$$\sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^k Q_k^n(\alpha) N_{k+1}(x, y; \lambda)$$

сходится в пространстве $L^2(X \times X, \lambda)$ к функции $M(x, y; \lambda)$. Положим

$$R(x, y; \lambda) = N(x, y; \lambda) - \bar{\lambda}\, \overline{K(y, x)} - \bar{\lambda} \int_X N(x, z; \lambda)\, \overline{K(y, z)} d\mu(z) +$$

$$+ M(x, y; \lambda) - \bar{\lambda} \int_X M(x, z; \lambda)\, \overline{K(y, z)} d\mu(z),$$

тогда

$$(\mathbf{I} - \lambda\mathbf{K})^+ f = f + \int_X R(x, y; \lambda) f(y) d\mu(y) \tag{4}$$

при любом $\lambda \neq 0$.

Правая часть формулы (4) дает решение уравнения (1), если f принадлежит области значений оператора $(\mathbf{I} - \lambda\mathbf{K})$. К этому можно добавить, что оператор $(\mathbf{I} - \lambda\mathbf{K})(\mathbf{I} - \lambda\mathbf{K})^+$ – ортогональный проектор на область значений оператора $(\mathbf{I} - \lambda\mathbf{K})$, а оператор $\mathbf{I} - (\mathbf{I} - \lambda\mathbf{K})^+ \times$ $\times (\mathbf{I} - \lambda\mathbf{K})$ – ортогональный проектор на ядро оператора $(\mathbf{I} - \lambda\mathbf{K})$. Формулы для этих проекторов можно легко получить, используя равенство (4). Из последней формулы, в частности, следует, что $(\mathbf{I} - \lambda\mathbf{K})^+$ есть резольвента интегрального оператора $\mathbf{K}$, если $\lambda$ – регулярное значение, поскольку в этом случае

$$(\mathbf{I} - \lambda\mathbf{K})^+ . (\mathbf{I} - \lambda\mathbf{K}) = \mathbf{I}.$$

## Список литературы


1. К а н т о р о в и ч Л. В., А к и л о в Г. П. // Функциональный анализ. М., 1984.
2. P e t r y s h i n W. N. // Journ. Math. Anal. Apll. 1967. № 18. P. 417.
3. S h w a l t e r D. W., B e n-I s r a e l A. // Accad. Naz. Dei Lincei. 1970. № 48. P. 184.
4. G r o e t s c h C. W. // Numer. Funct. Anal. and Optimiz. 1979. V. 1. P. 195.
5. K a m m e r e r W. J., N a s h e d M. Z. // Journ. Math. Anal. Apll. 1972. № 40. P. 547.


Поступила в редакцию 20.02.92.

УДК 517.948.32

*Л. А. ХВОЩИНСКАЯ, Ф. В. ЧУМАКОВ*

# УРАВНЕНИЕ КАРЛЕМАНА НА ПАРЕ ОТРЕЗКОВ

The solution of the Carleman integral equation on a pair of non-intersectihg segments of the real axis is demonstrated.

Решение интегрального уравнения Карлемана на отрезке дано, например, в [1.С.580] либо в [2.С.456]. В настоящей статье это уравнение решается на паре отрезков, причем нам сразу удобно записать его в виде системы двух уравнений (одного парного уравнения).

Пусть $0 < \alpha < 1$, $a_1 < b_1 < a_2 < b_2$, всюду далее $k = 1, 2$. Будем искать функции $\varphi_k(x) \in H^*(a_k, b_k)$, удовлетворяющие системе:

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{a_1}^{b_1} \frac{\varphi_1(t)dt}{|x - t|^\alpha} + \int_{a_2}^{b_2} \frac{\varphi_2(t)dt}{(t - x)^\alpha} = f_1(x), \quad a_1 < x < b_1, \\ \displaystyle\int_{a_1}^{b_1} \frac{\varphi_1(t)dt}{(x - t)^\alpha} + \int_{a_2}^{b_2} \frac{\varphi_2(t)dt}{|x - t|^\alpha} = f_2(x), \quad a_2 < x < b_2. \end{cases} \tag{1}$$

Функции $f_k(x) \in \overset{*}{H}_{1-\alpha}(a_k, b_k)$ заданы. Подробнее о классах $H^*$, $\overset{*}{H}_{1-\alpha}$ см. в [2.С.194].

Введем вспомогательные функции:

$$\psi_k(x) = R_k(x) \int_{a_k}^{b_k} \frac{\varphi_k(t)dt}{|x - t|^\alpha}, \quad a_k < x < b_k, \tag{2}$$

где $R_k(x) = [\,(x - a_k)(b_k - x)\,]^{\frac{\alpha-1}{2}}$.

