

ПОСТРОЕНИЕ РЕГУЛЯТОРА ДЛЯ ОПТИМИЗАЦИИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ТЕРМИНАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ-НЕРАВЕНСТВАМИ

An algorithm for synthesis of optimal controls in the real-time mode for linear systems with terminal constraints-inequalities is described.

1. В классе кусочно-непрерывных управлений $u(t)$, $t \in T = [0, t^*]$ рассмотрим линейную задачу:

$$\begin{aligned} J(u) = c'x(t^*) \rightarrow \max, \quad \dot{x} &= Ax + bu, \quad x(0) = x_0, \\ h_i'x(t^*) &\geq g_i, \quad i \in I = \{1, \dots, m\}, \\ |u(t)| &\leq 1, \quad t \in T, \quad (x \in R^n, u \in R). \end{aligned} \quad (1)$$

Задача (1) с позиции программной оптимизации исследована достаточно хорошо [1—3]. Для построения оптимального управления типа обратной связи погрузим задачу (1) в семейство задач

$$\begin{aligned} J_s(u) = c'x(t^*) \rightarrow \max, \quad \dot{x} &= Ax + bu, \quad x(\tau) = z, \\ h_i'x(t^*) &\geq g_i, \quad i \in I, \\ |u(t)| &\leq 1, \quad t \in T = [\tau, t^*], \end{aligned} \quad (2)$$

зависящее от позиции $s = \{\tau, z\}$. Позицию s назовем допустимой, если найдется такое кусочно-непрерывное (допустимое) управление $u(t)$, $t \in T_s$, что оно вместе с соответствующей (допустимой) траекторией $x(t)$, $t \in T_s$, удовлетворяет всем ограничениям задачи (2). Множество допустимых позиций обозначим через S . Пусть $u^0(t|s)$, $x^0(t|s)$, $t \in T_s$, $s \in S$, — оптимальные программные управление и траектория в задаче (2).

Кусочно-непрерывная функция $u^0(s)$, $s \in S$, удовлетворяющая неравенству $|u^0(s)| \leq 1$, $s \in S$, называется оптимальным управлением типа обратной связи, если на траектории $\dot{x}(t|s)$, $t \in T_s$, системы $\dot{x} = Ax + bu^0(t, x)$, $x(\tau) = z$, выполняется равенство $\dot{x}(t|s) = x^0(t|s)$, $t \in T_s$, $s \in S$.

Оптимальное управление типа обратной связи используется в реальных ситуациях, когда на систему действуют возмущения, не учтенные в математической модели (1).

Предположим, что поведение динамической системы, замкнутой оптимальной обратной связью $u^0(s)$, в реальных условиях описывается уравнением

$$\dot{x} = Ax + bu^0(t, x) + w(t), \quad x(0) = x_0, \quad (3)$$

где $w(t)$, $t \in T^0 = [0, t^0]$, $t^0 < t^*$, $w(t) \equiv 0$, $t > t^0$, — неизвестное кусочно-непрерывное возмущение, t^0 — такой момент, что для всех $t \in T^0$ выполняется условие

$$\text{rank} \{ h_i' F(t^* - t)b, \quad t \in T_s(\tau), \quad i \in I(\tau) \} = |I(\tau)|,$$

где $T_s(\tau)$ — совокупность точек разрыва оптимального управления задачи (2), $\dot{F} = AF$, $F(0) = E$, $I(\tau) = \{i \in I : h_i' x^0(t^*/\tau, z) = g_i\}$.

Обозначим через $x^*(t)$, $t \in T$, траекторию динамической системы (3), реализовавшуюся в некотором конкретном процессе с возмущением $w^*(t)$, $t \in T^0$. Тогда функция $u^*(t) = u^0(t, x^*(t))$, $t \in T$, представляет реализацию оптимального управления типа обратной связи, которое циркулирует в замкнутой системе (3).

Устройство, способное в каждом конкретном процессе функционирования системы (3) вырабатывать в режиме реального времени управление $u^*(t)$, $t \in T$, назовем оптимальным регулятором.

