Краткие сообщения

УДК 62-50

Л. Е. ЗАБЕЛЛО

МЕТОД ВНУТРЕННИХ ВАРИАЦИЙ В ВАРИАЦИОННОМ ИСЧИСЛЕНИИ

Internal variations method is suggested for obtainig necessary optemality conditions for variational calculations with functional constrains without using Lagrange multipliers. The optimality conditions thus obtained are analogous to Eugler equation and Legandre conditions.

Предлагается новый метод получения необходимых условий оптимальности в задачах вариационного исчисления с функциональными ограничениями, не использующий множители Лагранжа.

Рассмотрим задачу вариационного исчисления вида

$$J(x)=\int_a^b F(x(t),\dot{x}(t),t)\,dt\to\min \tag{1}$$

при ограничениях:

$$x(a)=c,\ x(b)=d, \tag{2}$$

$$\Phi_k(x(t),\dot{x}(t))=0,\ (\leqslant 0),\ k=\overline{1,e}\ (k=\overline{e+1,e_1}), \tag{3}$$

$$\int_a^b G_i(x(t),\dot{x}(t))\,dt=c_i,\ (\leqslant c_i),\ i=\overline{1,m}\ (i=\overline{m+1,m_1}). \tag{4}$$

Под допустимыми кривыми в задаче (1)—(4) будем понимать n-мерные дважды непрерывно-дифференцируемые функции $x(t)$, $t\in[a,b]$, удовлетворяющие ограничениям (2)—(4), где $\Phi_k(x,z)$, $G_i(x,z)$ являются положительно однородными по z [1]. Функция $F(x,z,t)$—заданная скалярная функция аргументов x, z, t, принадлежащая классу $C^{(2)}$ по совокупности своих аргументов, $\dot{x}(t)=z(t)$.

Наряду с допустимой кривой $x(t)$ рассмотрим кривую

$$\bar{x}(t)=x(t+\varepsilon\delta_1(t)),\delta_1(t)=$$

$$=\int_a^t \delta(\tau)\,d\tau,\ \delta(\tau)\in C^{(1)}{}_{[a,b]},\ \delta_1(a)=\delta_1(b)=0, \tag{5}$$

где ε—достаточно малое число. Поскольку $\nu_\varepsilon(t):[a,b]\to[a,b]$, $\nu_\varepsilon(t)=t+\varepsilon\delta_1(t)$, $t\in[a,b]$, то в силу сделанных предположений относительно Φ_k, G_i кривая $\bar{x}(t)$, $t\in[a,b]$, также является допустимой. Соответствующие $\delta(\tau)$ будем называть допустимой вариацией $\tau\in[a,b]$. Вариацию вида (5) по аналогии с подобной вариацией оптимального управления [2] назовем внутренней, так как кривая $\bar{x}(t)$ принимает те же значения, что и $x(t)$, $t\in[a,b]$. Нетрудно заметить также, что она является двусторонней по ε.

Прямым дифференцированием можно получить следующие выражения:

$$\frac{d}{d\varepsilon}\bar{x}(t)=\frac{dx(\nu_\varepsilon(t))}{d\nu_\varepsilon}\delta_1(t),\ \frac{d^2\bar{x}(t)}{d\varepsilon^2}=\frac{d^2x(\nu_\varepsilon(t))}{d\nu_\varepsilon^2}\delta_1^2(t), \tag{6}$$

$$\frac{d^2}{d\epsilon dt}\bar{x}(t)=\frac{d^2x(\nu_\epsilon(t))}{d\nu_\epsilon^2}\delta_1(t)(1+\varepsilon\delta(t))+\frac{dx(\nu_\epsilon(t))}{d\nu_\epsilon}\delta(t).$$

Тогда при фиксированной допустимой кривой x(t) и вариации δ(t), t∈[a, b], функционал (1) допускает разложение

$$J(\bar{x})-J(x)=\varepsilon\delta^1J(x,\delta)+0(\varepsilon), \tag{7}$$

где $\delta^1 J(x, \delta)$ учитывая (6), можно записать в виде:

$$\delta^1J(x,\delta)=\frac{d}{d\epsilon}J(\bar{x})|_{\epsilon=0}=$$

$$=\int_a^b\left(\left[\frac{\partial F'[t]}{\partial x}\dot{x}(t)+\frac{\partial F'[t]}{\partial z}\ddot{x}(t)\right]\delta_1(t)+\right. \tag{8}$$

$$\left.+\frac{\partial F'[t]}{\partial z}\dot{x}(t)\delta(t)\right)dt,$$

$F[t]=F(x(t),\dot{x}(t)t)$, (′)—транспонирование. Строго придерживаясь классической схемы доказательства необходимых условий сильного минимума [3, 4], которые здесь будем называть просто необходимыми условиями оптимальности в задаче (1)—(4), из (7) нетрудно получить утверждение.

Лемма. На каждой оптимальной допустимой кривой x(t), t∈[a, b], в задаче (1)—(4) выполняется равенство

$$\delta^1J(x,\ \delta)=0, \tag{9}$$

для любой допустимой вариации δ(t), t∈[a, b].

Используя (9) как неявное условие оптимальности, получим необходимое условие, выраженное через параметры задачи.

