На рис. 2 изображено перемещение терминальной точки оптимальной траектории $x^0(t^*/\tau, z)$ в зависимости от реализовавшейся позиции. На графике отмечены терминальные состояния, соответствующие указанным выше моментам.

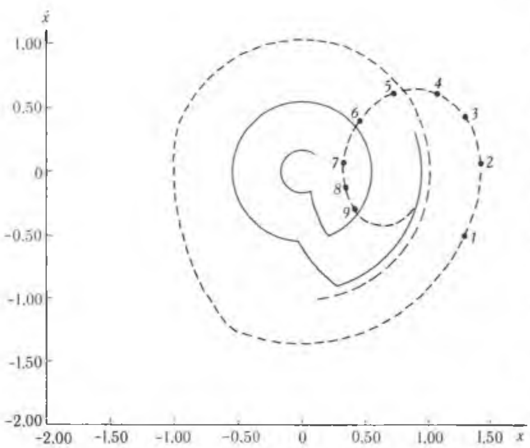


Рис. 1

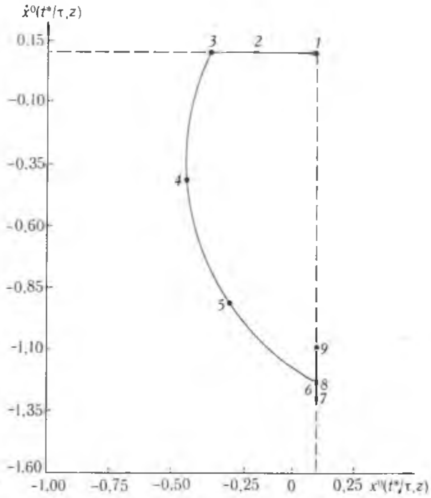


Рис. 2

## Список литературы


1. П о н т р я г и н Л. С. и др. Математическая теория оптимальных процессов. М., 1969.

2. К р а с о в с к и й Н. Н. Теория управления движением. М., 1968.

3. Г а б а с о в Р., К и р и л л о в а Ф. М. Конструктивные методы оптимизации. Мн., 1984. Ч. 2.

4. Г а б а с о в Р., К и р и л л о в а Ф. М., К о с т ю к о в а О. И. // Докл. АН СССР. 1991. Т. 320. № 6. С. 1294.


Поступила в редакцию 08.06.92.

*УДК 514.765*

*Ю. Д. ЧУРБАНОВ*

# КАНОНИЧЕСКИЕ f-СТРУКТУРЫ ОДНОРОДНЫХ Ф-ПРОСТРАНСТВ ПОРЯДКА 5

Properties of canonical f-structures ($f^3 + f = 0$) on homogeneous Ф-spaces of order 5 are investigated.

Пусть Ф—автоморфизм пятого порядка связной группы Ли $G$, $G/H$—однородное Ф-пространство, отвечающее этому автоморфизму [1], $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$—каноническое редуктивное разложение алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы $G$ [2], $\varphi = (d\Phi)_e$—автоморфизм $\mathfrak{g}$, $\theta = \varphi|_{\mathfrak{m}}$.

Как показано в [1] и [3], на $G/H$ существуют инвариантные структура почти произведения $C$ и почти комплексные структуры $J$ и $\tilde{J}$, операторы которых на касательном пространстве $\mathfrak{m}$ обозначим через $C_0$, $J_0$ и $\tilde{J}_0$ соответственно, причем $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2$, $\mathfrak{m}_i = \{X \in \mathfrak{m} \mid C_0 X = (-1)^{i+1} X\}$, $i = 1, 2$, $J_0 X = J_1 X_1 + J_2 X_2$, $\tilde{J}_0 X = J_1 X_1 - J_2 X_2$ для всех $X \in \mathfrak{m}$, $X = X_1 + X_2$, $X_i \in \mathfrak{m}_i$ и

$$\theta X_1 = aX_1 + bJ_1 X_1, \quad \theta X_2 = cX_2 + dJ_2 X_2, \tag{1}$$

где $a = \cos(2\pi/5)$, $b = \sin(2\pi/5)$, $c = \cos(4\pi/5)$, $d = \sin(4\pi/5)$.

Кроме того [3], на $G/H$ существуют две инвариантные f-структуры $f_1$ и $f_2$, операторы которых на $\mathfrak{m}$ имеют вид:

$$(f_1)_0 = \gamma(\theta - \theta^4) + \delta(\theta^2 - \theta^3), \quad (f_2)_0 = \delta(\theta - \theta^4) - \gamma(\theta^2 - \theta^3),$$

где $\gamma = 2b/5$, $\delta = 2d/5$.

