

Утверждение б)  $\Rightarrow$  а) хорошо известно и очевидно. Достаточно положить  $f^-(z) := \overline{f^+(z^*)}$ , где  $z^*$  — точка, симметричная точке  $z \in \bar{D}^-$  относительно  $\bar{C}$ -окружности  $\Gamma$ .

Для доказательства обратного утверждения а)  $\Rightarrow$  б) заметим прежде всего, что дробно-линейное преобразование плоскости не изменяет условий теоремы, поэтому можно считать, что  $\infty \in D^-$ . Далее, поскольку отображение симметрии есть гомеоморфизм, то, в частности, при продолжении по симметрии однолистной функции  $f^+$  будет соответствовать однолистная функция  $f^-$ . Положим  $f_0^+(z) \equiv z$ . Тогда соответствующая функция  $f_0^-$ , для которой  $f_0^-(t) = \bar{t}$  при  $t \in L$ , также является однолистной. Беря любую точку  $z_0 \in D^+$  и применяя принцип аргумента, имеем:

$$\frac{1}{2\pi} \arg (f^-(t) - \bar{z}_0)|_{L-1} = -\frac{1}{2\pi} \arg (f^-(t) - \bar{z}_0)|_L = -\frac{1}{2\pi} \arg (\overline{t - z_0})|_L = 1.$$

Отсюда вытекает, что функция  $\overline{f^-(z)} - z_0$  имеет в области  $D^-$  единственный простой нуль  $z^*$ . Сопоставляя  $z_0 \rightarrow z^*$ , получаем конформное отображение 2-го рода  $D^+$  на  $D^-$ , оставляющее неподвижными все точки кривой  $L$ . Тем самым определяется и конформный гомеоморфизм 2-го рода сферы  $S$  на себя, оставляющий неподвижными все точки кривой  $L$ . Таким образом,  $L$  — линия симметрии сферы  $S$ , т. е.  $\bar{C}$ -окружность.

В заключение отметим, что из теоремы 2 вытекает некоторое обращение классического принципа симметрии Римана—Шварца, а именно

*Следствие.* Пусть  $\bar{D}^+ \subset S$  — односвязная область, и любая функция  $f^+ : M \in (D^+)$ , для которой  $\text{Im } f^+(t) \equiv 0$  при  $t \in \Gamma$ , допускает мероморфное продолжение в  $D^-$ . Тогда есть  $C$ -окружность.

1. Ш а б а т Б. В. Введение в комплексный анализ. М., 1976. Т. I.
2. Ш и ф ф е р М., С п е н с е р Д. К. Функционалы на конечных римановых поверхностях. М., 1957.
3. З в е р о в и ч Э. И. // Сибир. мат. журн. 1973. Т. XIV. Вып. 1. С. 64.

Поступила в редакцию 17.02.95.

УДК. 517.968

В. П. КОЗЛОВ, Н. А. АБДЕЛЬРАЗАК (ИОРДАНИЯ)

## МЕТОД ПАРНЫХ СУММАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ЗАДАЧ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

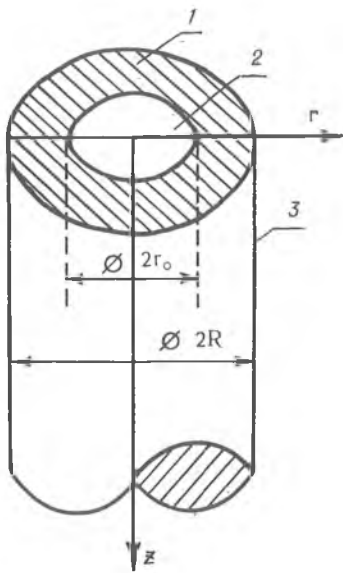
This paper is devoted to the method's of dual series to find exact solution for axially symmetric mixed boundary nonstationary heat conductivity problem relevant to solve the dual series with respect to the Bessels' function, on the semibounded cylinder with the radius  $R$ , on the surface ( $z=0, 0 \leq r < r_0 \leq R$ ).

The final result of the solution of given problems introduces the Fredholm integral equation.

