Достаточность. Пусть группа G есть расширение некоторой p-группы с помощью нильпотентной p'-группы. Тогда $G \in \Delta_p \Delta_{p'}$. Поэтому $l_p \mathrm{form} G \subseteq \Delta_p \Delta_{p'}$. Но, согласно теореме, все p-насыщенные подформации из $\Delta_p \Delta_{p'}$ наследственны. Значит, наследственна и каждая подформация из $l_p \mathrm{form}\ G$. Следствие 2 доказано.

1. Gaschutz W. // Math. Z. 1963. V. 80. № 4. P. 300.
2. Neumann P. // Bull. London Math. Soc. 1970. V. 2. № 1. P. 91.
3. Скиба А. Н. // Мат. заметки. 1980. Т. 27. № 3. С. 345.
4. Шеметков Л. А. Формации конечных групп. М., 1978.
5. Шеметков Л. А., Скиба А. Н. Формации алгебраических систем. М., 1989.
6. Чунихин С. А. Подгруппы конечных групп. Мн., 1964.
7. Джарадин Джехад. Неприводимые p-локальные формации длины ≤3. Гомель, 1994. Препринт ГГУ. №24.

Поступила в редакцию 10.02.95.

УДК 517.944

С. М. АЛЕКСЕЕВА, Н. И. ЮРЧУК

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД КВАЗИОБРАЩЕНИЯ В ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ

In this constract article the modification of method quasi-inversion, devising by R. Lattes and Y. -L. Lions for problems with local boundary conditions.

This modified method is used to investigate control problem for heat equation vith integral condition.

В работе предлагается модификация метода квазиобращения, разработанного Р. Латтесом и Ж. -Л. Лионсом для исследования задач с локальными условиями, и этим модифицированным методом решается проблема управления решением $u(x, t, \xi)$ смешанной задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \ u(x, 0) = \xi(x), \ 0 < x < 1,$$

$$u(0, t) = 0, \ \int_0^1 u(x, t)dx = 0, \ t > 0, \tag{1}$$

где управление осуществляется начальным условием $\xi(x)$.

Необходимость модификации метода здесь обуславливается тем, что область определения оператора, порожденного этой задачей, из-за интегрального условия не является плотной, и упомянутый метод квазиобращения в таком случае непосредственно не применим.

Основной результат данной работы следующий. Пусть заданы $T > 0$ и функция $\chi(x)$ из пространства Соболева $W_2^1(0,1)$, удовлетворяющая условиям $\chi(0) = 0$, $\int_0^1 \chi(x)dx = 0$.

Тогда решение $u(x, t, \xi_\varepsilon)^0$ задачи (1) в точке $t = T$ при $\varepsilon \to 0$ стремится к функции $\chi(x)$ в некоторых пространствах, если «управляющая» функция $\xi_\varepsilon(x) = v_\varepsilon(x, 0)$, где $v_\varepsilon(x, t)$ — решение квазиобратной к (1) задачи:

$$\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial^2 v_\varepsilon}{\partial x^2} - \varepsilon \frac{\partial^3 v_\varepsilon}{\partial x^2 \partial t} = 0, \ (x, t) \in Q,$$

$$v_\varepsilon(x, T) = \chi(x),$$

$$v_\varepsilon(0, t) = 0, \ \int_0^1 v_\varepsilon(x, t)dx = 0, \ t < T. \tag{2}$$

Здесь $Q = \{(x, t): 0 < x < 1, \ 0 < t < T\}$.

Наши рассуждения сводятся к следующему: сначала докажем корректную разрешимость построенной квазиобратной задачи (2), а затем — сходимость модифицированного метода квазиобращения, т. е. покажем, что $u(x, T, \xi_\varepsilon) \to \chi(x)$ при $\varepsilon \to 0$.