В работе исследуются свойства этих f-структур, их интегрируемость, связь с инвариантными аффинными связностями на однородных Ф-пространствах порядка 5.

**Лемма 1.** $(f_1)_o|_{\mathfrak{m}_1} = J_1, (f_2)_o|_{\mathfrak{m}_2} = 0,$

$$(f_2)_o|_{\mathfrak{m}_1} = 0, (f_2)_o|_{\mathfrak{m}_2} = J_2,$$

Доказательство. Пусть $X \in \mathfrak{m}_1$, $Y \in \mathfrak{m}_2$. Тогда [4]

$$\theta X + \theta^4 X = 2aX,\ \theta^2 X + \theta^3 X = 2cX,$$
$$\theta Y + \theta^4 Y = 2cY,\ \theta^2 Y + \theta^3 Y = 2aY.$$

Отсюда

$$(f_1)_o X = \frac{2}{5}(b\theta X - b\theta^4 X + d\theta^2 X - d\theta^3 X) =$$

$$= \frac{2}{5}((b + 2ad)\theta X - (ab + d + cd)X) =$$

$$= \frac{4}{5}((2a^2 d - cd - d)X + (b^2 + 2abd)J_1 X) = J_1 X,$$

так как $2a^2 - c = 1$, $b^2 + 2abd = 5/4$.

Аналогично

$$(f_2)_o Y = \frac{2}{5}(b\theta Y - b\theta^4 Y + d\theta^2 Y - d\theta^3 Y) =$$

$$= \frac{4}{5}((b + 2dc)\theta Y - (cb + ad + d)Y) = 0,$$

так как $2dc = -b$, $cb + ad = -d$.

Точно так же доказываются другие равенства. Лемма доказана.

*Следствие.* $(f_1)_o + (f_2)_o = J_o$, $(f_1)_o - (f_2)_o = \tilde{J}_o$,

$$(f_1)_o = \frac{1}{2} J_o (C_o + E),\ (f_2)_o = \frac{1}{2} J_o (E - C_o).$$

*Предложение 1.* Почти комплексная структура J интегрируема тогда и только тогда, когда $[\mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_2]_{\mathfrak{m}} = [\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2]_2 = \{0\}$, где индекс i означает проектирование на $\mathfrak{m}_i$ относительно разложения $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2$.

Доказательство. В силу инвариантности почти комплексной структуры относительно G, ее тензор кручения также будет инвариантным, а потому будет полностью определяться своим значением $N_o$ в точке $p_o = H \in G/H$. Но

$$N_o(X, Y) = [X, Y]_{\mathfrak{m}} + J_o[J_o X, Y]_{\mathfrak{m}} + J_o[X, J_o Y]_{\mathfrak{m}} - [J_o X, J_o Y]_{\mathfrak{m}}$$

для всех $X, Y \in \mathfrak{m}$. Учитывая [4], получаем

$$N_o(X, Y) = 4[X_2, Y_2]_1 + 4[X_2, Y_1]_2 + 4[X_1, Y_2]_2,$$

что, очевидно, доказывает теорему.

Аналогично доказывается

*Предложение 2.* Почти комплексная структура $\tilde{J}$ интегрируема тогда и только тогда, когда $[\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_1]_{\mathfrak{m}} = [\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2]_1 = \{0\}$.

*Предложение 3.* f-структура $f_i$ $(i = 1, 2)$ интегрируема тогда и только тогда, когда интегрируема структура почти произведения C и $[\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2]_i = \{0\}$.

Доказательство. Рассуждая так же, как и при доказательстве предложения 1, видим что тензор Нейенхейса [5] $(N_i)_o$ f-структуры $f_i$ в точке $p_o \in G/H$ имеет вид:

$$(N_i)_o(X, Y) = [(f_i)_o X, (f_i)_o Y]_{\mathfrak{m}} - (f_i)_o[(f_i)_o X, Y]_{\mathfrak{m}} -$$

$$-(f_i)_o[X, (f_i)_o Y]_{\mathfrak{m}} + (f_i)_o^2[X, Y]_{\mathfrak{m}},\ X, Y \in \mathfrak{m}.$$

Учитывая лемму 1 и [4], получаем

$$(N_i)_o(X,Y) = -[X_1, Y_1]_2 - [X_2, Y_2]_1 - 2[X_1, Y_2]_i - 2[X_2, Y_1]_i.$$

Отсюда и из [1] имеем требуемое. Предложение доказано.

