$$\delta = \frac{3\pi\mu}{r} - \frac{2\pi a}{r_0}\sqrt{\frac{\mu}{r_0}} - \frac{8\pi}{3}\frac{Q^2}{r_0^2}. \qquad (21)$$

В предлагаемом расчете не учитывается, как происходит вращение пробного тела по орбите относительно вращения источника. Чтобы различить две возможности, когда направления вращений совпадают и когда они разнонаправлены, полагаем соответственно $a = \pm|a|$. Окончательно имеем:

$$\delta = \frac{3\pi\mu}{r_0} \mp \frac{2\pi a}{r_0}\sqrt{\frac{\mu}{r_0}} - \frac{8\pi}{3}\frac{Q^2}{r_0^2}. \qquad (22)$$

Полученный результат легко можно проверить на соответствие. Предельный переход в поле Шварцшильда ($a \to 0$, $Q \to 0$) дает правильное значение геодезической прецессии, вычисленной Схоутеном и де Ситтером [4]. Предельный переход в поле Керра ($Q \to 0$) с учетом предложенного самим Керром $a = \frac{2}{5}\frac{\omega R^2}{c}$, где $\omega$ – частота обращения центрального источника, а $R$ – его радиус, дает интегральное (за период обращения) значение прецессии Шиффа [5]. Предложенный метод расчета геодезической прецессии в поле Керра – Ньюмена легко применить к случаю элиптических и неэкваториальных орбит.

### Список литературы


1. Абакумов Е. Г., Ушаков Е. А. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1993. № 1. С. 5.
2. Ушаков Е. А. // Сб. Гравитация и электромагнетизм. М., 1988. С. 242.
3. Гальцов Д. В. Частицы и поля в окрестности черных дыр. М., 1986. С. 10.
4. Брумберг В. А. Релятивистская небесная механика. М., 1972. С. 191.
5. Shiff L. I. // Proc. Nat. Acad. Sci. 1960. V. 46. P. 871.


Поступила в редакцию 30.08.93.

УДК 539.12

*П. В. КАСИЧЕВ, И. Д. ФЕРАНЧУК*

## САМОФОКУСИРОВКА ВОЛНОВЫХ ПАКЕТОВ ЭЛЕКТРОНОВ В ПЛАЗМЕ

Self-focusing of wave packages of ultrarelativistic electrons in collision-free plasma has been considered. Dispersion relations are found and the length of self-focusing is estimated.

Проблема получения когерентного рентгеновского излучения тесно связана с возможностью создания релятивистских электронных пучков высокой плотности [1]. Кроме того, такие пучки представляют интерес в исследованиях, связанных с проблемой управляемого термоядерного синтеза. Поскольку плотность электронов в пучках, выходящих из ускорителя, относительно невелика, большое значение приобретают вопросы фокусировки и самофокусировки таких пучков. В работе [2] была доказана возможность самофокусировки волновых пакетов элементарных частиц в кристалле в результате их взаимодействия с фононами и оценивалась длина самофокусировки $L_c$, на которой поперечные размеры пакета уменьшаются в e раз. В настоящей работе рассматривается вопрос о самофокусировке ультрарелятивистского электронного пучка в бесстолкновительной плазме. Используется система единиц $\hbar = c = 1$.

Исходным уравнением для описания электрона в плазме является уравнение Дирака

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi = [\,\alpha(\hat{p} - eA) + \beta m - e\Phi\,]\Psi, \quad e > 0. \qquad (1)$$

Здесь потенциалы A и Ф создаются как зарядами плазмы, так и собственным зарядом пучка; $\alpha$ и $\beta$ – матрицы Дирака; m – масса электрона. В ультрарелятивистском пределе $E \gg m$ уравнение (1) можно привести к виду, формально совпадающему с нерелятивистским уравнением Шрёдингера [3]:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\varphi + \left\{ \frac{1}{2E_0}\Delta + i\frac{p_z}{E_0}\frac{\partial}{\partial z} - e\frac{p_z}{E_0}A_z + e\Phi \right\}\varphi = 0, \qquad (2)$$

где $p_z$ – продольный импульс частицы, $E_0 = \sqrt{p_z^2 + m^2}$ и $\Psi = e^{ip_z z - iE_0 t}\varphi$.

