

Преобразованные таким образом программы пропускаются через АРП, планировщик и КАДР-машину. Результирующее ускорение R_{vlw} представлено строками *MINV'* и *GAUSS'* в табл. 3 и достигает достаточно большой величины.

В результате выполненной работы можно сделать предположение о перспективности использования метода VLIW для построения персональных супер-ЭВМ.

Список литературы

1. З м а ч и н с к и й С. С., Ш п а к о в с к и й Г. И., С е р и к о в а Н. В. // Программирование. 1992. № 1, С. 58.
2. Ш п а к о в с к и й Г. И. // УСМ. 1991. № 6. С. 3.
3. W i l s o n R. // Computer. Designe. 1990. September. P. 26.
4. Ш п а к о в с к и й Г. И. // ЗРЭ. 1991. № 11. С. 10.

Поступила в редакцию 28.01.93.

УДК 517.5

В. Н. РУСАК, Д. БРАЙЕСС (ФРГ)

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ МОДУЛИ ГЛАДКОСТИ И НАИЛУЧШАЯ РАЦИОНАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ

The classes of 2π -periodic functions $f(x)$, which satisfy the restriction

$$\int_0^{2\pi} \left| \sum_{\nu=0}^{r+1} (-1)^\nu C_{r+1}^\nu f(x + \nu\tau) \right| dx \leq M\tau^{r+1}, \quad \forall \tau > 0,$$

are considered. The exact order of approximability of these classes by rational functions is found.

Пусть $C_{2\pi}$ — пространство непрерывных 2π -периодических функций $f(x)$, где норма, как обычно, задается равенством

$$\|f(x)\| = \sup_{-\infty < x < \infty} |f(x)|.$$

Обозначим через $W_{2\pi}^r \Omega_M$, $r = 1, 2, \dots$, классы функций из пространства $C_{2\pi}$, подчиненных ограничению:

$$\int_0^{2\pi} |\Delta_{r+1}^\tau f(x)| dx \leq M\tau^{r+1}, \quad \forall \tau > 0; \Delta_{r+1}^\tau f(x) = \sum_{\nu=0}^{r+1} (-1)^\nu C_{r+1}^\nu f(x + \nu\tau). \quad (1)$$

Пусть $E_n^T(f)$ — наилучшее приближение функции $f(x)$ в равномерной метрике тригонометрическими полиномами, т. е.

$$E_n^T(f) = \inf_{p_n(x)} \|f(x) - p_n(x)\|,$$

где $p_n(x)$ — тригонометрический полином порядка не выше n . В свою очередь, наилучшее рациональное приближение в метрике $C_{2\pi}$ определяется равенством:

$$R_n^T(f) = \inf_{r_n(x)} \|f(x) - r_n(x)\|, \quad r_n(x) = p_n(x)/q_n(x),$$

где $p_n(x)$ и $q_n(x)$ — тригонометрические полиномы порядка не выше n .

Если бесконечно малые (α_n) и (β_n) имеют одинаковый порядок, то пишем $\alpha_n \asymp \beta_n$ и через C_j обозначаем ниже положительные константы, не зависящие от n и f .

Теорема 1.

$$\sup_{f \in W_{2\pi}^r \Omega_M} R_n^T(f) \asymp \left(\frac{1}{n}\right)^{r+1}. \quad (2)$$

Доказательство соотношения (2) связано с использованием промежуточного приближения класса $W_{2\pi}^r \Omega_M$ такими функциями, которые имеют r -ые производные ограниченной вариации. Пусть $W_{2\pi}^r V_M$, $r = 1, 2, \dots$, есть класс функций $f(x)$ из пространства $C_{2\pi}$, которые представимы в виде:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} D_{r+1}(x-t) dh(t), \quad (3)$$

где $h(t)$ — функция ограниченной вариации $[\text{Var } h(t)]_0^{2\pi} \leq M$, соответственно

$$D_{r+1}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\left(kt - \frac{r+1}{2}\pi\right)}{k^{r+1}} \quad (4)$$

есть известное ядро Бернулли [1], которое на отрезке $(0, 2\pi)$ совпадает с алгебраическим многочленом степени $r+1$.

