ра, а именно: на каждой оптимальной допустимой кривой $x(t)$, $t\in[a,b]$, в задаче (1)—(4) выполняется условие

$$\dot{x}'(t)\frac{\partial^2 F[t]}{\partial z^2}\dot{x}(t)\geqslant 0,\ t\in[a,b].$$

Список литературы

1. Б л и с с Г. А. Лекции по вариационному исчислению. М., 1960.
2. З а б е л л о Л. Е.//Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. № 8. С.1309.
3. Г а б а с о в Р., К и р и л л о в а Ф. М. Методы оптимизации. Мн., 1981.
4. Г е л ь ф а н д И. М., Ф о м и н С. В. Вариационное исчисление. М., 1961.

Поступила в редакцию 08.06.92.

УДК 517.948.32:517.544

Э. И. ЗВЕРОВИЧ

ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ В БИКРУГЕ ФУНКЦИЙ С ЯДРОМ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

The solution of linear functional equation for finding the analytic in bicircle function with respect to coefficients is given.

В [1] предложен общий метод исследования функционального уравнения:

$$A(z,w)\,.\,\xi(z,w)-A(z,0)\,.\,\xi(z,0)-A(0,w)\xi(0,w)+$$

$$+A(0,0)\,.\,\xi(0,0)=z\,.\,w\,.\,\eta(z,w),\ |z|\leqslant 1,\ |w|\leqslant 1, \qquad (1)$$

а в [2—4] дано его исследование при различных частных предположениях относительно его ядра $A(z, w)$. Здесь предположим, что $A(z, w)=P(z)-w$, где P—полином, причем $P(0)=0$. При таком предположении общее решение уравнения (1), если оно существует, содержится в формуле:

$$\xi(z,w)=\frac{P(z)\,.\,\xi(z,0)-w\,.\,\xi(0,w)+z\,.\,w\,.\,\eta(z,w)}{P(z)-w}. \qquad (2)$$

Все входящие в (1) функции, в том числе и неизвестная функция ξ, считаются аналитическими в бикруге $|z|<1$, $|w|<1$ и принадлежащими кольцу W функций, представимых в виде сумм степенных рядов, абсолютно сходящихся при $|z|=|w|=1$.

Таким образом, разрешимость уравнения (1) зависит от того, можно ли подобрать функции $\xi(z, 0)$ и $\xi(0, w)$ так, чтобы правая часть равенства (2) принадлежала кольцу W. Для этого необходимо, чтобы числитель в (2) обращался в нуль всюду, где обращается в нуль знаменатель. Таким образом, мы приходим к уравнению:

$$\xi(z,0)-\xi(0,w)+z\,.\,\eta(z,w)=0 \text{ при } |z|\leqslant 1,\ |w|\leqslant 1,\ P(z)=w. \qquad (3)$$

Анализ этого уравнения довольно тривиален: достаточно одну из неизвестных функций задать произвольно, а другую выразить через нее. Нам удобно взять

$$\xi(0,\ w)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\xi_{0\nu}w^{\nu}, \qquad (4)$$

где $\xi_{0\nu}$—произвольные коэффициенты, подчиненные единственному ограничению $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}|\xi_{0\nu}|<+\infty$. Тогда из (3) находится $\xi(z, 0)$:

$$\xi(z,0)=\xi[0,\ P(z)]-z\,.\,\eta[z,P(z)]\equiv\sum_{\mu=0}^{\infty}\xi_{\mu 0}z^{\mu}, \qquad (5)$$

где обозначено

$$\xi_{\mu 0}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=\rho}\frac{\xi[0,\ P(z)]-z\,.\,\eta[z,\ P(z)]}{z^{\mu+1}}dz,\ \mu=0,1,2,\ldots, \qquad (6)$$

а ρ—достаточно малое положительное число. Так как радиус сходимости ряда (5) заранее неизвестен, то необходимо потребовать, чтобы функция (5) принадлежала кольцу W:

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} |\xi_{\mu 0}| < +\infty. \tag{7}$$

Это условие необходимо и достаточно для разрешимости уравнения (3). При его выполнении общее решение уравнения (3) дается формулами (4) и (5). Если, в частности, $\eta(z,w)$—полином, то уравнение (3) разрешимо в полиномах, причем безусловно, а его общее решение зависит линейно от произвольного полинома $\xi(0, w)$ и дается формулой (5).

Предположим теперь, что уравнение (3) разрешимо, а его общее решение подставлено в числитель правой части равенства (2). Тогда числитель правой части (2) делится без остатка на знаменатель, т. е. является аналитической функцией по одной из переменных z, w при фиксированной другой переменной. Отсюда на основании фундаментальной теоремы Гартогса [5. С. 9] заключаем, что дробь (2) аналитична в бикруге $|z|<1$, $|w|<1$. Это означает, что правую часть (2) можно представить в виде сходящегося в бикруге ряда

$$\xi(z, w) = \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} \xi_{\mu\nu} z^{\mu} w^{\nu},$$

коэффициенты которого можно найти по рекуррентным формулам. Но так как принадлежность дроби (2) кольцу W ничем не гарантируется, то мы должны еще потребовать, чтобы выполнялось неравенство:

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} |\xi_{\mu\nu}| < +\infty. \tag{8}$$

Если, в частности, $\eta(z, w)$—полином, то, как уже отмечалось, уравнение (3) разрешимо в полиномах, притом безусловно. Таким образом, в этом случае числитель в (2)—полином, а знаменатель—неприводимый полином. Отсюда следует, что и дробь (2)—полином.

Сформулируем полученные результаты.

Теорема. Для разрешимости уравнения (1) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство (8). Если оно выполняется, то выполняется и (7), а общее решение уравнения (1) дается равенством (2), где $\xi(0, w)$—произвольная функция из W; $\xi(z, 0)$ находится по формуле (5). Если, в частности, $\xi(z, w)$—полином, то уравнение (1) разрешимо безусловно и имеет полиномиальные решения.

Отметим еще случай, когда условие разрешимости уравнения (1) упрощается. Именно, предположим, что имеет место случай «поглощения».

$$|z|=1 \Longrightarrow \begin{bmatrix} |P(z)|\leqslant q<1, \\ |P(z)|\geqslant p>1. \end{bmatrix}$$

Тогда на основе $|z|=|w|=1$ функция $P(z)-w$ не обращается в нуль. Но так как $P(z)-w \in W$, то в рассматриваемом случае будет $\frac{1}{P(z)-w} \in W$. Таким образом, правая часть равенства (2) принадлежит кольцу W лишь при выполнении условия (7), более простого, чем условие (8), которое в этом случае выполняется автоматически.

Список литературы

1. Зверович Э. И.//Тез. Міжнар. мат. конф. Львів, 1992. С. 62.
2. Зверович Э. И., Крушевский Е. А. Линейное функциональное уравнение для аналитических функций в бикруге с ядром, двулистным по обеим переменным. Мн., 1987. 22 с. Деп. в ВИНИТИ 25.03.92. № 1026-В92.
3. Гортайре Д., Зверович Э. И. Линейное функциональное уравнение для аналитических функций в бикруге с ядром в виде невырожденной квадрики. Мн., 1992, 29 с. Деп. в ВИНИТИ 07.04.92. № 1168-В92.
4. Зверович Э. И., Крушевский Е. А.//Конф. математиков Беларуси: Тез. докл. Гродно, 1992. Ч. 2. С. 49.
5. Рудин У. Теория функции в поликруге. М., 1974.

Поступила в редакцию 14.01.93.