Для определения потенциалов $A_z$ и $\Phi$ необходимо дополнить уравнение (2) системой уравнений Власова для бесстолкновительной плазмы. В связи с этим сделаем несколько замечаний. При инжекции в плазму пучка заряженных частиц в окрестности его фронта генерируются обратные плазменные токи, которые, однако, достаточно быстро рассеиваются в силу конечной проводимости плазмы [4]. Считая длину пучка l достаточно большой ($l \gg d^2\tau\frac{4\pi ne^2}{m}$, где d – диаметр пучка, $\tau$ – величина, обратная частоте столкновений между частицами плазмы, n – плотность электронов в плазме), влиянием обратных токов на пучок можно пренебречь. Будем также предполагать в дальнейшем, что плотность пучка мала по сравнению с плотностью плазмы. С учетом сделанных предположений получающаяся система уравнений в калибровке Лоренца с точностью до линейных по плотности пучка слагаемых будет иметь следующий вид [5]:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\varphi + \left\{ \frac{1}{2E_0}\Delta + i\beta\frac{\partial}{\partial z} - e\beta A_z + e\Phi \right\}\varphi = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta f_e + v\,(\nabla\delta f_e) + e\left(\frac{\partial}{\partial t}A + \nabla\Phi\right)\frac{\partial}{\partial p}f_{0e} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta f_i + v\,(\nabla\delta f_i) - e\left(\frac{\partial}{\partial t}A + \nabla\Phi\right)\frac{\partial}{\partial p}f_{0i} = 0,$$

$$\Delta A - \frac{\partial^2}{\partial t^2}A = -4\pi j_z\,\mathbf{n}_z, \qquad (3)$$

$$\Delta\Phi - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi = -4\pi\rho,$$

$$\rho = -e\,|\varphi|^2 + e\int(Z\delta f_i - \delta f_e)\,d^3p,$$

$$j_z = -e\beta\,|\varphi|^2.$$

Здесь $\beta = \frac{p_z}{E_0}$; $\delta f_e(\delta f_i)$ – малое возмущение равновесной функции распределения $f_{0e}(f_{0i})$ электронов (ионов) в плазме; $n_z$ – единичный вектор в направлении оси z; Z – заряд ионов. В дальнейшем без нарушения общности будем полагать $Z = 1$.

Получившаяся система уравнений (3) явно нелинейна относительно $\varphi$, и для анализа неустойчивости рассматриваемой системы применим метод линеаризации, аналогичный использованному в [2]. Будем предполагать, что существует решение, описывающее прохождение в плазме пучка диаметра d. Волновую функцию этого пучка представим в виде $\varphi_0(r,t)e^{i\alpha_0(r,t)}$, где $\varphi_0$ и $\alpha_0$ – действительные функции координат и времени. Отделяя действительную и мнимую части в первом уравнении системы (3), получаем:

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial t} + \frac{1}{E_0}\nabla\varphi_0\nabla\alpha_0 + \frac{\varphi_0}{2E_0}\Delta\alpha_0 + \beta\frac{\partial\varphi_0}{\partial z} = 0,$$

$$\varphi_0\frac{\partial\alpha_0}{\partial t} - \frac{1}{2E_0}\Delta\varphi_0 + \frac{1}{2E_0}\varphi_0\,(\nabla\alpha_0)^2 + \beta\varphi_0\frac{\partial\alpha_0}{\partial z} + e\beta A_0\,\varphi_0 - e\Phi_0\,\varphi_0 = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta f_{e0} + v\,(\nabla\delta f_{e0}) + e\left(\frac{\partial}{\partial t}A_0 + \nabla\Phi_0\right)\frac{\partial}{\partial p}f_{0e} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta f_{i0} + v\,(\nabla\delta f_{i0}) - e\left(\frac{\partial}{\partial t}A_0 + \nabla\Phi_0\right)\frac{\partial}{\partial p}f_{0i} = 0, \qquad (4)$$

$$\Delta A_0-\frac{\partial^2}{\partial t^2}A_0=4\pi e\beta\varphi_0^2 n_z,$$

$$\Delta \Phi_0-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi_0+4\pi e\varphi_0^2-4\pi e\int(\delta f_{i0}-\delta f_{e0})d^3p.$$