Систему (1) запишем через функции (2). Пользуясь формулами

$$\int_{a_k}^{b_k} \frac{R_k(\tau)d\tau}{|t-\tau|^{\alpha}(\tau-x)} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{\cos\frac{\alpha\pi}{2}} \dfrac{R_k(x)}{|t-x|^{\alpha}}, & \text{если } x<a_k, \\ -\dfrac{\pi}{\cos\frac{\alpha\pi}{2}} \dfrac{R_k(x)}{|t-x|^{\alpha}}, & \text{если } x>b_k, \end{cases}$$

несложно прийти к системе:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{R_1(x)}\psi_1(x) + \dfrac{\cos\frac{\alpha\pi}{2}}{\pi} \dfrac{1}{R_2(x)} \displaystyle\int_{a_2}^{b_2} \dfrac{\varphi_2(\tau)d\tau}{\tau-x} = f_1(x), \quad a_1<x<b_1, \\ -\dfrac{\cos\frac{\alpha\pi}{2}}{\pi} \dfrac{1}{R_1(x)} \displaystyle\int_{a_1}^{b_1} \dfrac{\psi_1(\tau)d\tau}{\tau-x} + \dfrac{1}{R_2(x)}\psi_2(x) = f_2(x), \quad a_2<x<b_2. \end{cases} \tag{3}$$

Вводя функции

$$\Phi_k(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a_k}^{b_k} \frac{\psi_k(\tau)d\tau}{\tau-z},$$

аналитические во внешности соответствующих отрезков $[a_k, b_k]$, и используя формулы Сохоцкого для предельных значений $\Phi^{\pm}(x)$ этих функций на отрезках $[a_k, b_k]$, приходим к краевой задаче Римана

$$\Phi^+(x) = G_k(x)\Phi^-(x) + g_k(x), \quad a_k<x<b_k, \tag{4}$$

где

$$\Phi^{\pm}(x) = \begin{pmatrix} \Phi_1^{\pm}(x) \\ \Phi_2^{\pm}(x) \end{pmatrix}, \quad g_1(x) = \begin{pmatrix} R_1(x) f_1(x) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$g_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ R_2(x) f_2(x) \end{pmatrix},$$

$$G_1(x) = \begin{pmatrix} 1 & -2i\cos\frac{\alpha\pi}{2}R(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G_2(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2i\cos\frac{\alpha\pi}{2}\dfrac{1}{R(x)} & 1 \end{pmatrix},$$

$$R(x) = \frac{R_1(x)}{R_2(x)} = \left[\frac{(x-a_1)(b_1-x)}{(x-a_2)(b_2-x)}\right]^{\frac{\alpha-1}{2}}.$$

Решение задачи (4) ищем в классе функций, интегрируемых при $x\to a_k$, $x\to b_k$ и исчезающих на бесконечности.

Введем новую неизвестную вектор-функцию

$$\Omega(z) = (\Omega_1(z), \Omega_2(z)) = (\Phi_1(z), R(z)\Phi_2(z)). \tag{5}$$

Учитывая, что функция $R(z)$ удовлетворяет краевым условиям

$$R^+(x) = e^{\pi i(1-\alpha)}R^-(x), \text{ если } a_1<x<b_1, \ a_2<x<b_2,$$

$$R^+(x) = e^{-2\pi i\alpha}R^-(x), \text{ если } b_1<x<a_2,$$

перепишем краевые условия (4) в виде:

$$\begin{cases} \Omega^+(x) = A_1\Omega^-(x) + g_1(x), & a_1<x<b_1, \\ \Omega^+(x) = A_2\Omega^-(x), & b_1<x<a_2, \\ \Omega^+(x) = A_3\Omega^-(x) + R(x)g_2(x), & a_2<x<b_2, \end{cases} \tag{6}$$

где $A_1$, $A_2$, $A_3$ – постоянные невырожденные матрицы:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2ie^{-\pi i\alpha}\cos\frac{\alpha\pi}{2} \\ 0 & e^{\pi i(1-\alpha)} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-2\pi i\alpha} \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2i\cos\frac{\alpha\pi}{2} & e^{\pi i(1-\alpha)} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, мы пришли к краевой задаче Римана с кусочно-постоянной матрицей и четырьмя особыми точками $a_1$, $b_1$, $a_2$, $b_2$. Решение задачи (6) ищем в классе функций, интегрируемых при $x \to a_1$, $x \to b_1$, ограниченных при $x \to a_2$, $x \to b_2$ и исчезающих на бесконечности.