Теорема. Всякая оптимальная допустимая кривая x(t), t∈[a, b], в задаче (1)—(4) удовлетворяет условию:

$$M(t)=\left(\frac{\partial F[t]}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial F[t]}{\partial z}\right)'\dot{x}(t)=0,\ t\in[a,\ b]. \tag{10}$$

Доказательство. Преобразуя последнее слагаемое в (8), нетрудно получить выражение

$$\delta^1J(x,\delta)=\int_a^b M(t)\delta_1(t)dt. \tag{11}$$

Предположим, что условие (10) нарушается при некотором θ∈[a, b] и для определенности положим M(θ)>0. В силу непрерывности при некотором достаточно малом ε>0 будет справедливо и неравенство M(t)>0, t∈[θ−ε, θ+ε].

Построим допустимую вариацию следующим образом:

$$\delta(t)=\begin{cases}4(t-0)[(t-\theta)^2-\varepsilon^2], & t\in[\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon],\\ 0, & t\bar{\in}[\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon].\end{cases} \tag{12}$$

Тогда $\delta_1(t)>0$, t∈(θ—ε, θ+ε). Подставляя (12) в (11), имеем:

$$\int_a^b M(t)\delta_1(t)dt=\int_{\theta-\varepsilon}^{\theta+\varepsilon} M(t)\delta_1(t)dt>0.$$

Последнее неравенство противоречит лемме, что и доказывает теорему.

Условие (10) по своей сути является аналогом известного уравнения Эйлера. [3,4].

Замечание. Если предположить $x(t)\in C^{(3)}_{[a,b]}$, то изложенный выше метод внутренних вариаций позволяет получить аналог условия Лежандра, а именно: на каждой оптимальной допустимой кривой $x(t)$, $t\in[a,b]$, в задаче (1)—(4) выполняется условие

$$\dot{x}'(t)\frac{\partial^2 F[t]}{\partial z^2}\dot{x}(t)\geqslant 0,\ t\in[a,b].$$

Список литературы

1. Б л и с с Г. А. Лекции по вариационному исчислению. М., 1960.
2. З а б е л л о Л. Е.//Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. № 8. С.1309.
3. Г а б а с о в Р., К и р и л л о в а Ф. М. Методы оптимизации. Мн., 1981.
4. Г е л ь ф а н д И. М., Ф о м и н С. В. Вариационное исчисление. М., 1961.

Поступила в редакцию 08.06.92.

УДК 517.948.32:517.544

Э. И. ЗВЕРОВИЧ

ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ В БИКРУГЕ ФУНКЦИЙ С ЯДРОМ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

The solution of linear functional equation for finding the analytic in bicircle function with respect to coefficients is given.

В [1] предложен общий метод исследования функционального уравнения:

$$A(z,w)\,.\,\xi(z,w)-A(z,0)\,.\,\xi(z,0)-A(0,w)\xi(0,w)+$$

$$+A(0,0)\,.\,\xi(0,0)=z\,.\,w\,.\,\eta(z,w),\ |z|\leqslant 1,\ |w|\leqslant 1, \tag{1}$$

а в [2—4] дано его исследование при различных частных предположениях относительно его ядра $A(z, w)$. Здесь предположим, что $A(z, w) = P(z)—w$, где P—полином, причем $P(0) = 0$. При таком предположении общее решение уравнения (1), если оно существует, содержится в формуле:

$$\xi(z,w)=\frac{P(z)\,.\,\xi(z,0)-w\,.\,\xi(0,w)+z\,.\,w\,.\,\eta(z,w)}{P(z)-w}. \tag{2}$$

Все входящие в (1) функции, в том числе и неизвестная функция ξ, считаются аналитическими в бикруге $|z|<1$, $|w|<1$ и принадлежащими кольцу W функций, представимых в виде сумм степенных рядов, абсолютно сходящихся при $|z|=|w|=1$.

Таким образом, разрешимость уравнения (1) зависит от того, можно ли подобрать функции $\xi(z, 0)$ и $\xi(0, w)$ так, чтобы правая часть равенства (2) принадлежала кольцу W. Для этого необходимо, чтобы числитель в (2) обращался в нуль всюду, где обращается в нуль знаменатель. Таким образом, мы приходим к уравнению:

$$\xi(z,0)-\xi(0,w)+z\,.\,\eta(z,w)=0\ \text{при}\ |z|\leqslant 1,\ |w|\leqslant 1,\ P(z)=w. \tag{3}$$

Анализ этого уравнения довольно тривиален: достаточно одну из неизвестных функций задать произвольно, а другую выразить через нее. Нам удобно взять

$$\xi(0,\ w)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\xi_{0\nu}w^{\nu}, \tag{4}$$

где $\xi_{0\nu}$—произвольные коэффициенты, подчиненные единственному ограничению $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}|\xi_{0\nu}|<+\infty$. Тогда из (3) находится $\xi(z, 0)$:

$$\xi(z,0)=\xi[\,0,\ P(z)\,]-z\,.\,\eta[\,z,P(z)\,]\equiv\sum_{\mu=0}^{\infty}\xi_{\mu 0}z^{\mu}, \tag{5}$$

где обозначено

$$\xi_{\mu 0}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=\rho}\frac{\xi[\,0,\ P(z)\,]-z\,.\,\eta[\,z,\ P(z)\,]}{z^{\mu+1}}dz,\ \mu=0,1,2,\dots, \tag{6}$$

а ρ—достаточно малое положительное число. Так как радиус сходимости