Здесь все величины, снабженные индексом «0» (кроме $f_{0e}$ и $f_{0i}$), отвечают распространению пучка диаметром d. Наложим теперь на волновую функцию пучка малое возмущение так, что

$$\varphi=(\varphi_0+\varphi')e^{i(\alpha_0+\alpha')}, \tag{5}$$

где $\varphi'$ и $\alpha'$—малые действительные добавки. При этом остальные величины, входящие в (3), также претерпят возмущения: $A=A_0+A'$ и т. п. Подставим новые значения величин в (3) с учетом (4) и сохраним лишь линейные по малым возмущениям слагаемые. В результате находим следующую систему линейных уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi'+\frac{1}{E_0}\nabla\varphi_0\nabla\alpha'+\frac{1}{E_0}\nabla\alpha_0\nabla\varphi'+\frac{1}{2E_0}\varphi_0\Delta\alpha'+\frac{1}{2E_0}\varphi'\Delta\alpha_0+\beta\frac{\partial}{\partial z}\varphi'=0,$$

$$\varphi'\frac{\partial}{\partial t}\alpha_0+\varphi_0\frac{\partial}{\partial t}\alpha'-\frac{1}{2E_0}\Delta\varphi'+\frac{1}{E_0}\varphi_0\nabla\alpha_0\nabla\alpha'+\frac{1}{2E_0}\varphi'(\Delta\alpha_0)^2+$$

$$+\beta\varphi_0\frac{\partial}{\partial z}\alpha'+\beta\varphi'\frac{\partial}{\partial z}\alpha_0+e\beta A_0\varphi'+e\beta A'\varphi_0-e\Phi_0\varphi'-e\Phi'\varphi_0=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta f'_i+v(\nabla\delta f'_i)+e\left(\frac{\partial}{\partial t}A'+\nabla\Phi'\right)\frac{\partial}{\partial p}f_{0e}=0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta f'_i+v(\nabla\delta f'_i)-e\left(\frac{\partial}{\partial t}A'+\nabla\Phi'\right)\frac{\partial}{\partial p}f_{0i}=0,$$

$$\Delta A'-\frac{\partial^2}{\partial t^2}A'=8\pi e\beta\varphi_0\varphi',$$

$$\Delta\Phi'-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi'=8\pi e\varphi_0\varphi'-4\pi e\int(\delta f'_i-\delta f'_e)d^3p.$$

Если размеры возмущений малы по сравнению с характерными расстояниями в пучке, множители, стоящие при штрихованных величинах, можно считать постоянными, и мы приходим к системе линейных относительно возмущений однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Пространственно-временную зависимость решений этой системы находим в виде экспоненты $e^{-i\omega t+i\kappa r}$. В результате получаем алгебраическую систему для ω и κ, условием разрешимости которой является обращение в нуль ее определителя Δ. В области $\omega\ll\kappa$, что соответствует нерелятивистским скоростям поперечного движения частиц в пучке, уравнение $\Delta=0$ имеет корень

$$\omega\approx\beta\kappa_z+\frac{1}{E_0}\kappa\cdot\nabla\alpha_0-i\frac{1}{4E_0}\Delta\alpha_0+i\left\{\frac{8\pi e^2\varphi_0^2}{\kappa+J}\times\right.$$

$$\times(\beta^2 J-\gamma^{-2}\kappa)\left(\frac{1}{2E_0}-\frac{i}{\varphi_0E_0\kappa^2}\kappa\cdot\nabla\varphi_0\right)-\left[\frac{\partial\alpha_0}{\partial t}+\frac{\kappa^2}{2E_0}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2E_0}(\nabla\alpha_0)^2+\beta\frac{\partial\alpha_0}{\partial z}+e\beta A_0-e\Phi_0\right]\left(\frac{1}{2E_0}-\frac{i\kappa\nabla\varphi_0}{\varphi_0E_0\kappa^2}\right)\kappa^2+$$

$$\left.+\frac{1}{16E_0^2}(\Delta\alpha_0)^2\right\}^{1/2}. \tag{7}$$

Здесь введен лоренц-фактор частицы $\gamma=(1-\beta^2)^{1/2}$ и вектор

$$J=-4\pi e^2\int\left(\frac{\partial f_{0i}}{\partial p}+\frac{\partial f_{0e}}{\partial p}\right)\frac{d^3p}{\kappa v-\omega-i0}. \tag{8}$$

Анализ показывает, что J параллелен κ и в случае максвелловской плазмы сводится к табулированной функции [5, 6]. В области $\frac{\omega}{\kappa}\sqrt{\frac{m}{T}} \ll 1$, где T – температура плазмы, $J \approx \frac{4\pi n e^2}{\kappa T}$.