2. В процессе работы регулятор в каждый момент сталкивается с

задачей (2). Согласно [3], оптимальное управление $u_r^0(t) = u^0(t|\tau, z), t \in T_r$, задачи (2) имеет вид:

$$u_r^0(t) = \text{sign} \Delta_r^0(t), \quad t \in T_r, \quad (4)$$

где

$$\Delta_r^0(t) = \Delta^0(t|\tau, z) = \psi'(t)b,$$

$$\dot{\psi} = -A'\psi, \quad \psi(t^*) = c - \sum_{i \in I(\tau)} h_i y_i(\tau),$$

$x_r(t^*) = x(t^*|\tau, z)$ — терминальное состояние системы, $y_i(\tau) = y_i(\tau, z)$, $i \in I(\tau)$, — оптимальные потенциалы задачи (2).

Таким образом, оптимальное управление определяется поведением совокупности

$$t_j(\tau), \quad j \in P = \{1, \dots, p\}, \quad y_i(\tau), \quad i \in I(\tau), \quad (5)$$

состоящей из нулей $t_1(\tau) < \dots < t_p(\tau)$ коуправления $\Delta^0(t)$, $t \in T_r$, и потенциалов $y_i(\tau)$, $i \in I(\tau)$.

Элементы (5) удовлетворяют системе уравнений:

$$f_k(\tau; t_j(\tau), j \in P; z) = 0, \quad k \in I(\tau), \quad (6)$$

$$q_l(t_j(\tau), j \in P; y_i(\tau), i \in I(\tau)) = 0, \quad l \in P,$$

где

$$f_k(\tau; t_j, j \in P; z) = \sum_{j=0}^p \int_{t_j}^{t_{j+1}} h'_k(t) dt \cdot k_j + h'_k F(t^* - \tau) z - g_k, \quad k \in I(\tau),$$

$$q_l(t_j, j \in P; y_i, i \in I(\tau)) = (c' - \sum_{i \in I(\tau)} y_i h'_i) F(t^* - t_l) b, \quad l \in P,$$

$$t_0 = \tau, \quad t_{p+1} = t^*, \quad h'_k(t) = h'_k F(t^* - t) b,$$

$$k_j = \text{sign} \Delta_r^0(t_j + 0), \quad j = \overline{0, p}.$$

Систему уравнений (6) назовем определяющими уравнениями оптимального регулятора. Численный метод решения определяющих уравнений в режиме реального времени аналогичен методу решения определяющих уравнений для задачи с терминальными ограничениями-равенствами [4]. Приведем дополнения, связанные с новым типом терминальных ограничений.

Пусть регулятор проработал на промежутке $[0, \tau]$. Для идентификации множества $I(\tau)$ в процессе решения определяющих уравнений следим за значениями $y_i(\tau - 0)$, $i \in I(\tau - 0)$. Если $y_i(\tau - 0) = 0$, $i \in I(\tau - 0)$, то полагаем $I(\tau) = I(\tau - 0) \setminus \{i\}$. Кроме того, контролируем поведение пассивных терминальных выходных сигналов $h'_i x_{r-0}(t^*)$, $i \in I \setminus I(\tau - 0)$. Если $h'_i x_{r-0}(t^*) = g_i$, $i \in I \setminus I(\tau - 0)$, то полагаем $I(\tau) = I(\tau - 0) \cup \{i\}$.

Предполагаем, что в момент τ число основных ограничений может измениться не более чем на 1. Пусть при всех $\tau \in T_p = [\tau_1, \tau_2[$, $I(\tau) = \emptyset$, а $I(\tau_2) = \{j\}$. Для $\tau \in T_p$ оптимальное программное управление задачи (2) принимает вид $u_r^0(t) = \text{sign } c'b$, $t \in T_r$, $\tau \in T_p$.

Для отыскания в момент τ_2 структуры оптимального коуправления и начального приближения для элементов (5) решаем m вспомогательных задач, k -я задача имеет вид:

$$\begin{aligned} c'x(t^*) \rightarrow \max, \quad \dot{x} &= Ax + bu, \quad x(\tau) = x^*(\tau), \\ h'_i x(t^*) &\geq g_i, \quad i \in I \setminus \{k\}, \quad h'_k x(t^*) \geq h'_k x_r(t^*) + \varepsilon, \end{aligned} \quad (7)$$

$$|u(t)| \leq 1, \quad t \in T_r,$$

$\tau \in T_p$, $k = \overline{1, m}$, $\varepsilon > 0$ — малое число.

