

$$\begin{aligned}
2 \left(\alpha \left(X, (f_i)_o X \right), (f_i)_o Y \right) &= - \left(X, \left[(f_i)_o X, (f_i)_o Y \right]_m \right) - \\
&- \left((f_i)_o X, \left[X, (f_i)_o Y \right]_m \right) + \left((f_i)_o Y, \left[X, (f_i)_o X \right]_m \right) = \\
&= - \left(X, \left[J_i X_i, J_i Y_i \right]_m \right) - \left(J_i X_i, \left[X, J_i Y_i \right]_m \right) + \\
&+ \left(J_i Y_i, \left[X, J_i X_i \right]_m \right) = \left(X, \left[X_i, Y_i \right]_m \right).
\end{aligned}$$

Отсюда

$$2 \left((f_i)_o \alpha \left(X, X \right) - \alpha \left(X, (f_i)_o X \right), (f_i)_o Y \right) = -3 \left(X, \left[X_i, Y_i \right]_m \right).$$

Теперь все очевидно. Предложение доказано.

Следствие 1. Пусть G/H —однородное риманово Φ -пространство порядка 5 и $m \in h$. Если f -структура f_i интегрируема, то она является киллинговой.

Следствие 2. Пусть G/H —однородное риманово Φ -пространство порядка 5 и $m \in h$. Обе f -структуры f_1 и f_2 являются одновременно киллинговыми тогда и только тогда, когда интегрируема структура почти произведения C .

Список литературы

1. Балашенко В. В., Чурбанов Ю. Д. // Успехи мат. наук. 1990. Т. 45. Вып. 1(271). С. 167.
2. Степанов Н. А. // Изв. вузов. Мат. 1967. № 3. С. 88.
3. Балашенко В. В., Степанов Н. А. // Успехи мат. наук. 1991. Т. 46. Вып. 1(277). С. 205.
4. Чурбанов Ю. Д. // Изв. вузов. Мат. 1992. № 2. С. 88.
5. Яно К., Кон М. CR-подмногообразия в кэлеровом и сасакиевом многообразиях. М., 1990.
6. Nomizu K. // Amer. J. Math. 1954. V. 76. № 1. P. 33.
7. Балашенко В. В. // Докл. АН БССР. 1979. Т. 23. № 3. С. 209.
8. Гау А. // Journ. Diff. Geom. 1972. № 7. P. 343.
9. Грицанс А. С. // Успехи мат. наук. 1990. Т. 45. № 4. С. 149.

Поступила в редакцию 28.09.92.

УДК 519.872

И. И. ХОМИЧКОВ

АНАЛИЗ МОДЕЛИ p -НАСТОЙЧИВОГО ПРОТОКОЛА CSMA/CD

The algorithm of computing performances of model local network with CSMA/CD p -persistent protocol and a finite number of stations was obtained.

Исследуется однолинейная система массового обслуживания (СМО) с повторными вызовами, являющаяся аналитической моделью локальной вычислительной сети (ЛВС) с протоколом случайного множественного доступа, контролем несущей и обнаружением конфликтов (CSMA/CD).

Описание модели. Пусть в СМО поступает примитивный поток заявок с интенсивностью $G_n = \lambda(M - n)$, где M —число источников заявок, λ —интенсивность генерирования заявки отдельным источником, n —текущее число заявок в системе. Заявки данного потока назовем первичными. При поступлении в систему первичной заявки она мгновенно следует на прибор или становится в очередь, если он не свободен. Находящиеся в очереди заявки назовем готовыми. Длительность обслуживания заявок на приборе распределена по экспоненциальному закону с параметром μ . После завершения обслуживания заявка покидает систему. Если в этот момент в системе нет готовых заявок, то прибор освобождается. В противном случае каждая из них с вероятностью p мгновенно поступает на прибор, а с дополнительной вероятностью $1-p$ остается готовой. Пусть на прибор поступает j готовых заявок. Если $j = 0$, то в момент ухода из системы обслуженной заявки прибор освобождается, а число готовых

заявок в системе не меняется. Если $j = 1$, то прибор начинает обслуживать поступившую заявку, а число готовых заявок в системе уменьшается на единицу. Если $j > 1$, то в момент ухода обслуженной заявки прибор мгновенно освобождается, j готовых заявок, поступивших на прибор, становятся повторными, а число готовых заявок в системе соответственно уменьшается на j . Каждая повторная заявка, независимо от остальных повторных заявок, снова поступает на прибор через случайное время, распределенное по экспоненциальному закону с параметром ν . Повторная заявка обслуживается на приборе так же, как и первичная. Если в момент освобождения прибора в системе останутся готовые заявки, то через экспоненциальное время с параметром α процедура поступления готовых заявок на прибор повторяется (если к этому времени прибор еще не будет занят первичной или повторной заявкой).