*Постановка задачи.* Требуется найти температурное поле  $\theta(r, z, \tau) = T(r, z, \tau) - T_0$  (где  $r, z$  — цилиндрические координаты,  $\tau$  — время) в полуограниченном сплошном цилиндре радиуса  $r=R$  (см. рисунок). Начальная температура тела равна  $T_0$ . На торцевой поверхности полуограниченного цилиндра  $z=0, 0 \leq r < r_0$  задается произвольная функция температуры  $\theta(r, 0, \tau) = f(r, \tau)$ , отличная от начальной. На оставшейся части торцевой поверхности полуограниченного цилиндра  $z=0, r_0 < r < R$  существует идеальная теплоизоляция. Боковая поверхность полуограниченного цилиндра на протяжении всего процесса теплообмена поддерживается при температуре  $\theta(R, z, \tau) = 0$  ( $z > 0, r = R$ ). Учитывая симметрию температурного поля относительно оси цилиндра  $r=0, z > 0$ , имеем дополнительное граничное условие на оси  $\theta_r(0, z, \tau) = 0$ . Условия на бесконечности ( $z \rightarrow \infty$ ) очевидны:  $\theta(r, \infty, \tau) = 0$ .

После применения интегрального преобразования Лапласа

$$\bar{\theta}(r, z, s) = L[\theta(r, z, \tau)] = \int_0^{\infty} \theta(r, z, \tau) \exp(-s\tau) d\tau$$



Физическая модель полуограниченного сплошного цилиндра и схематичное изображение граничных условий на его поверхностях:

- 1 —  $\bar{\theta}_z(r, 0, s) = 0, r_0 < r < R;$   
 2 —  $\bar{\theta}(r_0, z, s) = f(r, s), 0 \leq z < \infty;$   
 3 —  $\bar{\theta}(R, z, s) = 0, 0 \leq z < \infty$

к дифференциальному уравнению нестационарной теплопроводности в цилиндрических координатах  $(r, z)$  и соответственно заданным граничным условиям математическая постановка задачи формулируется в следующем виде:

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_{rr}(r, z, s) + \frac{1}{r} \bar{\theta}_r(r, z, s) + \bar{\theta}_{zz}(r, z, s) = \\ = \frac{s}{a} \bar{\theta}(r, z, s), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $z, Res > 0, 0 \leq r < R, a$  — коэффициент температуропроводности,  $s$  — параметр L-преобразования.

Граничные условия для (1) имеют вид:

$$\bar{\theta}(r, 0, s) = \bar{f}(r, s), \quad 0 \leq r < r_0, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{f}(r, s) &= L[f(r, \tau)] = \\ &= \int_0^{\infty} f(r, \tau) \exp(-s\tau) d\tau, \end{aligned}$$

$$\bar{\theta}_z(r, 0, s) = 0, \quad r_0 < r < R, \quad (3)$$

$$\bar{\theta}(R, z, s) = 0, \quad 0 \leq z < \infty, \quad (4)$$

$$\bar{\theta}_r(0, z, s) = 0, \quad 0 \leq z < \infty, \quad (5)$$

$$\bar{\theta}_z(r, \infty, s) = 0, \quad 0 \leq r < R. \quad (6)$$

Разделяя переменные в уравнении (1) и используя граничные условия (4) — (6), получим решение нашей задачи в виде следующего ряда:

$$\begin{aligned} \bar{\theta}(r, z, s) &= \bar{T}(r, z, s) - T_0/s = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \bar{C}_n(\lambda_n, s) \exp\left(-|z/r_0| \sqrt{\lambda_n^2 + sr_0^2/a}\right) J_0(\lambda_n \rho), \end{aligned} \quad (7)$$

в котором  $\lambda_n$  — корни уравнения

$$J_0(\lambda_n \alpha) = 0, \quad (8)$$

причем  $\rho = \frac{r}{r_0}, \quad \alpha = \frac{R}{r_0}$ .