Лемма 1. Имеется вложение

$$W_{2\pi}^r V_M \subset W_{2\pi}^r \Omega_{CM}, \quad r = 1, 2, \dots \quad (5)$$

Действительно, если $f(x) \in W_{2\pi}^r V_M$, то, во-первых, на основании (3) и (4) с учетом 2π -периодичности будем иметь:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |\Delta_{r+1}' f(x)| dx &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |\Delta_{r+1}' \int_0^{2\pi} D_{r+1}(x-t) dh(t)| dx \leq \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |\Delta_{r+1}' D_{r+1}(x-t)| |dh(t)| dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |\Delta_{r+1}' D_{r+1}(x)| dx |dh(t)| \leq \frac{M}{\pi} \int_0^{2\pi} |\Delta_{r+1}' D_{r+1}(x)| dx. \end{aligned} \quad (6)$$

Конечная разность порядка $r+1$ с шагом τ $\Delta_{r+1}' D_{r+1}(x)$ будет кусочно-полиномиальной функцией на $[0, 2\pi]$, непрерывной вместе со своими производными до порядка $r-1$, и, следовательно, может иметь лишь конечное число m нулей. В силу сказанного и того, что $D_{r+2}'(x) = D_{r+1}(x)$, из соотношения (6) следует:

$$\int_0^{2\pi} |\Delta_{r+1}' f(x)| dx \leq \frac{M}{\pi} 2(m+1) \sup_x |\Delta_{r+1}' D_{r+2}(x)| \leq CM \tau^{r+1},$$

т. е. в согласии с (1) $f(x) \in W_{2\pi}^r \Omega_{CM}$ и включение (5) таким образом установлено.

Лемма 2. Если $f(x)$ удовлетворяет условию (1), то для любых x и $\tau > 0$

$$|\Delta_{r+1}' f(x)| \leq C_1 \tau^r, \quad r = 1, 2, 3, \dots \quad (7)$$

Доказательство базируется на оценке коэффициентов Фурье. Из (1) следует, что для коэффициентов Фурье $a_k = a_k(f)$, $b_k = b_k(f)$ верны неравенства:

$$\begin{aligned} |a_k| &= \frac{1}{\pi 2^{r+1}} \left| \int_0^{2\pi} \left(\Delta_{r+1}^{\frac{\pi}{k}} f(x) \right) \cos kx dx \right| \leq \\ &\leq \frac{M}{2^r} \left(\frac{\pi}{k} \right)^{r+1}, \quad |b_k| \leq \frac{M}{2^r} \left(\frac{\pi}{k} \right)^{r+1}. \end{aligned}$$

Тогда наилучшие приближения полиномами оцениваются неравенством:

$$E_n^r(f) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|) \leq \frac{2M}{2^r} \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{k} \right)^{r+1} \leq \frac{C_2}{n^r}, \quad \forall n,$$

и на основании обратных теорем найдем нужную оценку [2]:

$$|\Delta_{r+1}' f(x)| \leq C_3 \tau^r.$$

Замечание 1. В дополнение к (7) отметим, что из (1) следует существование всех производных $f^{(v)}(x)$, $v = 0, \dots, r-1$, и неравенство

$$|\Delta_2^r f^{(r-1)}(x)| \leq C_4 \tau.$$

Для всякой суммируемой 2π -периодической функции $f(x)$ определены функции Стеклова $f_{h,j}(x)$, $j = 1, r+1$,

$$f_{h,1}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(u) du = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h f(x+v) dv, \quad (8)$$

$$f_{h,j}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f_{h,j-1}(u) du. \quad (9)$$

Лемма 3. Если $f(x) \in W_{2\pi}^r \Omega_M$, то функция Стеклова $f_{h,r+1}(x)$ имеет r -ую абсолютно непрерывную производную и $(r+1)$ -ую непрерывную производную и выполнено соотношение:

$$\|f_{h,r+1}(x) - f(x)\| = O(h). \quad (10)$$

Действительно, из (8) и (9) ясно, что r -ая производная $f_{h,r+1}^{(r)}(x)$ выражается через линейную комбинацию сдвигов первой функции Стеклова $f_{h,1}(x)$, которая абсолютно непрерывна и имеет производную всюду в силу непрерывности $f(u)$. Равенство (10) вытекает из известных свойств функций Стеклова [2. С. 177].

Лемма 4. Если $f(x) \in W_{2\pi}^r \Omega_M$, то $(r+1)$ -ая функция Стеклова $f_{h,r+1}(x)$ при $\forall h > 0$ удовлетворяет неравенству

$$\int_0^{2\pi} |\Delta_{r+1}^r f_{h,r+1}(x)| dx \leq M \tau^{r+1}, \quad \forall \tau > 0. \quad (11)$$

До к а з а т е л ь с т в о. Возьмем вспомогательную 2π -периодическую функцию при фиксированном τ :

$$\psi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\nu=0}^{r+1} (-1)^\nu C_{r+1}^\nu f(x + \nu\tau). \quad (12)$$