*Следствие.* Интегрируемость f-структуры $f_1$ влечет интегрируемость почти комплексной структуры J, а интегрируемость $f_2$—J.

Пусть $\nabla$—инвариантная аффинная связность на G/H, $\alpha$—ее функция Номидзу [6]. Очевидно, что $\nabla$ является $f_i$—связностью, $i = 1, 2$, $(\nabla f_i = 0)$ тогда и только тогда, когда для всех $X, Y \in \mathfrak{m}$

$$(f_i)_o \alpha(X, Y) = \alpha(X, (f_i)_o Y).$$

**Лемма 2.** Если инвариантная аффинная связность $\nabla$ однородного Ф-пространства порядка 5 является $f_i$-связностью $(i = 1, 2)$, то она является связностью почти произведения $(\nabla C = 0[1])$.

Доказательство. Если для всех $X, Y \in \mathfrak{m}$ $(f_i)_o \alpha(X, Y) = \alpha(X, (f_i)_o Y)$, то $\alpha(X, Y)_i = \alpha(X, Y_i)$. Отсюда $\alpha(X, Y_{3-i}) = \alpha(X, Y)_{3-i}$, и, значит, $C_o \alpha(X, Y) = \alpha(X, C_o Y)$. Лемма доказана.

**Лемма 3.** Инвариантная аффинная связность $\nabla$ однородного Ф-пространства порядка 5 является C- и J-связностью тогда и только тогда, когда она является $f_1$- и $f_2$- связностью.

Доказательство. Если $\nabla$ является C и J связностью, то [1] для всех $X, Y \in \mathfrak{m}$ $J_i \alpha(X, Y) = \alpha(X, J_i Y)$, что равносильно $(f_i)_o \alpha(X, Y) = \alpha(X, (f_i)_o Y)$. Обратное очевидно. Лемма доказана.

Из лемм 2 и 3 и теорем 5 и 7 работы [1] вытекают следующие предложения.

*Предложение 4.* На однородном Ф-пространстве G/H порядка 5 существует единственная аффинная связность $\nabla$, которая обладает следующими свойствами:

1) $\nabla$ инвариантна относительно G;
2) $\nabla$ инвариантна относительно D [2];
3) $\nabla$ является $f_1$- и $f_2$-связностью.

*Предложение 5.* Пусть $\nabla$—аффинная связность на однородном Ф-пространстве порядка 5, инвариантная относительно G и D. Если $\nabla$ является $f_i$-связностью для какого-либо $i = 1, 2$, то для ее функции Номидзу $\alpha$ и любых $X, Y \in \mathfrak{m}$ $\alpha(X_1, Y_1) = \alpha(X_2, Y_2) = 0$.

Пусть G/H—риманово однородное Ф-пространство порядка 5, причем диффеоморфизм D является изометрией. Обозначим через (,) скалярное произведение на $\mathfrak{m}$, порожденное римановой метрикой пространства G/H. Пусть $\mathfrak{m}'$ обозначает подпространство в $\mathfrak{g}$, порожденное векторами вида $[X, \theta X]$, $X \in \mathfrak{m}$ [7].

Напомним [8], что если—$\alpha$ функция Номидзу римановой связности $\nabla$, то для всех $X, Y, Z \in \mathfrak{m}$

$$2(\alpha(X, Y), Z) = -(X, [Y, Z]_{\mathfrak{m}}) - (Y, [X, Z]_{\mathfrak{m}}) + \\ + (Z, [X, Y]_{\mathfrak{m}}). \qquad (2)$$

**Лемма 4.** Пусть G/H—риманово однородное Ф-пространство порядка 5. Тогда для всех $X, Y \in \mathfrak{m}$ $((f_i)_o X, Y) + (X, (f_i)_o Y) = 0$.

Доказательство. Учитывая [1] и лемму 1, имеем

$$((f_i)_o X, Y) = (J_i X_i, Y) = (J_i X_i, Y_i) = -(X_i, J_i Y_i) = -(X, (f_i)_o Y).$$

Лемма доказана.

*Предложение 6.* Пусть G/H—однородное риманово Ф-пространство порядка 5, у которого $\mathfrak{m}' \in \alpha$. f-структура $f_i$ является киллинговой [9] тогда и только тогда, когда $[\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_i]_{\mathfrak{m}} = \{0\}$.