1. **Корректная разрешимость квазиобратной задачи.** Введем пространства решений $E^{k,l}$ и пространства правых частей $F^{k,l}$ задачи (2) со следующими нормами:

$$|||v_\epsilon|||^2_{k,l} = \int_Q (1-x)^k \left(\frac{\partial^{l+1} v_\epsilon}{\partial x^l \partial t} \right)^2 dxdt +$$

$$+ \frac{\epsilon}{2} \int_Q (1-x)^k \left(\frac{\partial^{l+2} v_\epsilon}{\partial x^{l+1} \partial t} \right)^2 dxdt, \tag{3}$$

$$\| \chi \|^2_{k,l} = \int_0^1 (1-x)^k \left(\frac{d^{l+1}\chi}{dx^{l+1}} \right)^2 dx, \ k=1, \ 2; \quad l=0, \ 1; \ k>l. \tag{4}$$

Теорема 1. Для решения задачи (2) справедливы априорные оценки

$$|||v_\epsilon|||^2_{k,l} \leqslant c_{k,l} \| \chi \|^2_{k,l}, \tag{5}$$

где

$$c_{k,l} = (2^{k+l-1} + k + l - 1)^2 \frac{T}{\epsilon} \exp\left[2(2^{k+l-1} + k + l - 1) \right]^2 \frac{T^2}{\epsilon^2},$$

$$k=1, \ 2; \ l=0, \ 1; \ k>l.$$

Априорные оценки (5) (содержащие три случая ((k, l):(1, 0), (2, 0), (2, 1)) разных порядков с различными весовыми функциями) доказываются, следуя [2], с помощью интегрирования по частям и некоторых оценок форм, полученных следующим образом. В первых двух случаях эти формы есть результат умножения в $L_2(Q)$ уравнения задачи (2) на множители-функции

$$(1-x)\frac{\partial v_\epsilon}{\partial t} + I\frac{\partial v_\epsilon}{\partial t}, \ Ig = \int_0^x g(\xi, \ t)d\xi,$$

и

$$(1-x)^2\frac{\partial v_\epsilon}{\partial t} + 2(1-x)I\frac{\partial v_\epsilon}{\partial t}$$

соответственно. В третьем случае к уравнению задачи (2) сначала применяется оператор $(1-x)^2 + 2(1-x)I$, а затем результат умножается в $L_2(Q)$ на вторую множитель-функцию.

Из теоремы 1 следует единственность решения задачи (2) и его непрерывная зависимость от функции $\chi(x)$ в соответствующих нормах (3), (4).

Пользуясь методом, аналогичным методу Фурье, представим решение задачи (2) в виде биортогонального ряда с параметром t:

$$v_\epsilon(x, \ t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{2\sqrt{\lambda_k}}{(1+\lambda_k\epsilon)^2} \varphi_{2k-1}(T-t) + \varphi_{2k} \right) \times \right.$$

$$\left. \times X_{2k}(x) + \varphi_{2k-1} X_{2k-1}(x) \right\} e^{\frac{\lambda_k}{1+\lambda_k\epsilon}(T-t)}, \tag{6}$$

по системе собственных и присоединенных функций

$$X_0(x) = x, \ X_{2k-1}(x) = x\cos 2\pi kx,$$

$$X_{2k}(x) = \sin 2\pi kx, \ k=1, \ 2, \ \ldots \tag{7}$$

несамосопряженной задачи Штурма—Лиувилля, соответствующей задаче (1) (коэффициент при $X_0(x)$ равен 0).

В представлении (6)

$$\varphi_{2k} = \int_0^1 \chi(x) Y_{2k}(x) dx, \ \varphi_{2k-1} = \int_0^1 \chi(x) Y_{2k-1}(x) dx, \tag{8}$$

где

$$Y_0(x) = 2, \ Y_{2k-1}(x) = 4\cos 2\pi kx,$$

$$Y_{2k}(x) = 4(1-x)\sin 2\pi kx,\ k = 1,2,\ldots \tag{9}$$

— собственные и присоединенные функции сопряженной задачи Штурма—Лиувилля, $\lambda_k = (2\pi k)^2$, $k = 0,1,\ldots$ — собственные значения.