Приближенная замена в (6) величин $\varphi_0$, $\alpha_0$ и т. д. их амплитудными значениями не является строгой, однако она позволяет получить грубую оценку скорости самофокусировки. При этом следует положить $\kappa \sim d^{-1}$ и для пучка диаметром d с плавно спадающей от оси к периферии плотностью использовать оценку $\nabla\varphi_0 \sim i\kappa\varphi_0$. В результате выражение, заключенное в (7) в квадратные скобки, обратится в нуль в силу второго уравнения из (4). Имеем

$$\omega \approx \beta\kappa_z + \frac{1}{E_0}\kappa \cdot \nabla\alpha_0 - i\frac{\Delta\alpha_0}{4E_0} +$$

$$+ \sqrt{\frac{12\pi e^2\varphi_0^2}{(\kappa + J)E_0}\left(\beta^2 J - \gamma^{-2}\kappa\right) + \left(\frac{\Delta\alpha_0}{4E_0}\right)^2}. \qquad (9)$$

Если мнимая часть $\omega''$ частоты (9) положительна, то начальная амплитуда возмущения нарастает во времени, т. е. имеет место самофокусировка пучка по закону

$$d = d_0 e^{-\omega'' t}. \qquad (10)$$

В случае, когда в (9) можно пренебречь членами, содержащими $\alpha_0$ (для не слишком узкого пучка, влетающего в плазму, это эквивалентно условию $\theta_0 \ll \sqrt{\frac{eI}{E_0}}$, где $\theta_0 = \frac{p_t}{E_0}$ – начальный угол разлета пучка; $P_t$ – максимальный начальный поперечный импульс электронов в пучке; I – полный ток пучка), длина самофокусировки ультрарелятивистского ($\beta \approx 1$) пучка дается выражением

$$L_c \sim d\sqrt{\frac{E_0(1 + Jd)}{eI(Jd - \gamma^{-2})}}.$$

Приведем численную оценку характерных параметров пучка и плазмы, при которых можно наблюдать рассмотренный эффект самофокусировки. При энергии электронов $E_0 \sim 1$ГэВ и плотности тока пучка $j_6 \sim 1$кА/см$^2$ длина самофокусировки в плазме с $n \sim 10^{12}$ см$^{-3}$ и $T \sim 10^4$ К имеет порядок Lc ~ 10 см.

## Список литературы


1. Baryshevsky V. G., Feranchuk I. D. // Phys. Lett. A. 1984. V. 102. № 3. P. 141.
2. Барышевский В. Г., Феранчук И. Д. // Докл. АН БССР. 1979. Т. 23. № 4. С. 326.
3. Барышевский В. Г. Каналирование, излучение и реакции в кристаллах при высоких энергиях. Мн., 1982. С. 11.
4. Миллер Р. Б. Введение в физику сильноточных пучков заряженных частиц/ Пер. с англ. М., 1984. С. 185.
5. Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Физическая кинетика. М., 1979. С. 153, 160.
6. Фадеева В. Н., Терентьева Н. М. Таблицы значений интеграла вероятностей от комплексного аргумента. М., 1954.


Поступила в редакцию 14.12.92.

УДК 535.34

*О. Г. РОМАНОВ, А. Л. ТОЛСТИК*

# ДИФРАКЦИЯ НА ОБЪЕМНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ГОЛОГРАММАХ ПРИ ИЗМЕНЕНИИ ЧАСТОТЫ ВОССТАНАВЛИВАЮЩЕЙ ВОЛНЫ

Within a theory of four-wave mixing the energy efficiency of reconstruction of transmission and reflection volume holograms in media with thermal nonlinearity has been analyzed. The optimal recording conditions of dynamic holograms have been determined and the possibility of the increase in diffraction efficiency upon tuning-out of the reconstructing-wave frequency has been determined.

Динамические дифракционные структуры, являющиеся одним из перспективных элементов интегральной оптики, позволяют в реальном