов П. Р. // Math. Balkanica. 1975. V. 35. № 5. P. 189.
7. Лазов П. Р. // Математички весник. 1977. Кн. 1(14, 29). С. 387.
8. Лазов П. Р., Дмитровски Д. // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13. № 6. С. 1131.
9. Самуйлов А. З. // Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7. № 12. С. 2287.
10. Орещенко Л. Г. // Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10. № 2. С. 253.
11. Горбузов В. Н., Денисковец А. А. // Докл. АН БССР. 1982. Т. 26. № 9. С. 776.
12. Горбузов В. Н., Кишкель С. И. // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23. № 5. С. 891.
13. Горбузов В. Н., Крушельницкий А. А. // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. № 6. С. 1069.
14. Горбузов В. Н. , Немец В. С. // Punime Mat. 1988. № 3. P. 23.
15. Gorbuzov V. N., Samodurov A. A. // Inst. Math. Univ. 1989. № 8. P. 1.

Поступила в редакцию 28.09.92.