В момент τ_2 структура оптимального коуправления задачи (2) совпадает со структурой j -й вспомогательной задачи, и в качестве начального приближения элементов (5) для решения определяющих уравнений (6) берем элементы (5), построенные в j -й задаче.

Если $\tau_1 = 0$, то строим программные решения вспомогательных задач при $\tau = 0$, $x(\tau) = x_0$. Если же $\tau_1 > 0$, то имеется промежуток $[\tau_0, \tau_1]$, на котором $I(\tau) = \{1\}$. Формирование вспомогательных задач начинаем в момент $\tau = \tau_0$, когда остается только одно активное ограничение, k -я задача имеет вид (7), если $h_k \neq h_1$, если $h_k \parallel h_1$, то терминальными ограничениями вспомогательной задачи являются

$$h_i' x(t^*) \geq g_i, \quad i \in I \setminus \{k, 1\},$$

$$h_1' x(t^*) - 2\varepsilon \leq h_k' x(t^*) \leq h_1' x(t^*) - \varepsilon.$$

В качестве начального приближения для вспомогательных задач в момент τ_0 берем решение задачи (2) и решаем их с помощью определяющих уравнений типа (6).

3. Для избежания в процессе управления скользящих режимов зададим параметр $\nu > 0$, характеризующий предельную частоту переключения управлений, вырабатываемых регулятором. Как и в [4], работа регулятора организуется таким образом, что в каждом конкретном процессе точки переключения вырабатываемого управления $u^*(t)$, $t \in T$, отстоят друг от друга не менее чем на ν .

4. П р и м е р. Рассмотрим задачу управления осциллятором

$$\int_0^{4\pi} u(t) dt \rightarrow \min, \quad \ddot{x} + x = u, \quad x(0) = 0,900705, \quad \dot{x}(0) = 0,311519,$$

$$0 \leq u(t) \leq 1, \quad t \in [0, 4\pi]$$

с двумя типами терминальных ограничений

$$I. \quad |x(4\pi)| \leq 0,1, \quad |\dot{x}(4\pi)| \leq 0,1;$$

$$II. \quad x(4\pi) \leq 0,1, \quad \dot{x}(4\pi) \leq 0,1.$$

N	$t_i, i = \overline{1, p}$	$x(t^*), \dot{x}(t^*)$	J^0	$u(+0)$
I, II	1,620511; 2,037614 7,903697; 8,320799	0,1 0,1	0,834206	0
I	6,350571; 7,655073	0,1 -0,1	1,304503	0
II	7,442053; 8,265910	0,1 -1,02293	0,823857	0

П р и м е ч а н и я: N—тип терминального ограничения; $t_i, i = \overline{1, p}$ —точки переключения управлений $u^0(t/0, x_0)$, $u^*(t)$, $t \in T$; $x(t^*)$, $\dot{x}(t^*)$ —терминальное состояние; J^0 —значение критерия качества; $u(+0)$ —значение управления на первом интервале постоянства.

В таблице приведены результаты решения невозмущенных задач (первая строка) и результаты работы регуляторов при действии возмущения $w(t) = \sin 0,5t$, $0 \leq t \leq 6,35$.

На рис. 1 приведены фазовые траектории для оптимального программного управления (сплошная линия) и для управления, выработанного регулятором в задаче с терминальными ограничениями II (пунктирная линия). Точками 1, 2, ...9 занумерованы состояния системы в моменты $t_1 = 2,02$; $t_2 = 2,35$; $t_3 = 2,67$; $t_4 = 3,21$; $t_5 = 3,75$; $t_6 = 4,29$; $t_7 = 4,72$; $t_8 = 5,21$; $t_9 = 5,77$.

На рис. 2 изображено перемещение терминальной точки оптимальной траектории $x^0(t^*/\tau, z)$ в зависимости от реализовавшейся позиции. На графике отмечены терминальные состояния, соответствующие указанным выше моментам.