Основной целью статьи является нахождение алгоритма расчета следующего стационарного распределения состояний СМО: $p_0(n, m)$, $n = 0, M-1$, $m = 0, n$, — стационарная вероятность того, что прибор свободен, в системе n заявок, из них m готовых; $p_1(n, m)$, $n = 1, M$, $m = 0, n-1$, — стационарная вероятность того, что прибор занят, в системе n заявок, из них m готовых. Введенные вероятности далее используются при расчете вероятностных характеристик модели ЛВС с р-настойчивым протоколом CSMA/CD.

Расчет стационарного распределения. Обычными методами теории массового обслуживания получим систему линейных уравнений относительно неизвестных стационарных вероятностей:

$$\begin{aligned} (\nu + G_n) p_0(n, 0) &= \sum_{i=2}^n \alpha p^i p_0(n, i) + \mu p_1(n+1, 0) + \\ &+ \sum_{i=2}^n \mu p^i p_1(n+1, i), \quad n = \overline{0, M-1}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} (\alpha + (n-m)\nu + G_n) p_0(n, m) &= (1-p)^m \alpha p_0(n, m) + \\ &+ \sum_{i=2}^{n-m} C_{m+i}^i \alpha p^i (1-p)^m p_0(n, m+i) + (1-p)^m \mu p_1(n+1, m) + \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} &+ \sum_{i=2}^{n-m} C_{m+i}^i \mu p^i (1-p)^m p_1(n+1, m+i), \quad n = \overline{1, M-1}, \quad m = \overline{1, n}, \\ (\mu + (n-m-1)\nu + G_n) p_1(n, m) &= \delta_n^1 \delta_m^0 G_{n-1} p_1(n-1, m-1) + \\ &+ \delta_n^0 (n-m)\nu p_1(n, m-1) + \delta_n^M (m+1)p(1-p)^m \mu p_1(n+1, m+1) + \\ &\delta_n^M (m+1)p(1-p)^m \alpha p_0(n, m+1) + G_{n-1} p_0(n-1, m) + \\ &+ \delta_n^M (n-m)\nu p_0(n, m), \quad n = \overline{1, M}, \quad m = \overline{0, n-1}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\delta_j^i = 0$, если $i \neq j$, $\delta_j^i = 1$, если $i = j$, $\delta_j^j = 1 - \delta_j^j$,

$$\sum_{n=0}^{M-1} \sum_{m=0}^n p_0(n, m) + \sum_{n=1}^M \sum_{m=0}^{n-1} p_1(n, m) = 1. \quad (4)$$

Нетрудно показать, что ранг системы (1)–(4), состоящий из $2M^2$ уравнений с $2M^2$ неизвестными, равен $2M^2$. Отсюда система уравнений имеет единственное решение. Перейдем к его нахождению.

Запишем соотношения (1)–(3) в векторной форме. Введем вектор-столбцы $P_0(n) = (p_0(n, 0), p_0(n, 1), \dots, p_0(n, n))^T$, $n = \overline{0, M-1}$, $P_1(n) = (p_1(n, 0), p_1(n, 1), \dots, p_1(n, n-1))^T$, $n = \overline{1, M}$, и определим матрицы: E_n — единичная

$(n \times n)$ -матрица, $E_{n+1,n}$, $E_{n,n+1}$ — соответственно $((n+1) \times n)$, $(n \times (n+1))$ матрицы вида: $E_{n+1,n} = \| O_n \mid E_n \|^\tau$, $E_{n,n+1} = \| E_n \mid O_n \|$, где O_n — нулевой n -вектор-столбец, $A_n = \| a_{i,j}^{(n)} \|$, $B_n = \| b_{i,j}^{(n)} \|$, $C_n = \| c_{i,j}^{(n)} \|$, $D_n = \| d_{i,j}^{(n)} \|$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n}$, где

$$a_{i,j}^{(n)} = \begin{cases} \mu + (n-j)\nu + G_n, & j = i; \\ -(n-j)\nu, & j = i-1; \\ 0, & j \neq i, j \neq i-1, \end{cases}$$

$$b_{i,j}^{(n)} = \begin{cases} C_{j-1}^{j-1} (1-p)^{i-1} p^{j-1}, & j \geq i; \\ 0, & j < i, \end{cases}$$

$$c_{i,j}^{(n)} = \begin{cases} C_{j-1}^{j-1} (1-p)^{i-1} p^{j-1}, & j = i+1; \\ 0, & j \neq i+1, \end{cases}$$

$$d_{i,j}^{(n)} = \begin{cases} n-i, & j = i; \\ 0, & j \neq i. \end{cases}$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} & ((\alpha + G_n)E_{n+1} + \nu D_{n+1})P_0(n) = \\ & = (B_{n+1} - C_{n+1})(\alpha P_0(n) + \mu P_1(n+1)), \quad n = \overline{1, M-1}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} A_n P_1(n) = & \delta_n^M E_{n,n+1} \{ C_{n+1} [\mu P_1(n+1) + \alpha P_0(n)] + \nu D_{n+1} P_0(n) \} + \\ & + G_{n-1} (P_0(n-1) + \delta_n^1 E_{n,n-1} P_1(n-1)), \quad n = \overline{1, M}. \end{aligned} \quad (6)$$