Далее воспользуемся схемой решения, содержащейся в [3].

Произведем замену переменной по формуле $\eta = \frac{1}{b_2 - z}$ $\left( t = \frac{1}{b_2 - x} \right)$ и введем новую неизвестную вектор-функцию $\tilde{\Omega}(\eta) = \Omega\left( b_2 - \frac{1}{\eta} \right)$; при этом точки $a_1$, $b_1$, $a_2$, $b_2$ перейдут соответственно в точки

$$a'_1 = \frac{1}{b_2 - a_1}, \quad a'_2 = \frac{1}{b_2 - b_1}, \quad a'_3 = \frac{1}{b_2 - a_2}, \quad a'_4 = \infty.$$

Построим каноническую матрицу однородной краевой задачи

$$\tilde{\Omega}^+(t) = A_m \tilde{\Omega}^-(t), \quad a'_m < t < a'_{m+1}, \quad m = 1, 2, 3. \tag{7}$$

Решение задачи (7) будем искать в виде линейной комбинации решений дифференциального уравнения класса Фукса с пятью особыми точками

$$w'' + \left( \frac{c_1}{\zeta - a_1} + \frac{c_2}{\zeta - a_2} + \frac{c_3}{\zeta - a_3} - \frac{1}{\zeta - a_0} \right) w' + \frac{ab\zeta^2 + q_1\zeta + q_0}{\prod\limits_{k=0}^{3} (\zeta - a_k)} w = 0. \tag{8}$$

В этом уравнении определению подлежат 8 параметров: $c_1$, $c_2$, $c_3$, a, b, акцессорные параметры $q_0$, $q_1$, а также точка $a'_0$.

В окрестности каждой особой точки $a'_m$ уравнение (8) имеет два линейно независимых решения $u_m$, $v_m$, задаваемых рядами, коэффициенты которых могут быть определены из некоторых рекуррентных соотношений.

Функции $u_m$, $v_m$ и $u_{m+1}$, $v_{m+1}$ связаны между собой соотношениями вида:

$$\begin{pmatrix} u_m \\ v_m \end{pmatrix} = \Lambda_m \begin{pmatrix} u_{m+1} \\ v_{m+1} \end{pmatrix}, \quad m = 1, 2, 3,$$

где $\Lambda_m$ – постоянные невырожденные матрицы второго порядка, элементы которых определяются по значениям функций $u_m$, $v_m$, $u_{m+1}$, $v_{m+1}$ и их производных в фиксированной точке.

Далее решение задачи (7) будем производить следующим образом.

Обозначая характеристические числа матриц $A_1$, $A_1^{-1}A_2$, $A_2^{-1}A_3$, $A_3$ соответственно $\alpha_m$, $\beta_m$ $(m = 1, 2, 3, 4)$, получаем

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 1, \quad \beta_1 = \beta_2 = \beta_4 = e^{\pi i(1-\alpha)}, \quad \beta_3 = e^{\pi i(1+\alpha)}.$$

Теперь найдем числа $\rho_m = \frac{1}{2\pi i}\ln\alpha_m$, $\sigma_m = \frac{1}{2\pi i}\ln\beta_m$, $m = 1, 2, 3, 4$, где ветвь логарифма выбирается из условия $\ln\eta = \ln|\eta| + i\arg\eta$, $-\pi < \arg\eta < \pi$:

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = 0, \quad \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_4 = \frac{1-\alpha}{2}, \quad \sigma_3 = \frac{\alpha - 1}{2}.$$

Обозначая $\Delta = \sum\limits_{m=1}^{3} (\rho_m + \sigma_m) - \rho_4 - \sigma_4 = 0$, вычислим параметры

$$c_1 = 1 + \sigma_1 - \rho_1 = \frac{3-\alpha}{2}, \quad c_2 = 1 + \sigma_2 - \rho_2 = \frac{3-\alpha}{2}, \quad c_3 = 1 + \sigma_3 - \rho_3 = \frac{1+\alpha}{2},$$

$$a = 1 + \rho_4 - \sum_{k=1}^{3} \rho_k + \left[ \frac{\Delta}{2} \right] = 1, \quad b = \sigma_4 - \sum_{k=1}^{3} \rho_k + \left[ \frac{\Delta + 1}{2} \right] = \frac{1-\alpha}{2}.$$

Нетрудно проверить, что матрица

$$\tilde{D} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & e^{\frac{\pi i\alpha}{2}} \end{pmatrix}$$

приводит матрицу $A_1$ к диагональной жордановой форме.

