1. К о з е л П. Т.//Конференция математиков Беларуси: Тез. докл. Гродно, 1992. Ч. 1. С. 27.
2. К о з е л П. Т.//Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1984. № 3. С. 45.
3. Там же. 1991. № 3. С. 68.

Поступила в редакцию 30.06.94.

УДК 531.36

Б. С. КАЛИТИН, В. А. МУРАЧ

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ ПО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ. МЕТОД ЗНАКОПОСТОЯННЫХ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА

This paper deals with the problem of the partial stability of nonautomonous systems by semidefinite Lyapunov functions. Proposed results are illustrated by the example of trianqular system.

Пусть задана система дифференциальных уравнений

$$\dot{s} = S(s,t), \quad s \in \mathbf{R}^n, \quad t \geqslant 0; \quad S(0,t) = 0. \tag{1}$$

Предположим, что правые части $S:\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^n$ и их частные производные $\partial S_i/\partial s_j$ непрерывны и ограничены в полуцилиндре $B_н \times \mathbf{R}^+$, $B_н = \{s \in \mathbf{R}^n | \, \|s\| \leqslant H\}$, $H > 0$. Разобьем систему (1) на подсистемы, записав ее в виде

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x, z, w, t), & x \in \mathbf{R}^p, \\ \dot{z} = Z(x, z, w, t), & z \in \mathbf{R}^m, \\ \dot{w} = W(x, z, w, t), & w \in \mathbf{R}^{n-p-m}, \end{cases} \tag{2}$$

где $s = \mathrm{colon}(x, z, w)$.

Интересуясь свойствами устойчивости нулевого решения системы (2) по отношению к переменным $(x, z) = (x_1, \dots x_p; z_1, \dots, z_m)$, будем использовать для краткости необходимые определения из [1]. Вместе с этим нам понадобится следующее

Определение. Пусть φ: $B_x \times \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^m$ — непрерывная функция, заданная в шаре $B_x = \{x \in \mathbf{R}^p | \, \|x\| \leqslant H\}$. Начало координат системы (2) называется (x, z)-устойчивым относительно разности $z - \varphi(x, t)$, если $\forall \mu > 0$ и $\forall t_0 \geqslant 0$ $\exists \delta = \delta(\mu, t_0) > 0$ такое, что для всякого решения $x(t) = x(s_0, t_0, t)$, $z(t) = z(s_0, t_0, t)$ с начальными условиями $s_0 = (x_0, z_0, w_0) \in B_\delta$ и определенного для $t_0 \leqslant t < t_0 + \omega$, где $\omega = \omega(s_0, t_0)$, справедливо неравенство $\|z(t) - \varphi(x(t), t)\| < \mu$ при всех $t \in [t_0, t_0 + \omega[$.

Если при этом число $\delta > 0$ не зависит от выбора начального момента времени $t_0 \geqslant 0$, то нулевое решение системы (2) называется (x, z)-равномерно устойчивым относительно разности $z - \varphi(x, t)$.

Теорема 1. Пусть для системы (2) существуют непрерывная функция $\varphi:B_x \times \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^m$, непрерывно дифференцируемая функция $V:B_н \times \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$, а также функции Хана a и b [1] такие, что для каждой точки $(S, t) \in B_н \times \mathbf{R}^+$ выполняются условия:

1) $V(s, t) \geqslant a(\|z - \varphi(x, t)\|)$; $V(0, t) = 0$;
2) $\dot{V}(s, t) \leqslant 0$.

Тогда нулевое решение (2) (x, z)-устойчиво по отношению к разности $z - \varphi(x, t)$.

Если, кроме того,

3) $V(s, t) \leqslant b(\|z - \varphi(x, t)\|)$,

то нулевое решение (2) (x, z)-равномерно устойчиво по отношению к разности $z - \varphi(x, t)$.