Доказательство. Пусть $\alpha$—функция Номидзу римановой связности $\nabla$. Тогда, учитывая лемму 4 и равенство (2), имеем

$$2((f_i)_o \alpha(X, X), (f_i)_o Y) =$$

$$= -2(\alpha(X, X), (f_i)_o^2 Y) = 2(\alpha(X, X), Y_i) = -2(X, [X_i, Y_i]_{\mathfrak{m}}).$$

Далее, из (2) и [4]:

$$2\big(\alpha(X,(f_i)_oX),\ (f_i)_oY\big) = -\big(X,[\,(f_i)_oX,(f_i)_oY\,]_m\big) -$$

$$-\big(\,(f_i)_oX,[\,X,(f_i)_oY\,]_m\big) + \big(\,(f_i)_oY,[\,X,(f_i)_oX\,]_m\big) =$$

$$= -\big(X,[\,J_iX_i,\ J_iY_i\,]_m\big) - \big(J_iX_i,[\,X,\ J_iY_i\,]_m\big) +$$

$$+\big(J_iY_i,[\,X,J_iX_i\,]_m\big) = \big(X,[\,X_i,Y_i\,]_m\big).$$

Отсюда

$$2\big(\,(f_i)_o\alpha(X,X)-\alpha(X,(f_i)_oX),\ (f_i)_oY\big) = -3\big(X,\ [\,X_i,Y_i\,]_m\big).$$

Теперь все очевидно. Предложение доказано.

*Следствие 1.* Пусть G/H—однородное риманово Ф-пространство порядка 5 и $\mathbf{m}^{\mathbf{v}}\in\mathbf{h}$. Если f-структура $f_i$ интегрируема, то она является киллинговой.

*Следствие 2.* Пусть G/H—однородное риманово Ф-пространство порядка 5 и $\mathbf{m}^{\mathbf{v}}\in\mathbf{h}$. Обе f-структуры $f_1$ и $f_2$ являются одновременно киллинговыми тогда и только тогда, когда интегрируема структура почти произведения С.

## Список литературы


1. Балащенко В. В., Чурбанов Ю. Д. // Успехи мат. наук. 1990. Т. 45. Вып. 1(271). С. 167.
2. Степанов Н. А. // Изв. вузов. Мат. 1967. № 3. С. 88.
3. Балащенко В. В., Степанов Н. А. // Успехи мат. наук. 1991. Т. 46. Вып. 1(277). С. 205.
4. Чурбанов Ю. Д. // Изв. вузов. Мат. 1992. № 2. С. 88.
5. Яно К., Кон М. CR-подмногообразия в кэлеровом и сасакиевом многообразиях. М., 1990.
6. Nomizu K. // Amer. J. Math. 1954. V. 76. № 1. P. 33.
7. Балащенко В. В. // Докл. АН БССР. 1979. Т. 23. № 3. С. 209.
8. Gray A. // Journ. Diff. Geom. 1972. № 7. P. 343.
9. Грицанс А. С. // Успехи мат. наук. 1990. Т. 45. № 4. С. 149.



Поступила в редакцию 28.09.92.



*УДК 519.872*



*И. И. ХОМИЧКОВ*


# АНАЛИЗ МОДЕЛИ *p*-НАСТОЙЧИВОГО ПРОТОКОЛА CSMA/CD


The algoritm of computing performances of model local network with CSMA/CD p-persistent protocol and a finite number of stations was obtained.


Исследуется однолинейная система массового обслуживания (СМО) с повторными вызовами, являющаяся аналитической моделью локальной вычислительной сети (ЛВС) с протоколом случайного множественного доступа, контролем несущей и обнаружением конфликтов (CSMA/CD).

*Описание модели.* Пусть в СМО поступает примитивный поток заявок с интенсивностью $G_n=\lambda(M-n)$, где M—число источников заявок, $\lambda$—интенсивность генерирования заявки отдельным источником, n—текущее число заявок в системе. Заявки данного потока назовем первичными. При поступлении в систему первичной заявки она мгновенно следует на прибор или становится в очередь, если он не свободен. Находящиеся в очереди заявки назовем готовыми. Длительность обслуживания заявок на приборе распределена по экспоненциальному закону с параметром $\mu$. После завершения обслуживания заявка покидает систему. Если в этот момент в системе нет готовых заявок, то прибор освобождается. В противном случае каждая из них с вероятностью p мгновенно поступает на прибор, а с дополнительной вероятностью 1-p остается готовой. Пусть на прибор поступает j готовых заявок. Если j = 0, то в момент ухода из системы обслуженной заявки прибор освобождается, а число готовых