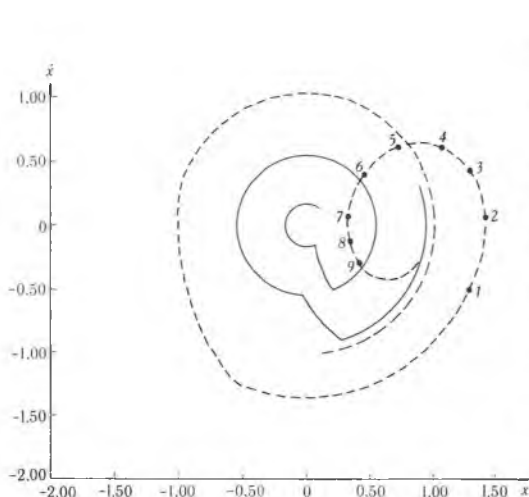


Рис. 1

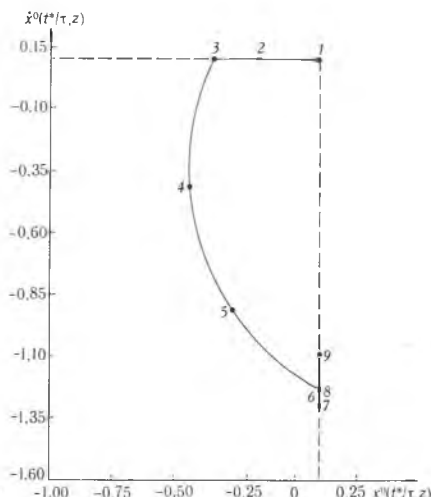


Рис. 2

Список литературы

1. Понтрягин Л. С. и др. Математическая теория оптимальных процессов. М., 1969.
2. Красовский Н. Н. Теория управления движением. М., 1968.
3. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Конструктивные методы оптимизации. Мн., 1984. Ч. 2.
4. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Костюкова О. И. // Докл. АН СССР. 1991. Т. 320. № 6. С. 1294.

Поступила в редакцию 08.06.92.

УДК 514.765

Ю. Д. ЧУРБАНОВ

КАНОНИЧЕСКИЕ f-СТРУКТУРЫ ОДНОРОДНЫХ Ф-ПРОСТРАНСТВ ПОРЯДКА 5

Properties of canonical f -structures ($f^3 + f = 0$) on homogeneous Φ -spaces of order 5 are investigated.

Пусть Φ —автоморфизм пятого порядка связной группы Ли G , G/H —однородное Φ -пространство, отвечающее этому автоморфизму [1], $g = h + m$ —каноническое редуктивное разложение алгебры Ли g группы G [2], $\varphi = (d\Phi)_g$ —автоморфизм g , $\theta = \varphi|_m$.

Как показано в [1] и [3], на G/H существуют инвариантные структура почти произведения S и почти комплексные структуры J и $\bar{J}$, операторы которых на касательном пространстве m обозначим через S_0 , J_0 и $\bar{J}_0$ соответственно, причем $m = m_1 + m_2$, $m_i = \{X \in m \mid C_0 X = (-1)^{i+1} X\}$, $i = 1, 2$, $J_0 X = J_1 X_1 + J_2 X_2$, $\bar{J}_0 X = J_1 X_1 - J_2 X_2$ для всех $X \in m$, $X = X_1 + X_2$, $X_i \in m_i$ и

$$\theta X_1 = aX_1 + bJ_1 X_1, \quad \theta X_2 = cX_2 + dJ_2 X_2, \quad (1)$$

где $a = \cos(2\pi/5)$, $b = \sin(2\pi/5)$, $c = \cos(4\pi/5)$, $d = \sin(4\pi/5)$.

Кроме того [3], на G/H существуют две инвариантные f -структуры f_1 и f_2 , операторы которых на m имеют вид:

$$(f_1)_0 = \gamma(\theta - \theta^4) + \delta(\theta^2 - \theta^3), \quad (f_2)_0 = \delta(\theta - \theta^4) - \gamma(\theta^2 - \theta^3),$$

где $\gamma = 2b/5$, $\delta = 2d/5$.