Преобразуем (6), заменив выражение в квадратных скобках соответствующим выражением из (5). После упрощений получим

$$\begin{aligned} A_n P_1(n) = & \delta_n^M E_{n,n+1} H_{n+1} P_0(n) + \\ & + G_{n-1} (P_0(n-1) + \delta_n^1 E_{n,n-1} P_1(n-1)), \quad n = \overline{1, M}, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$H_n = (E_n - C_n B_n^{-1})^{-1} (\nu D_n + (\alpha + G_{n-1})E_n) - (\alpha + G_{n-1})E_n. \quad (8)$$

Покажем, что соотношения (5), (7) можно представить в виде:

$$P_1(n) = G_{n-1} T_n (P_0(n-1) + \delta_n^1 E_{n,n-1} P_1(n-1)), \quad n = \overline{1, M}, \quad (9)$$

$$P_0(n) = S_{n+1} E_{n+1,n} P_1(n), \quad n = \overline{1, M-1}, \quad (10)$$

где матрицы T_n , S_{n+1} подлежат определению. Определим

$$T_M = A_M^{-1}, \quad (11)$$

тогда при $n = M$ соотношение (9) непосредственно следует из (7). Теперь предположим, что (9) выполняется при $n = k+1$, где k — произвольное число, $k = \overline{1, M-1}$. Покажем, что в этом случае соотношения (9), (10) будут справедливы и для $n = k$ при соответствующем выборе матриц T_k , S_{k+1} . Положим в (5) $n = k$ и подставим вместо $P_1(k+1)$ соответствующее выражение из (9) при $n = k+1$. Получим

$$P_0(k) = (T_{k+1}^{-1} G_{k+1}^{-1} L_{k+1} - E_{k+1})^{-1} E_{k+1,k} P_1(k), \quad k = \overline{1, M-1}, \quad (12)$$

где

$$L_k = \mu^{-1} [B_k^{-1} (E_k - C_k B_k^{-1})^{-1} ((\alpha + G_{k-1})E_k + \nu D_k) - \alpha E_k]. \quad (13)$$

Обозначим

$$S_k = (T_k^{-1} G_{k-1}^{-1} L_k - E_k)^{-1}, k = \overline{2, M}. \quad (14)$$

Тогда при $n = k$ справедливо соотношение (10). Далее рассмотрим (7) при $n = k$ и подставим вместо $P_0(k)$ правую часть из (10). Имеем

$$P_1(k) = (A_k - E_{k,k+1} H_{k+1} S_{k+1} E_{k+1,k})^{-1} G_{k-1} (P_0(k-1) + \\ + \delta_k^{-1} E_{k,k-1} P_1(k-1)), k = \overline{1, M-1}.$$

Отсюда, обозначив

$$T_k = (A_k - E_{k,k+1} H_{k+1} S_{k+1} E_{k+1,k})^{-1}, k = \overline{1, M-1}, \quad (15)$$

получим справедливость соотношения (9) при $n = k$. По индукции получаем, что соотношения (9), (10) имеют место для всех указанных n , если матрицы T_n , S_{n+1} определены по формулам (11), (14), (15).

Окончательно алгоритм расчета стационарного распределения $P_0(n)$, $n = \overline{0, M-1}$, $P_1(n)$, $n = \overline{1, M}$, выглядит следующим образом: вначале по формулам (11), (14), (15) рекуррентно по убывающим номерам k вычисляются матрицы T_k , $k = \overline{1, M}$, S_k , $k = \overline{2, M}$. Затем сточностью до множителя $P_0(0) = p_0(0, 0)$ по рекуррентным формулам (9), (10) рассчитывается стационарное распределение, после чего вероятность $P_0(0)$ находится из условия нормировки (4).