Теорема 2. Пусть для системы (2) существуют непрерывная локально липшицева по x равномерно по $t \geqslant 0$ функция $\varphi:B_x \times \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^m$, $\varphi(0, t) \equiv 0$, непрерывно дифференцируемая функция $V:B_н \times \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$, а также функции Хана a и b такие, что для каждой точки $(s, t) \in B_н \times \mathbf{R}^+$ выполняются условия:

1) $V(s, t) \geqslant a(\|z - \varphi(x, t)\|)$ и $V(0, t) = 0$;
2) $\dot{V}(s, t) \leqslant 0$;

3) нулевое решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x, \varphi(x, t), w, t), \ x \in B_x, \\ \dot{w} = W(x, \varphi(x, t), w, t), \ w \in B_w, \end{cases} \tag{3}$$

x-равномерно асимптотически устойчиво [1].

Тогда нулевое решение системы (2) (x, z) — устойчиво.

Если, кроме того, справедливо условие

4) $V(s, t) \leqslant b(\|z - \varphi(x, t)\|)$,

то нулевое решение (2) (x, z)-равномерно устойчиво.

Теорема 3. Пусть для системы (2) существуют непрерывно дифференцируемая функция $V: B_H \times \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$, непрерывная локально липшицева по x равномерно по $t \geqslant 0$ функция $\varphi: B_x \times \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^m$, $\varphi(0, t) = 0$, а также функции Хана a, b, c такие, что для каждой точки $(s, t) \in B_H \times \mathbf{R}^+$ выполняются условия:

1) $a(\|z - \varphi(x, t)\|) \leqslant V(s, t) \leqslant b(\|z - \varphi(x, t)\|)$;

2) $\dot{V}(x, z, w, t) \leqslant -c(\|z - \varphi(x, t)\|)$;

3) нулевое решение системы (3) x-равномерно асимптотически устойчиво.

Тогда нулевое решение системы (2) (x, z)-равномерно асимптотически устойчиво.

В качестве примера рассмотрим частный случай системы (2):

$$\dot{x} = X(x, z, w, t), \tag{4}$$

$$\dot{z} = Z(z, w, t), \ \dot{w} = W(z, w, t). \tag{5}$$

Учитывая, что такая система обладает инвариантным множеством $z = 0$, $w = 0$, приходим к следующему результату.

Следствие 1. Нулевое решение системы (4), (5), (x, z)-равномерно асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда нулевое решение системы (5) z-равномерно асимптотически устойчиво, а нулевое решение системы $\dot{x} = X(x, o, w, t)$, $\dot{w} = W(o, w, t)$, x-равномерно асимптотически устойчиво.

Проблема устойчивости по отношению к части переменных для систем типа (4), (5) возникает, например, при исследовании равновесия рыночных цен в экономической модели Вальраса (см. [2]) и в математической модели разоружения [3].

В заключение отметим, что в отличие от метода (x, z)-определенно положительных функций Ляпунова, используемых в [1] для задачи об устойчивости по отношению к координатам (x, z), представленные выше теоремы 2 и 3 используют лишь (x, z)-знакопостоянные функции Ляпунова. Такие функции исчезают на положительно инвариантной поверхности $z = \varphi(x, t)$, содержащей начало координат.

1. Румянцев В. В., Озиранер А. С. Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. М., 1987.

2. Siljak D. D. Competitive economic systems: stability, decomposition and aggregation//IEEE Trance. Ac. 1976. № 21. P. 149.

3. Siljak D. D. Large scale dynamical systems. New York, 1978.

Поступила в редакцию 15.12.94.

УДК 512.542

В. М. СЕЛЬКИН

ОПИСАНИЕ МИНИМАЛЬНЫХ НАСЛЕДСТВЕННЫХ ЛОКАЛЬНЫХ НЕ φ-ДИСПЕРСИВНЫХ ФОРМАЦИЙ

The description of minimal hereditary local not φ-dispersive formations are described in this paper.

Все рассматриваемые в работе группы конечны.

Наследственная локальная формация Ω называется минимальной наследственной локальной не Δ-формацией (или Δ_{ls}-критической формацией), если $\Omega \not\subseteq \Delta$, то $\Omega_1 \subseteq \Delta$ для любой собственной локальной наследственной подформации Ω_1 из Ω.

В работе [1] были описаны минимальные наследственные локальные несверхразрешимые формации. Развивая этот результат, в данной статье опишем минимальные наследственные локальные не φ-дисперсивные