Введем матрицы $S_m = \left(S_{nj}^{(m)}\right) = \tilde{D}^{-1}\left(A_m^{-1}A_{m+1}\right)\tilde{D}\,(m = 1,\ 2)$, $\Lambda = (\lambda_{nj}) = \Lambda_1$, $M = (\mu_{nj}) = \Lambda_1\Lambda_2$.

Для определения акцессорных параметров $q_0$, $q_1$ и точки $a'_0$ необходимо решить систему, состоящую из одного алгебраического и двух трансцендентных уравнений:

$$\begin{cases} aba'_0 + q_1 + \left(aba'^2_0 + q_1a'_0 + q_0\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{3}\dfrac{c_k - 1}{a_0 - a_k} - \dfrac{aba'_0 + q_1a'_0 + q_0}{\prod\limits_{k=1}^{3}(a'_0 - a'_k)}\right) = 0, \\ \lambda_{21} = 0, \\ \left(S_{11}^{(2)} - \alpha_3\right)\det M = (\alpha_3 - \beta_3)\mu_{12}\mu_{21} \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (1-\alpha)a'_0 + 2q_1 + \left(\dfrac{1-\alpha}{2}a'^2_0 + q_1a'_0 + q_0\right)\times \\ \times\left(\dfrac{1-\alpha}{a'_0 - a'_1} + \dfrac{1-\alpha}{a'_0 - a'_2} + \dfrac{\alpha - 1}{a'_0 - a'_3} - \dfrac{(1-\alpha)a'^2_0 + 2q_1a'_0 + 2q_0}{\prod\limits_{k=1}^{3}(a'_0 - a'_k)}\right) = 0,\ \lambda_{21} = 0, \\ \dfrac{\mu_{11}\mu_{22}}{\mu_{12}\mu_{21}} = 1 - e^{-\pi i\alpha}. \end{cases} \tag{9}$$

Отметим, что первое уравнение системы (9) относительно $q_1$ и $q_0$ является квадратным. Для решения второго и третьего уравнений следует применить методы приближенных вычислений. Каноническая матрица $\tilde{X}(\zeta)$ задачи (7) будет иметь вид:

$$\tilde{X}(\zeta) = D\begin{pmatrix} u_1(\zeta) & p_1(\zeta)u_1(\zeta) + p_2(\zeta)u'_1(\zeta) \\ v_1(\zeta) & p_1(\zeta)v_1(\zeta) + p_2(\zeta)v'_1(\zeta) \end{pmatrix},$$

где

$$p_1(\zeta) = \frac{\frac{1-\alpha}{2}a'_0 + q_1a'_0 + q_0}{\zeta - a'_0} + \frac{1-\alpha}{2}\zeta,\quad p_2(\zeta) = \frac{\prod\limits_{m=1}^{3}(\zeta - a'_m)}{\zeta - a'_0},$$

$D = \tilde{D}\begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$, а в качестве $\gamma$ и $\delta$ можно взять любую ненулевую пару чисел, удовлетворяющую условию $\lambda_{12}\left(S_{22}^{(1)} - \alpha_2\right)\gamma = \lambda_{22}S_{12}^{(1)}\delta$. Например, возьмем $\gamma = i\lambda_{22}(1 - e^{-\pi i\alpha})$, $\sigma = \lambda_{12}$.

Следовательно, элементы канонической матрицы $X(z) = (\chi_{nj}(z))$ задачи (6) можно найти по формулам:

$$\chi_{11}(z) = i\lambda_{22}(1 - e^{-\pi i\alpha})\tilde{u}_1(z) - i\lambda_{12}\tilde{v}_1(z),$$

$$\chi_{12}(z) = \lambda_{12}e^{\frac{\pi i\alpha}{2}}\tilde{v}_1(z),$$

$$\chi_{21}(z) = i\lambda_{22}\left(1 - e^{-\pi i\alpha}\right)\left(\tilde{p}_1(z)\tilde{u}_1(z) + \tilde{p}_2(z)\tilde{u}'_1(z)\right) -$$

$$- i\lambda_{12}\left(\tilde{p}_1(z)\tilde{v}_1(z) + \tilde{p}_2(z)\tilde{v}'_1(z)\right),$$

$$\chi_{22}(z) = \lambda_{12}e^{\frac{\pi i\alpha}{2}}\left(\tilde{p}_1(z)\tilde{v}_1(z) + \tilde{p}_2(z)\tilde{v}'_1(z)\right),$$