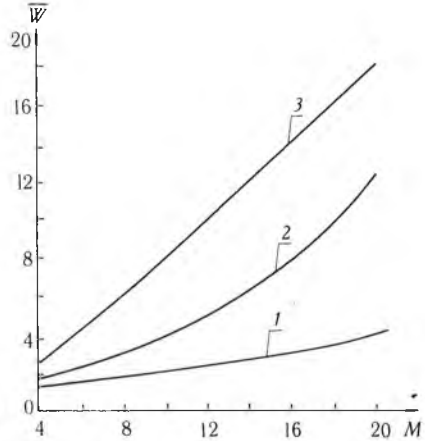
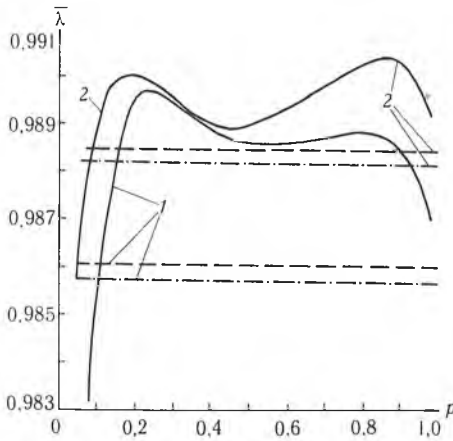


Рис. 1 Зависимость средней интенсивности выходящего потока $\bar{\lambda}$ от ρ : — ρ -настойчивый, --- 1-настойчивый, -.-.- неаустойчивый; 1- $\lambda = 0,5$, 2- $\lambda = 1,25$

Рис. 2. Зависимость средней задержки $\bar{W}$ от числа источников нагрузки M : 1- $\lambda = 0,05$, 2- $\lambda = 0,125$, 3- $\lambda = 0,5$

Численный пример. Используем полученное стационарное распределение для расчета следующих характеристик СМО:

1. Среднее число заявок в системе $\bar{M}$:

$$\bar{M} = \sum_{n=0}^{M-1} n \sum_{m=0}^n p_0(n, m) + \sum_{n=1}^M n \sum_{m=0}^{n-1} p_1(n, m).$$

2. Средняя интенсивность выходящего потока: $\bar{\lambda}$:

$$\bar{\lambda} = \mu \sum_{n=1}^M \sum_{m=0}^{n-1} p_1(n, m).$$

Можно показать, что $\bar{\lambda} = \lambda (M - \bar{M})$.

3. Среднее время пребывания заявок в системе $\overline{W} : \overline{W} = M / \lambda$.

В численных расчетах далее предполагается $\mu = 1$, $\alpha = 100$, $\nu = 10$. На рис. 1 сравниваются зависимости средней интенсивности выходящего потока (производительности ЛС) λ от вероятности p в аналогичных моделях с p -настойчивым, 1-настойчивым [1] и ненастойчивым [2] протоколом CSMA/CD. Расчет произведен для моделей с числом источников первичной нагрузки $M = 10$ при различных значениях λ . Как видно, при соответствующем выборе вероятности p p -настойчивый протокол дает более высокую производительность, чем другие протоколы.

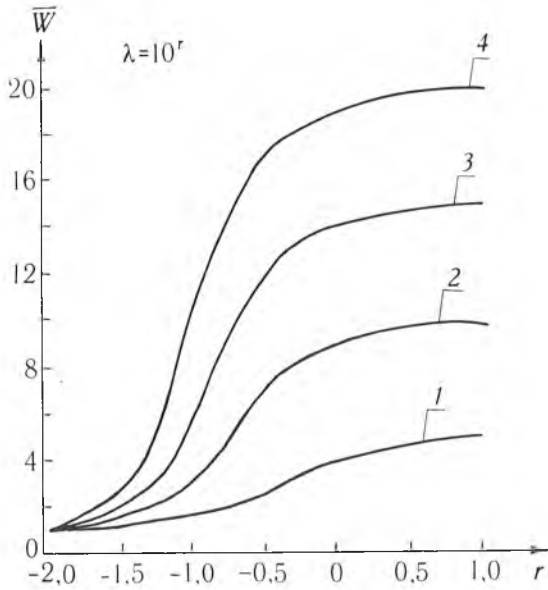


Рис. 3. Зависимость средней задержки $\overline{W}$ от первичной нагрузки λ :

1— $M = 5$, 2— $M = 10$, 3— $M = 15$, 4— $M = 20$

На рис. 2 показана зависимость среднего времени пребывания заявок в СМО $\overline{W}$ от числа источников первичной нагрузки M . Расчет произведен при $p = 0,6$ и различных значениях λ . На рис. 3 приведена зависимость характеристики $\overline{W}$ от первичной нагрузки λ при различных M и $p = 0,6$. Как и следовало ожидать, средняя задержка заявок в СМО $\overline{W}$ растет с ростом первичной нагрузки λ или числа ее источников M .

Список литературы

1. Хомичков И. И. // Математические методы исследования сетей связи и сетей ЭВМ. Мн., 1990. С. 151.
2. Ионин Г. Л., Седол Я. Я. // Латвийский математический ежегодник. Рига, 1970. № 7. С. 71.

Поступила в редакцию 29.12.92.