Краткие сообщения

УДК 512.643

П. Т. КОЗЕЛ

О СТРОЕНИИ ЭЛЕМЕНТОВ ОРТОГОНАЛЬНОЙ ГРУППЫ НАД АЛГЕБРАИЧЕСКИ ЗАМКНУТЫМ ПОЛЕМ ХАРАКТЕРИСТИКИ 2

Let $O_3(K,Q)$ be orthogonal group over the algebraically closed field K, churK = 2. It is proved that each element σ in $O_3(K,Q)$ contains the elementary divisor $x+1$ and if $\sigma \neq e$, then in addition σ contains either two elementary divisors $x+\rho$ and $x+\rho^{-1}$, $\rho \neq 1$, or one divisor $(x+1)^2$.

Для $n=3$ нами в данной статье доказана гипотеза, анонсированная в [1].

Гипотеза. Пусть $O_n(K, Q)$ — ортогональная группа, $n=2m+1$, над алгебраически замкнутым полем K характеристики 2. Элементарными делителями группы $O_n(K, Q)$ являются лишь многочлены вида:

а) $x+1$ — входит в состав элементарных делителей каждого элемента группы $O_n(K, Q)$;

б) $(x+1)^{2l}$ может входить произвольное число раз;

в) парами могут входить $(x+\rho)^l$, $(x+\rho^{-1})^l$, $\rho \neq 1$, l — любое и $(x+1)^l$, $(x+1)^l$, l — нечетное $\geqslant 1$.

Доказательство. Из [2] следует, что $O_3(K,Q)$ совпадает с группой матриц вида

$$A=\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & \gamma & \delta \end{bmatrix}, \text{ где } a=\sqrt{\alpha\gamma},\ b=\sqrt{\beta\delta},\ \alpha\delta+\beta\gamma=1. \qquad (1)$$

Рассмотрим характеристическую матрицу

$$xE-A=\begin{bmatrix} x+1 & a & b \\ 0 & x+\alpha & \beta \\ 0 & \gamma & x+\delta \end{bmatrix}.$$

1. Пусть $b \neq 0$, тогда $\beta \neq 0$, $\delta \neq 0$. Матрица $xE+A$ эквивалентна матрице

$$B(x)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{\beta}{b}(x+1) & x+\alpha+\frac{\beta a}{b} & 0 \\ \frac{(x+1)(x+\delta)}{b} & \gamma+\frac{(x+\delta)a}{b} & 0 \end{bmatrix}.$$

1а. Если $\alpha \neq \delta$, то миноры второго порядка $\varphi_1(x) = \frac{\beta}{b}(x+1)$ и $\varphi_2(x)=x+\alpha+\frac{\beta a}{b}$ взаимно просты: $\varphi_1(1)=0$, $\varphi_2(1) \neq 0$, так как $\alpha+\frac{\beta a}{b} \neq 1$. Действительно, ввиду (1) и

$$\alpha \neq \delta \quad \left(\alpha+\frac{\beta a}{b}\right)^2=\alpha^2+\frac{\beta^2a^2}{b^2}=\frac{\alpha^2\beta\delta+\beta^2\alpha\gamma}{\beta\delta}=\frac{\alpha\beta(\alpha\delta+\beta\gamma)}{\beta\delta}=\frac{\alpha}{\delta}\neq 1,$$

В этом случае канонический вид матрицы $xE-A$ равен diag (1,1, def

$(xE-A))$. Учитывая (1), получим $\operatorname{def}(xE-A)=(x+1)(x2+(\alpha+\delta)x+1)$. Так как $\alpha\neq\delta$, то $\alpha+\delta\neq 0$ и элементарные делители A равны $x+1$, $x+\rho$, $x+\rho^{-1}$, ρ и ρ^{-1} — корни многочлена $x^2+(\alpha+\delta)x+1)$, $\rho\neq 1$.