Для функции Стеклова

$$\Psi_{h,j}(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^h \psi_{h,j-1}(x+v) dv, \quad \psi_{h,0}(x) = \psi(x)$$

имеем на основании неравенства Минковского

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |\Psi_{h,j}(x)| dx &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2h} \left| \int_{x-h}^h \psi_{h,j-1}(x+v) dv \right| dx \leq \\ &\leq \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \int_0^{2\pi} |\psi_{h,j-1}(x+v)| dx dv = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \|\psi_{h,j-1}(x)\|_{L_1} dv = \\ &= \|\psi_{h,j-1}(x)\|_{L_1}. \end{aligned} \quad (13)$$

Применяя неравенство (13) последовательно $r+1$ раз, найдем:

$$\int_0^{2\pi} |\Psi_{h,r+1}(x)| dx \leq \|\psi(x)\|_{L_1}. \quad (14)$$

Теперь (11) вытекает из (14), (12) и (1), если учесть, что в силу линейности усреднений Стеклова

$$\Psi_{h,r+1}(x) = \sum_{\nu=0}^{r+1} (-1)^\nu C_{r+1}^\nu f_{h,r+1}(x + \nu\tau). \quad (15)$$

Лемма 5. Если $f(x) \in W_{2\pi}^r \Omega_M$, то

$$\left[\text{Var } f_{h,r+1}^{(r)}(x) \right]_0^{2\pi} = \int_0^{2\pi} |f_{h,r+1}^{(r+1)}(x)| dx \leq M. \quad (16)$$

Во-первых, на основании последовательного применения теоремы Лагранжа о среднем получим:

$$\psi_{h,r+1}(x) = \sum_{p=0}^{r+1} (-1)^p C_{r+1}^p f_{h,r+1}(x + p\tau) = \tau^{r+1} f_{h,r+1}^{(r+1)}(\xi),$$

где ξ — средняя точка из отрезка $[x, x + (r+1)\tau]$. Следовательно,

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta_{r+1}^p f_{h,r+1}(x)}{\tau^{r+1}} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\psi_{h,r+1}(x)}{\tau^{r+1}} = \lim_{\tau \rightarrow 0} f_{h,r+1}^{(r+1)}(\xi) = f_{h,r+1}^{(r+1)}(x). \quad (17)$$

В силу теоремы Фату из (17) и (11) следует:

$$\int_0^{2\pi} |f_{h,r+1}^{(r+1)}(x)| dx \leq \sup_{\tau} \int_0^{2\pi} \frac{\Delta_{r+1}^p f_{h,r+1}(x)}{\tau^{r+1}} dx \leq M,$$

что совпадает с (16).

Замечание 2. При доказательстве леммы 5 можно обойтись без ссылки на теорему Фату. Действительно, предельный переход в (17) равномерный по x , поэтому

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |f_{h,r+1}^{(r+1)}(x)| dx &= \int_0^{2\pi} \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{|\Delta_{r+1}^p f_{h,r+1}(x)|}{\tau^{r+1}} dx = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \frac{\Delta_{r+1}^p f_{h,r+1}(x)}{\tau^{r+1}} dx \leq M. \end{aligned}$$

Теорема 2. Если $f(x) \in W_{2\pi}^r \Omega_M$, то существует тригонометрическая рациональная функция $r_{4n}(x)$ порядка не выше $4n$ такая, что

$$\|f(x) - r_{4n}(x)\| \leq \frac{C_5}{n^{r+1}}. \quad (18)$$

Доказательство. В леммах 3 и 5 утверждается, что функция Стеклова $f_{h,r+1}(x)$ имеет абсолютно непрерывную производную порядка r и ее вариация при всяком h не превосходит абсолютной константы M . На основании теоремы 1 из [3] существуют рациональные операторы типа Валле Пуссена $V_{4n}(x) = V_{4n}(x, f_{h,r+1})$ такие, что

$$\|f_{h,r+1}(x) - V_{4n}(x)\| \leq \frac{C_6}{n^{r+1}}, \quad (19)$$

причем полюсы $\{z_k\}$ рациональной функции $V_{4n}(x)$ подчинены неравенству:

$$|z_k - x| \geq C_7/n^{r+1}. \quad (20)$$

Здесь положительные константы C_6 и C_7 не зависят от h . Будем теперь уменьшать h к нулю в (19), тогда по лемме 3

$$\lim_{h \rightarrow 0} f_{h,r+1}(x) = f(x).$$

Рациональная тригонометрическая функция $V_{4n}(x)$ зависит от h , но из совокупности всех этих функций $\{V_{4n}(x)\}$ можно выбрать, в силу (19) и (20), последовательность, равномерно сходящуюся к некоторой рациональной тригонометрической функции $r_{4n}(x)$. Переходя в (19) к пределу по этой последовательности, получим (18).