Идея представления задачи (2) в виде биортогонального ряда с параметром t здесь основывается на результатах работ [3] и [4] о базисности системы функций (7) и возможности разложения в биортогональный ряд по этой системе функции $\chi(x)$.

Теорема 2 (о достаточных условиях существования классического и обобщенных решений квазиобратной задачи).

1. Пусть функция $\chi(x) \in W_2^3(0, 1)$ удовлетворяет условиям

$$\chi(0) = 0,\ \int_0^1 \chi(x)dx = 0,\ \chi'(0) = \chi'(1),\ \chi''(0) = 0. \tag{10}$$

Тогда функция $v_\varepsilon(x, t)$, определяемая биортогональным рядом (6), является классическим решением задачи (2).

2. Пусть функция $\chi(x) \in F^{k,\,l}$ удовлетворяет условиям

$$\chi(0) = 0,\ \int_0^1 \chi(x)dx = 0 \tag{11}$$

и при $l = 1$ условию

$$\chi'(0) = \chi'(1). \tag{12}$$

Тогда ряд (6) является обобщенным решением задачи (2) в пространстве $E^{k,\,l}$.

Доказательство п. 1 теоремы осуществляется по классической схеме и состоит в установлении равномерной сходимости ряда (6) и рядов, полученных его почленным дифференцированием один раз по t и два раза по x. Последнее вытекает из сходимости, в силу неравенства Бесселя, мажорантных числовых рядов из коэффициентов Фурье функций $\chi'''(x)$, $(1-x)\chi'''(x)$, $\chi''(x)$ по тригонометрической системе $\cos 2\pi kx$ и $\sin 2\pi kx$.

Утверждение п. 2 (т. е. сходимость ряда (6) в пространстве $E^{k,l}$) следует из априорных оценок (5).

Из доказанных теорем следует, что задача (2) при $\varepsilon > 0$, рассматриваемая в пространствах $E^{k,\,l}$ и $F^{k,\,l}$, поставлена корректно в смысле Адамара—Петровского.

2. **Сходимость модифицированного метода квазиобращения.** Положим

$$\xi_\varepsilon(x) = v_\varepsilon(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{2\sqrt{\lambda_k}}{(1+\lambda_k\varepsilon)^2}\varphi_{2k-1}T + \varphi_{2k} \right) X_{2k}(x) + \varphi_{2k-1}X_{2k-1}(x) \right\} l^{\frac{\lambda_k}{1+\lambda_k\varepsilon}T} \tag{13}$$

и обозначим $u_\varepsilon(x, t, \xi_\varepsilon)$ — решение задачи (1) при $\xi(x) = \xi_\varepsilon(x)$.

Теорема 3. Пусть функция $\chi(x) \in W_2^3(0, 1)$ удовлетворяет условиям (10). Тогда

$$\int_0^1 \left| \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u_\varepsilon(x, T, \xi_\varepsilon) - \chi(x)) \right|^2 dx \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0. \tag{14}$$

2. Пусть функция $\chi(x) \in W_2^2(0, 1)$ удовлетворяет условиям (11), (12). Тогда

$$\int_0^1 |u_\varepsilon(x, T, \xi_\varepsilon) - \chi(x)|^2 dx \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0, \tag{15}$$

$$\int_0^1 \left| \frac{\partial}{\partial x} (u_\varepsilon(x, T, \xi_\varepsilon) - \chi(x)) \right|^2 dx \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0. \tag{16}$$

Сходимости (15), (16) и (14) следуют из оценок левых частей этих выражений величинами $C\varepsilon^{1/2}\|\chi\|^2_{W_2^{(k+1)}(0,1)}$ при $k=1, 2, 3$ соответственно. Для получения этих оценок используется представление разности $u_\varepsilon(x, T, \xi_\varepsilon)-\chi(x)$ и производных от нее в виде соответствующих биортогональных рядов и применение к ним неравенств, заменяющих, в случае рассматриваемых нами биортогональных рядов, равенство Парсеваля, элементарных неравенств и неравенства Бесселя относительно тригонометрической системы.