где введены обозначения

$$\tilde{u}_1(z) = u_1(\zeta),\ \tilde{v}_1(\zeta) = v_1(\zeta),\ \tilde{p}_1(z) = p_1(\zeta),\ \tilde{p}_2(z) = p_2(\zeta).$$

Частные индексы $\kappa_1$, $\kappa_2$ задачи (6) будут равны:

$$\kappa_1 = \left[ \frac{\Delta+1}{2} \right] = 0, \ \kappa_2 = \left[ \frac{\Delta}{2} \right] = 0.$$

Так как $\kappa_1 - \kappa_2 = 0$, то частные индексы задачи (6) устойчивы. Следовательно, в выбранном классе функций задача (6) (а вместе с ней и исходная система (1)) имеет единственное решение, которое можно получить по формуле:

$$\Omega(z) = X(z)\frac{1}{2\pi i}\times$$

$$\times\left\{\int_{a_1}^{b_1} [X^+(x)]^{-1} g_1(x)\frac{dx}{x-z} + \int_{a_2}^{b_2} [X^+(x)]^{-1} R(x) g_2(x)\frac{dx}{x-z}\right\}.$$

Учитывая теперь, что

$X^+(x) = A_1 X^-(x)$ для $a_1 < x < b_1$, $X^+(x) = A_3 X^-(x)$ для $a_2 < x < b_2$,

по формулам (5) и Сохоцкого находим функции:

$$\psi_1(x) = \Omega_1^+(x) - \Omega_2^-(x) = f_1(x)R_1(x) - \frac{1}{\pi}\cos\frac{\pi\alpha}{2}\times$$

$$\times\left[\int_{a_1}^{b_1} \frac{f_1(t)R_1(t)}{\det X(t)}(\chi_{12}(x)\chi_{22}(t) - \chi_{22}(x)\chi_{12}(t))\frac{dt}{t-x} + \right.$$

$$\left. + \int_{a_2}^{b_2} \frac{f_2(t)R_1(t)}{\det X(t)}(\chi_{22}(x)\chi_{11}(t) - \chi_{12}(x)\chi_{21}(t))\frac{dt}{t-x}\right], \ a_1 < x < b_1, \quad (10)$$

$$\psi_2(x) = \frac{1}{R(x)}(\Omega^+(x) + e^{-\pi i\alpha}\Omega^-(x)) = f_2(x)R_2(x) - \frac{R_2(x)}{\pi R_1(x)}\cos\frac{\pi\alpha}{2}\times$$

$$\times\left[\int_{a_1}^{b_1} \frac{f_1(t)R_1(t)}{\det X(t)}(\chi_{11}(x)\chi_{22}(t) - \chi_{21}(x)\chi_{12}(t))\frac{dt}{t-x} + \right.$$

$$\left. + \int_{a_2}^{b_2} \frac{f_2(t)R_1(t)}{\det X(t)}(\chi_{21}(x)\chi_{11}(t) - \chi_{11}(x)\chi_{21}(t))\frac{dt}{t-x}\right], \ a_2 < x < b_2. \quad (11)$$

Подставляя функции (10), (11) в (2) и обращая получающиеся уравнения по известным формулам [2.С.457], находим функции $\varphi_k(x)$:

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{2\pi}\mathrm{ctg}\frac{\pi\alpha}{2}\frac{d}{dx}\int_{a_k}^{b_k}\frac{\mathrm{sign}(x-t)}{|x-t|^{1-\alpha}}\frac{\psi_k(t)}{R_k(t)}dt +$$

$$+ \frac{1}{2\pi^2}\sin^2\frac{\pi\alpha}{2}\frac{d}{dx}\int_{a_k}^{b_k}\psi_k(t)dt\int_{a_k}^{b_k}\left(\sqrt{\frac{(t-a_k)(b_k-t)}{(y-a_k)(b_k-y)}} - 1\right)\times$$

$$\times\frac{dy}{|x-y|^{1-\alpha}R_k(y)(t-y)}, \ a_k < x < b_k.$$

### Список литературы


1. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., 1977.
2. Самко С. Г, Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Мн., 1987.
3. Хвощинская Л. А. //Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Мн., 1986.


Поступила в редакцию 05.05.92.

УДК 517.968.23

*К. М. РАСУЛОВ*

## ОБ ОДНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ РИМАНА ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

A differential boundary value problem of Riemann is proved to be equivalent to the integral equation of Fredholm. A new integral representation of analitic functions in connected domains is applied.