Доказательство теоремы 1. На основе теоремы 2 и определения наилучшего приближения найдем:

$$R_{4n}^T(f) \leq \|f(x) - r_{4n}(x)\| \leq C_5/n^{r+1},$$

следовательно, и для наилучшего приближения $R_n^T(f)$ функции $f(x)$ из класса $W_{2\pi}^r \Omega_M$ будем иметь соотношение $R_n^T(f) \leq C_5/n^{r+1}$. Переходя в нем к супремуму по классу, получим верхнюю оценку (2).

Нижняя оценка в (2) вытекает из леммы 1, поскольку в согласии с [3] точный порядок наилучших рациональных приближений на более узком классе $W_{2\pi}^r V_M$ также равен $n^{-(r+1)}$.

Замечание 3. Для наилучших полиномиальных приближений на рассматриваемом классе нетрудно получить оценку:

$$\sup_{f \in W_{2n}^r M} E_n^r(f) \asymp \left(\frac{1}{n}\right)^r.$$

Замечание 4. Не обсуждая сколько-нибудь историю вопроса, заметим лишь, что имеются монографии [4—5], где можно найти и сведения по прямым теоремам рациональной аппроксимации.

Список литературы

1. К о р н е й ч у к Н. П. Экстремальные задачи теории приближений. М., 1976. С. 59.
2. Т и м а н А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного. М., 1960. С. 346. С. 177.
3. П у с а к В. Н. // Матем. сб. 1985. Т. 128. № 4. С. 492.
4. В г р а е с s D. Nonlinear Approximation Theory. Berlin, 1986.
5. Р е т р у ш е в Р. Р., Р о р о в В. А. Rational Approximation of real Functions. Cambridge, 1987.

Поступила в редакцию 05.03.93.

УДК 517.926.4

В. И. МИРОНЕНКО, О. А. КАСТРИЦА

ЛИНЕЙНЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ, У КОТОРЫХ ОТОБРАЖЕНИЕ ЗА ПЕРИОД СОХРАНЯЕТ НОРМУ

The reflective function method is used for investigation of linear periodic systems. Conditions of stability, asymptotic stability and unstability are obtained.

Будем рассматривать линейные дифференциальные системы, коэффициентами которых являются функции, заданные почти всюду на $\mathbb{R}$ и суммируемые на любом отрезке $[\alpha, \beta]$. Решениями такой системы будем считать абсолютно непрерывные вектор-функции соответствующей размерности, определенные на $\mathbb{R}$, почти всюду дифференцируемые и обращающие почти всюду на $\mathbb{R}$ данную систему в тождество.

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = P(t)x \quad (1)$$

с матрицей $P(t)$ размерности $n \times n$. Для любого $\xi \in \mathbb{R}^n$ существует единственно и продолжимо на $\mathbb{R}$ решение $x(t) = x(t, \xi)$ системы (1), удовлетворяющее условию $x(0, \xi) = \xi$ [1. С. 54]. Пусть $F(t)$ — отражающая матрица системы (1), задающая отражающую функцию [2, С. 11, 31] системы

$$x(t) \rightarrow F(t)x(t) = x(-t).$$

Лемма 1. Если $P^T(t) + P(t) = m(t)E$ — скалярная матрица, то для отражающей матрицы $F(t)$ системы (1) выполняется соотношение

$$F^T(t)F(t) = E \cdot e^{\int_0^t (m(\tau) + m(-\tau)) d\tau} \quad (2)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $M(t) = F^T(t)F(t)$. Используя для $F(t)$ основное соотношение для отражающей функции [2. С. 33]

$$\dot{F}(t) + F(t)P(t) + P(-t)F(t) = 0, \quad F(0) = E, \quad (3)$$

продифференцируем $M(t)$.

$$\begin{aligned} \dot{M}(t) &= \dot{F}^T(t)F(t) + F^T(t)\dot{F}(t) = \\ &= (-P^T(t)F^T(t) - F^T(t)P^T(-t))F(t) + \\ &+ F^T(t)(-F(t)P(t) - P(-t)F(t)) = \\ &= -P^T(t)M(t) - M(t)P(t) - m(-t)M(t). \end{aligned}$$

Таким образом, матрица $M(t)$ должна удовлетворять условиям

$$\dot{M}(t) = -P^T(t)M(t) - M(t)P(t) - m(-t)M(t), \quad M(0) = E. \quad (4)$$

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что матрица (2) удов-