Используя разрывные граничные условия (2) и (3) на поверхности  $z = 0$ , из (7) получаем парные сумматорные уравнения (парные ряды) вида:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{C}_n(\lambda_n, s) J_0(\lambda_n \rho) = \bar{f}(\rho, s), \quad 0 \leq \rho < 1, \quad (9)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{C}_n(\lambda_n, s) \sqrt{\lambda_n^2/r_0^2 + s/a} J_0(\lambda_n \rho) = 0, \quad 1 < \rho < \alpha, \quad (10)$$

из которых требуется определить  $\bar{C}_n(\lambda_n, s)$ .

При  $s \rightarrow 0$  (стационарный вариант рассматриваемой задачи) парные ряды (9), (10) и решение (7) переходят в известные [1]. Рассмотрим метод сведения полученных парных рядов (9), (10) к интегральному уравнению Фредгольма. Введем обозначение

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{C}_n(\lambda_n, s) \sqrt{\lambda_n^2/r_0^2 + s/a} J_0(\lambda_n \rho) = \bar{h}(\rho, s), \quad 0 \leq \rho < 1. \quad (11)$$

Тогда по формуле ряда Фурье—Бесселя коэффициенты даются в виде:

$$\bar{C}_n(\lambda_n, s) = \frac{2}{\alpha^2 J_1^2(\lambda_n \alpha) \sqrt{\lambda_n^2/r_0^2 + s/a}} \int_0^1 h(u, s) J_0(\lambda_n u) u du. \quad (12)$$

Так как при этом считалось, что соответствующий интеграл на промежутке  $1 < \rho < \alpha$  равен нулю, то одно из парных уравнений (10) уже удовлетворено.

Введем теперь вместо  $\bar{h}(\rho, s)$  новую неизвестную функцию  $\bar{\Phi}(t, s)$  с помощью формулы

$$\bar{h}(\rho, s) = -\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \int_0^1 \frac{\bar{\Phi}(t, s)}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} dt \quad (13)$$

и преобразуем выражение (12)

$$\begin{aligned} \bar{C}_n(\lambda_n, s) &= \frac{2}{\alpha^2 J_1^2(\lambda_n \alpha) \sqrt{\lambda_n^2/r_0^2 + s/a}} \int_0^1 J_0(\lambda_n u) \left[ \frac{d}{du} \int_0^1 \frac{\bar{\Phi}(t, s)}{\sqrt{t^2 - u^2}} dt \right] du = \\ &= \frac{2}{\alpha^2 J_1^2(\lambda_n \alpha) \sqrt{\lambda_n^2/r_0^2 + s/a}} \int_0^1 \frac{\bar{\Phi}(t, s) \cos(\lambda_n t) dt}{t}. \end{aligned} \quad (14)$$

При выводе (14) использовалось значение следующего интеграла [4]:

$$\int_0^1 \frac{J_1(\lambda_n u) du}{\sqrt{t^2 - u^2}} = \frac{1}{\lambda_n t} - \frac{\cos(\lambda_n t)}{\lambda_n t}. \quad (15)$$

Подставляя значение  $\bar{C}(\lambda_n, s)$  из (14) в первое из парных уравнений (9), получим

$$\begin{aligned} &\sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \frac{\bar{\Phi}(t, s)}{\sqrt{t}} \times \\ &\times \left[ \frac{2}{\alpha^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\lambda_n} J_0(\lambda_n \rho) J_{-1/2}(\lambda_n t)}{J_1^2(\lambda_n \alpha) \sqrt{\lambda_n^2/r_0^2 + s/a}} \right] dt = \bar{f}(\rho, s), \quad 0 \leq \rho < 1. \end{aligned} \quad (16)$$

Применим обратное преобразование Лапласа к уравнению (16):

$$\begin{aligned} L^{-1}[f(\rho, s)] &= f(\rho, \tau); \\ \left[ \frac{\bar{\Phi}(t, s)}{\sqrt{s + a\lambda_n^2/r_0^2}} \right] &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\tau} \frac{\Phi(t, \xi)}{\sqrt{\tau - \xi}} \exp\left[-\lambda_n^2 a(\tau - \xi)/r_0^2\right] d\xi, \end{aligned}$$