1б. Пусть $\alpha=\delta$. В этом случае $\alpha+\frac{\beta a}{b}=1$, так как (см. выше) $\left(\alpha+\frac{\beta a}{b}\right)^2=\frac{\alpha}{\delta}=1$ при $\alpha=\delta$, и элемент b_{22} матрицы $B(x)$ равен $x+1$. Прибавим вторую строку матрицы $B(x)$, умноженную на $\frac{a}{b}$, к третьей. Получим матрицу

$$C(x)=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{\beta}{b}(x+1) & x+1 & 0 \\ \frac{1}{b}(x+1)(x+1) & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Покажем вычисление элемента c_{32} матрицы $C(x)$:

$$\gamma+\frac{(x+\delta)a}{b}+\frac{a}{b}(x+1)=\gamma+\frac{\alpha a}{b}+\frac{a}{b}=0,$$

так как

$$(\gamma b+\alpha a+a)^2=\gamma^2 b^2+\alpha^2 a^2+a^2=\gamma^2\beta\delta+\alpha^2\alpha\gamma+\alpha\gamma=\alpha\gamma(\gamma\beta+\alpha\delta)+\alpha\gamma=0$$

ввиду (1) и $\alpha=\delta$. Так как все миноры второго порядка матрицы $C(x)$ делятся на $x+1$, то элементарными делителями будут многочлены $x+1$, $(x+1)^2$.

2. Пусть $b=\sqrt{\beta\delta}=0$, $\beta=0$, $\delta\neq 0$, $a=\sqrt{\alpha\gamma}\neq 0$. При $\beta=0$ из (1) следует $\alpha\delta=1$, $\delta=\alpha^{-1}$. Матрица $xE-A$ в этом случае эквивалентна матрице

$$D(x)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{(x+1)(x+\alpha)}{a} & 0 & 0 \\ \frac{1}{a}(x+1) & 0 & x+\delta \end{bmatrix}.$$

2а. Если $\delta\neq 1$, то миноры второго порядка $x+\delta$ и $\frac{\gamma}{a}(x+1)$ взаимно просты. В этом случае $\operatorname{def}(xE-A)=(x+1)(x+\alpha)(x+\delta)$. Элементарными делителями матрицы A являются $x+1$, $x+\alpha$, $x+\alpha^{-1}$, $\alpha\neq 1$.

2б. Если $\delta=1=\alpha$, то все миноры второго порядка матрицы $D(x)$ делятся на $x+1$. В этом случае элементарные делители $x+1$, $(x+1)^2$.

2в. Если $b=0$ и $\delta=0$, $a\neq 0$, то из (1) $\gamma\beta=1$ и

$$xE-A=\begin{bmatrix} x+1 & a & 0 \\ 0 & x+\alpha & \beta \\ 0 & \gamma & x \end{bmatrix},\quad \beta\neq 0.$$

Минор второго порядка $\begin{vmatrix} a & 0 \\ x+\alpha & \beta \end{vmatrix}=a\beta\neq 0$. Поэтому канонический вид матрицы $xE-A$ равен $\operatorname{diag}(1,\ 1,\ \operatorname{def}(xE+A)=\operatorname{diag}(1,\ 1,\ (x+1)\times$ $\times(x^2+\alpha x+1))$. Элементарные делители $x+1$, $x+\rho$, $x+\rho^{-1}$, $\rho\neq 1$, так как $\alpha\neq 0\ \left(a=\sqrt{\alpha\gamma}\neq 0\right)$.

3. Пусть $a=b=0$, тогда $A=\operatorname{didg}(1,\ \alpha,\ \delta)$, $\alpha\delta=1$, либо $A=$ $=1\dotplus\begin{vmatrix} 0 & \beta \\ \gamma & 0 \end{vmatrix}$, $\gamma\beta=1$. Элементарные делители в первом случае $x+1$, $x+\alpha$, $x+\alpha^{-1}$, при $\alpha\neq 1$, либо $x+1$, $x+1$, $x+1$, при $\alpha=1$ $(A=E)$. Во втором случае элементарные делители матрицы A $x+1$, $(x+1)^2$. Гипотеза для $n=3$ доказана.

Отметим, что для любого набора многочленов, удовлетворяющих условиям а)—в) гипотезы, существуют элементы $O_{2m+1}(K,\ Q)$ с такими элементарными делителями. Они строятся аналогично тому, как в [3] строятся элементы $O_{2m}(K,\ Q)$.

1. К о з е л П. Т.//Конференция математиков Беларуси: Тез. докл. Гродно, 1992. Ч. 1. С. 27.
2. К о з е л П. Т.//Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1984. № 3. С. 45.
3. Там же. 1991. № 3. С. 68.

Поступила в редакцию 30.06.94.