Таким образом, из этой теоремы следует, что в классическом случае (п. 1) модифицированный метод квазиобращения сходится в пространстве $W_2^2(0, 1)$, если искомая «управляющая» функция $\xi_\varepsilon(x)$ является следом при $t=0$ обычного классического решения квазиобратной задачи (2).

В обобщенном случае (п. 2) модифицированный метод квазиобращения сходится в пространствах $L_2(0,1)$, $W_2^1(0, 1)$. В этом случае «управляющая» функция $\xi_\varepsilon(x)$ представляет собой след при $t=0$ обобщенного решения квазиобратной задачи (2).

1. Л а т т е с Р., Л и о н с Ж.-Л. Метод квазиобращения и его приложения. М., 1970.
2. Ю р ч у к Н. И. // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22. № 12. С. 2117.
3. И л ь и н В. А. // Докл. АН СССР. 1976. Т. 227. № 4.
4. И о н к и н Н. И. // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 15. № 7. С. 1279.

Поступила в редакцию 17.02.95.

УДК 517.948.32:517.544

Э. И. ЗВЕРОВИЧ

ПРОДОЛЖЕНИЕ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ ПО СИММЕТРИИ

The conditions under which the function, complex conjugate to a given meromorphic function in a domain, allowed to be meromorphically continued in some other domain are investigated.

Продолжением «по симметрии» функции f^+, мероморфной в области D^+, будем называть мероморфное продолжение функции $\overline{f^+}$, комплексно сопряженной к функции f^+. в некоторую область, внешнюю по отношению к области D^+. Такое продолжение не следует смешивать с классическим «принципом симметрии» Римана—Шварца [1], где речь идет о мероморфном продолжении самой функции f^+.

В этой статье будет дано описание всех (в некотором смысле) продолжений по симметрии и установлена связь продолжения по симметрии с классическим принципом симметрии Римана—Шварца. Из теоремы единственности для аналитических функций [1] вытекает, что может существовать не более одного продолжения по симметрии, коль скоро внешняя область, в которую надо продолжать, задана. Продолжение по симметрии часто встречается в приложениях, однако условия, при которых оно возможно, исследованы недостаточно.

Желая исследовать здесь эти условия, рассмотрим сначала такую ситуацию, при которой существует продолжение по симметрии любой функции класса $M(\bar{D}^+)$, который вводится ниже. Пусть $\bar{C}:=C\cup\{\infty\}$—расширенная комплексная плоскость, которую условимся снабжать сферической метрикой и в связи с этим называть «сферой Римана». Пусть D^+ — лежащая на $\bar{C}$ конечносвязная область, граница которой $L=L_0\cup L_1\cup\ldots\cup L_n$ состоит из $(n+1)$ связных компонент L_ν, каждая из которых есть простая замкнутая кривая, лежащая в C. Пусть $f^+:D^+\cup L\to\bar{C}$— функция, мероморфная в D^+, непрерывная (в сферической метрике) в $\bar{D}^+=D^+\cup L$, имеющая конечное множество полюсов в $D^+\cup L=\bar{D}^+$. Множество всех таких функций обозначим через $M(\bar{D}^+)$.

Теорема 1. Любая функция $f^+\in M(\bar{D}^+)$ допускает продолжение по симметрии на второй лист дубля области с краем $\bar{D}^+$. При дополнительном предположении, что $\operatorname{Im} f^+(t)=0$ для всех $t\in L$, функция f^+ допускает мероморфное продолжение на второй лист дубля.