тогда оригинал (16) запишется в виде:

$$\begin{aligned} &\sqrt{\frac{a}{2}} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} \left[ \frac{2}{\alpha^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\lambda_n} J_0(\lambda_n \rho) J_{-1/2}(\lambda_n t)}{J_1^2(\lambda_n \alpha)} \right] \times \\ &\int_0^{\tau} \frac{\Phi(t, \xi)}{\sqrt{\tau - \xi}} \exp\left[-\lambda_n^2 a(\tau - \xi)/r_0^2\right] d\xi dt = f(\rho, \tau), \quad 0 \leq \rho < 1. \end{aligned} \quad (17)$$

Введем обозначение

$$\int_0^{\tau} \frac{\Phi(t, \xi)}{\sqrt{\tau - \xi}} \exp\left[-\lambda_n^2 a(\tau - \xi)/r_0^2\right] d\xi = F(t, \tau)/\lambda_n. \quad (18)$$

Рассматривая (18) как интегральное уравнение Абеля, нетрудно найти  $\Phi(t, \tau)$ :

$$\Phi(t, \tau) = \frac{1}{\pi \lambda_n} \exp\left[-\lambda_n^2 a \tau / r_0^2\right] \times$$

$$\times \frac{d}{d\tau} \int_0^{\tau} \frac{F(t, \xi)}{\sqrt{\tau - \xi}} \exp[-\lambda_n^2 a \xi / r_0^2] d\xi. \quad (19)$$

Уравнения (18) и (19) определяют связь между неизвестными функциями  $\Phi(t, \tau)$  и  $F(t, \tau)$ .

Подставим (18) в уравнение (17) и получим:

$$\sqrt{\frac{a}{2}} \int_0^1 \frac{F(t, \tau)}{\sqrt{t}} S(\rho, t) dt = f(\rho, \tau), \quad 0 \leq \rho < 1, \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} S(\rho, t) &= \frac{2}{\alpha^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n \rho) J_{-1/2}(\lambda_n t)}{\sqrt{\lambda_n} J_1^2(\lambda_n \alpha)} = \\ &= \int_0^{\infty} J_0(\rho x) J_{-1/2}(tx) \sqrt{x} dx - \frac{2}{\pi} L(\rho, t), \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$L(\rho, t) = \int_0^{\infty} \frac{K_0(\alpha y)}{I_0(\alpha y)} I_0(\rho y) I_{-1/2}(ty) \sqrt{y} dy. \quad (22)$$

Первая квадратура, стоящая в формуле (21), может быть выражена через функцию Хевисайда [1]:

$$\int_0^{\infty} J_0(\rho x) J_{-1/2}(tx) \sqrt{x} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \frac{H(\rho - t)}{\sqrt{\rho^2 - t^2}}, \quad (23)$$

где

$$H(\rho - t) = \begin{cases} 0, & \rho < t, \\ 1, & \rho > t. \end{cases} \quad (24)$$

С учетом формул (21) — (24), уравнение (19) запишется в виде:

$$\int_0^{\rho} \frac{F(t, \tau)/t}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}} f(\rho, \tau) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 \frac{F(t, \tau)}{\sqrt{t}} L(\rho, t) dt. \quad (25)$$

Рассматривая (25) как интегральное уравнение Абеля, находим

$$\begin{aligned} F(t, \tau) &= \frac{2t}{\sqrt{\pi a}} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{uf(u, \tau) du}{\sqrt{t^2 - u^2}} + (2/\pi)^{3/2} t \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{u du}{\sqrt{t^2 - u^2}} \times \\ &\times \int_0^1 \frac{F(y, \tau)}{\sqrt{y}} L(u, y) dy. \end{aligned} \quad (26)$$

Последнее уравнение есть интегральное уравнение относительно искомой функции  $F(t, \tau)$ , однако его ядро представляется двукратной квадратурой. С помощью несложных преобразований уравнение (26) можно привести к виду:

$$F(x, \tau) - \frac{2}{\pi} x \int_0^1 (x/t)^{1/2} K(x, t) F(t, \tau) dt = f_n(x, \tau),$$