УДК 531.36

Б. С. КАЛИТИН, В. А. МУРАЧ

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ ПО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ. МЕТОД ЗНАКОПОСТОЯННЫХ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА

This paper deals with the problem of the partial stability of nonautomonous systems by semidefinite Lyapunov functions. Proposed results are illustrated by the example of trianqular system.

Пусть задана система дифференциальных уравнений

$$\dot{s} = S(s,t),\ s\in\mathbf{R}^n,\ t\geqslant 0;\ S(0,t) = 0. \tag{1}$$

Предположим, что правые части $S:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^n$ и их частные производные $\partial S_i/\partial s_j$ непрерывны и ограничены в полуцилиндре $B_H\times\mathbf{R}^+$, $B_H = \{s\in\mathbf{R}^n|\ \|s\|\leqslant H\}$, $H>0$. Разобьем систему (1) на подсистемы, записав ее в виде

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x,\ z,\ w,\ t),\ x\in\mathbf{R}^p, \\ \dot{z} = Z(x,\ z,\ w,\ t),\ z\in\mathbf{R}^m, \\ \dot{w} = W(x,\ z,\ w,\ t),\ w\in\mathbf{R}^{n-p-m}, \end{cases} \tag{2}$$

где $s = \text{c o l o n}(x,\ z,\ w)$.

Интересуясь свойствами устойчивости нулевого решения системы (2) по отношению к переменным $(x, z) = (x_1,\dots x_p;\ z_1, \dots, z_m)$, будем использовать для краткости необходимые определения из [1]. Вместе с этим нам понадобится следующее

Определение. Пусть φ: $B_x\times\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^m$ — непрерывная функция, заданная в шаре $B_x = \{x\in\mathbf{R}^p|\ \|x\|\leqslant H\}$. Начало координат системы (2) называется (x, z)-устойчивым относительно разности $z-\varphi(x,\ t)$, если $\forall\mu>0$ и $\forall t_0\geqslant 0$ $\exists\delta = \delta(\mu,\ t_0)>0$ такое, что для всякого решения $x(t) = x(s_0,\ t_0,\ t)$, $z(t) = z(s_0,\ t_0,\ t)$ с начальными условиями $s_0 = (x_0,\ z_0,\ w_0)\in B_\delta$ и определенного для $t_0\leqslant t<t_0+\omega$, где $\omega = \omega(s_0,\ t_0)$, справедливо неравенство $\|z(t)-\varphi(x(t),\ t)\|<\mu$ при всех $t\in[t_0,\ t_0+\omega[$.

Если при этом число $\delta>0$ не зависит от выбора начального момента времени $t_0\geqslant 0$, то нулевое решение системы (2) называется (x, z)-равномерно устойчивым относительно разности $z-\varphi(x,\ t)$.

Теорема 1. Пусть для системы (2) существуют непрерывная функция $\varphi:B_x\times\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^m$, непрерывно дифференцируемая функция $V:B_H\times\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$, а также функции Хана a и b [1] такие, что для каждой точки $(S,\ t)\in B_H\times\mathbf{R}^+$ выполняются условия:

1) $V(s,\ t)\geqslant a(\|z-\varphi(x,\ t)\|)$; $V(0,\ t) = 0$;
2) $\dot{V}(s,\ t)\leqslant 0$.

Тогда нулевое решение (2) (x, z)-устойчиво по отношению к разности $z-\varphi(x,\ t)$.

Если, кроме того,

3) $V(s,\ t)\leqslant b(\|z-\varphi(x,\ t)\|)$,

то нулевое решение (2) (x, z)-равномерно устойчиво по отношению к разности $z-\varphi(x,\ t)$.

Теорема 2. Пусть для системы (2) существуют непрерывная локально липшицева по x равномерно по $t\geqslant 0$ функция $\varphi:B_x\times\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^m$, $\varphi(0,\ t)\equiv 0$, непрерывно дифференцируемая функция $V:B_H\times\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$, а также функции Хана a и b такие, что для каждой точки $(s,\ t)\in B_H\times\mathbf{R}^+$ выполняются условия:

1) $V(s,\ t)\geqslant a(\|z-\varphi(x,\ t)\|)$ и $V(0,\ t) = 0$;
2) $\dot{V}(s,\ t)\leqslant 0$;