где

$$K(x, t) = \int_0^{\infty} \frac{K_0(\alpha y)}{I_0(\alpha y)} I_{-1/2}(ty) I_{-1/2}(xy) y dy,$$

$$f_n(x, \tau) = \frac{2}{\sqrt{\pi a}} x \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{uf(u, \tau) du}{\sqrt{x^2 - u^2}}.$$

После того, как определена функция  $F(x, \tau)$ , по формуле (19) находим функцию  $\Phi(t, \tau)$ . Применив преобразование Лапласа к  $L[\Phi(t, \tau)] = \Phi(t, s)$ , по формуле (14) определяем коэффициенты  $C_n(\lambda_n, s)$

парных уравнений (9), (10), а следовательно, искомое решение для изображения  $\theta(r, z, s)$  (7). Оригинал  $\theta(r, z, \tau) = L^{-1}[\theta(r, z, s)]$  находится известными способами, либо с использованием обширных таблиц обратного преобразования Лапласа [3, 4].

1. У ф л я н д Я. С. Метод парных уравнений в задачах математической физики. Л., 1977.

2. S e d d o n I. Mixed boundary value problems in potential theory. Amsterdam, 1966.

3. Б е й т м а н Г., Э р д е й и А. Таблицы интегральных преобразований. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. М., 1969.

4. П р у д н и к о в А. П., Б р ы ч к о в Ю. А., М а р и ч е в О. И. Интегралы и ряды специальных функций. М., 1983.

Поступила в редакцию 06.03.95.

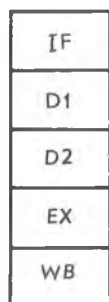
УДК 681.3

С. С. ЗМАЧИНСКИЙ, Г. И. ШПАКОВСКИЙ,  
Н. В. СЕРИКОВА, О. А. БЕЛЕЦКИЙ

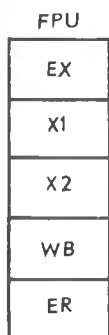
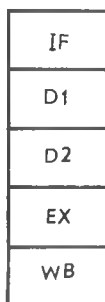
## АНАЛИЗ ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ СУПЕРСКАЛЯРНОГО МИКРОПРОЦЕССОРА

A program model of the Pentium superscalar processor is described. The pipeline performances are studied with respect to optimization level of compilers. Some recommendations on programming methods and microprocessor structure improvement are suggested.

U-конвейер



V-конвейер



Конвейеры процессора Пентиум

Пентиум — первый суперскалярный микропроцессор (МП), разработанный фирмой Intel, вслед за i386 и i486. Его система команд включает команды i486 с некоторыми расширениями. Все программы, написанные для МП младших моделей, выполняются и на Пентиуме. Для повышения быстродействия в Пентиум внесены существенные изменения: два целочисленных конвейера (U и V) и конвейерное устройство плавающей запятой (FPU), которые могут работать независимо. Ступени конвейеров приведены на рисунке: IF — предвыборка; D1 — декодирование; D2 — генерация адреса; EX, X1, X2 — вычисление; WB — запись результата; ER — сообщение об ошибке. Двойной конвейер может запус-

кать в каждом такте две целочисленные команды или одну плавающую. Конвейер U выполняет все целочисленные команды, а также начальные ступени плавающих команд. V-конвейер может выполнять параллельно с U-конвейером простые целые инструкции и плавающую команду FХSN.

В связи с возможностью запуска параллельных команд большое значение приобретает особая оптимизация кода, позволяющая максимально загрузить ступени всех конвейеров. Однако для этого нужны специальные компиляторы. Поэтому значительный интерес представляют вопросы: насколько эффективно будут выполняться на Пентиуме уже существующие программы, что даст использование оптимизирующих компиляторов, какое максимальное ускорение может дать оптимизация? В статье делается попытка ответить на эти вопросы путем измерения процесса выполнения прикладных программ на программной модели процессора Пентиум.

В качестве примера, демонстрирующего работу целочисленных конвейеров, рассмотрим фрагмент программы на Фортране: