Рассчитанная потенциальная энергоемкость нити была равна $E_p = 1{,}38 \cdot 10^{-7}$ (Дж), наибольшее натяжение по длине струны $I = 0{,}527$ (Н). Растяжение струны радиуса в равномерном вращении также можно протестировать аналитически.

1. Черевацкий С. Б., Ромашов Ю. П., Сидорин С. Г. // Механика композит. материалов. 1985. № 4. С. 689.
2. Розин Л. А. Стержневые системы как системы конечных элементов. Л., 1976. С. 41.
3. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. М., 1979. С. 86.
4. Бухгольц Н. Н. Основной курс теоретической механики. М., 1972. Ч. 1. С. 234.

Поступила в редакцию 16.11.94.

УДК 519.233.2

Д. В. СИНЬКЕВИЧ, Н. Н. ТРУШ

ВЫЧИСЛЕНИЕ СМЕШАННЫХ МОМЕНТОВ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ АГРЕГИРОВАННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ОДНОРОДНОЙ МАРКОВСКОЙ ЦЕПИ ДЛЯ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ СХЕМЫ

The formula for calculation of mixed higher order moments of agregative state frequency of homogeneous Markovian chain for polynomial scheme is obtained.

Сделаем несколько традиционных предположений. Пусть в каждом из T моментов времени имеются система из $N = N(t)$, $t = \overline{1, T}$, микрообъектов, распределенных по r состояниям, и наблюдения $n_{j,t}$, $j = \overline{1, r}$, $t = \overline{1, T}$, являющиеся абсолютными частотами попадания микрообъектов в j-е состояние в момент времени t. Математической моделью эволюции каждого из N микрообъектов служит однородная, конечного числа состояний марковская цепь с одной и той же матрицей $P = (P_{ij})$, $i, j = \overline{1, r}$, переходных вероятностей, причем все N марковских цепей независимы.

Введем ряд обозначений, которые потребуются нам в дальнейшем: $q_{j,t}$, $j = \overline{1, r}$, $t = \overline{1, T}$, — безусловная вероятность попадания микрообъекта в j-е состояние в момент времени t;

$P_{ij}^{(s)}$, $i, j = \overline{1, r}$, $s = 0, 1, 2, \ldots$, — переходная вероятность из i-го состояния в j-е состояние за s шагов;

$$(m)_\alpha = \begin{cases} m!/(m-\alpha)!, & \alpha = \overline{0, m}, \\ 0, & \alpha > m; \end{cases}$$

$j = j(1, 2, \ldots, r)$ — произвольная перестановка индексов $(1, 2, \ldots, r)$;
$j(i)$, $i = \overline{1, l}$, — l первых членов этой перестановки, $l = \overline{1, r}$;
$k(i)$, $i = \overline{1, l}$, — l произвольных натуральных чисел, $l = \overline{1, r}$;

$$M_\alpha(s_1, s_2, \ldots, s_\nu) = \sum_{\mu=1}^{\nu} \sum_{\alpha_1 + \ldots + \alpha_\mu = \alpha} s_{j(1)}^{\alpha_1} \cdot s_{j(2)}^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot s_{j(\mu)}^{\alpha_\mu},$$

если α — натуральное число и $M_\alpha(s_1, s_2, \ldots, s_\nu) \equiv 1$, если $\alpha = 0$, где α_i, $i = \overline{1, \mu}$ — совокупность μ натуральных чисел, удовлетворяющих условию $\sum_{i=1}^{\mu} \alpha_i = \alpha$, $(s_{j(1)}, s_{j(2)}, \ldots, s_{j(\mu)})$ — подмножество из μ элементов множества $(s_1, s_2, \ldots, s_\nu)$, $\sum_{\alpha_1 + \ldots + \alpha_\mu = \alpha} (\cdot)$ — суммирование по всевозможным наборам натуральных чисел α_i, $i = \overline{1, \mu}$, удовлетворяющих заданному условию;

$n(t) = (n_{1,t} n_{2,t} \ldots n_{r,t})$, $t = \overline{1, T}$;

$n_{i_1 i_2, t+s}$, $i_1, i_2 = \overline{1, r}$, $t = \overline{1, T}$, $s = 1, 2, 3, \ldots$, $t + s \leqslant T$ — случайная величина, равная числу микрообъектов, которые в момент времени t находились в состоянии i_1, а в момент времени $(t+s)$ оказались в состоянии i_2. Как известно из работ [1], [2], введенные выше величины удовлетворяют следующим соотношениям:

$$q_{j,\,t+s}=\sum_{i=1}^{r} q_{i,\,t}P_{ij}^{(s)},\ j=\overline{1,r},\ t=\overline{1,T},\ s=0,\ 1,\ 2,\dots,\ t+s\leqslant T;$$

$$N(t)=\sum_{i=1}^{r} n_{i,\,t},\ t=\overline{1,\ T};$$

$$\sum_{l=1}^{r} P_{il}^{(n)}P_{jl}^{(m)}=P_{ij}^{(m+n)},\ i,\ j=\overline{1,\ r},\ m,\ n=0,\ 1,\ 2,\dots;$$

$$n_{l,\,t+s}=\sum_{i=1}^{r} n_{il,\,t+s},\ l=\overline{1,r},\ t=\overline{1,T},\ s=1,\ 2,\ 3,\dots,\ t+s\leqslant T;$$

$$E(n_{l,\,t+s}/n(t))=\sum_{i=1}^{r} n_{i,\,t}P_{il}^{(s)},\ l=\overline{1,r},\ t=\overline{1,T},\ s=1,\ 2,\ 3\dots,\ t+s\leqslant T,$$

где $E(n_{l,\,t+s}/n(t))$ — условное математическое ожидание случайной величины $n_{l,\,t+s}$ при заданных компонентах вектора $n(t)$. В дальнейшем нам потребуется еще несколько вспомогательных результатов.

Лемма 1. Для любых $t=\overline{1,\ T}$; $j(i),\ i=\overline{1,\ l}$; $k(i),\ i=\overline{1,\ l}$, $1\leqslant l\leqslant r$ имеет место равенство

$$E\left(\prod_{i=1}^{l}(n_{j(i),\,t})_{k(j)}\right)=\left(\prod_{i=1}^{l} q_{j(i),\,t}^{k(i)}\right)(N)_{\sum_{i=1}^{l}k(i)}.$$

Доказательство. По определению математического ожидания имеем в предположениях полиномиальной схемы [2], что

$$E\left(\prod_{i=1}^{l}(n_{j(i),\,t})_{k(j)}\right)=\sum_{n_{j(i),\,t}\geqslant 0;\ i=\overline{1,\ l}}\ \prod_{i=1}^{l}(n_{j(i),\,t})_{k(i)}\frac{N!}{\left(\prod_{i=1}^{l}n_{j(i),\,t}!\right)}\times$$

$$\times\frac{1}{\left(N-\sum_{i=1}^{l}n_{j(i),\,t}\right)!}\left(\prod_{i=1}^{l}q_{j(i),\,t}^{n(i),\,t}\right)\left(1-\sum_{i=1}^{l}q_{j(i),\,t}\right)^{N-\sum_{i=1}^{l}n_{j(i),\,t}}$$

Сделав очевидные преобразования, отсюда получаем другое равносильное соотношение

$$E\left(\prod_{i=1}^{l}(n_{j(i),\,t})_{k(j)}\right)=(N)_{\sum_{i=1}^{l}k(i)}\left(\prod_{i=1}^{l}q_{j(i),\,t}^{k(i)}\right)\times$$

$$\times\sum_{n_{j(i),\,t}\geqslant k(i);\ i=\overline{1,\ l}}\frac{\left(N-\sum_{i=1}^{l}k(i)\right)!}{\left(\prod_{i=1}^{l}(n_{j(i),\,t}-k(i))!\right)}\times$$

$$\times\frac{1}{\left(\left(N-\sum_{i=1}^{l}k(i)\right)-\sum_{i=1}^{l}(n_{j(i),\,t}-k(i))\right)!}\times\left(\prod_{i=1}^{l}q_{j(i),\,t}^{n_{j(i),\,t}-k(i)}\right)\times$$

$$\times\left(1-\sum_{i=1}^{l}q_{j(i),\,t}\right)^{N-\sum_{i=1}^{l}k(i)-\sum_{i=1}^{l}(n_{j(i),\,t}-k(i))}=(N)_{\sum_{i=1}^{l}k(i)}\times$$

$$\times\left(\prod_{i=1}^{l} q_{j(i),t}^{k(i)}\right)\left(\sum_{i=1}^{l} q_{j(i),t}+1-\sum_{i=1}^{l} q_{j(i),t}\right)^{N-\sum_{i=1}^{l}k(i)}=$$

$$=\left(\prod_{i=1}^{l} q_{j(i),t}^{k(i)}\right)(N)_{\sum_{i=1}^{l}k(i)}.$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Для любых натуральных чисел m, k, неотрицательного целого s имеет место равенство

$$m^k(m)_s=\sum_{i=0}^{k}(m)_{k+s-i}M_i\left((k+s-i),\ldots,s\right).$$

В верности этого результата можно убедиться, пользуясь методом математической индукции.

Теорема [3]. Для любых $t=\overline{1,T}$; $j(i)$, $i=\overline{1,l}$; $k(i)$, $i=\overline{1,l}$, $1\leqslant l\leqslant r$ имеет место равенство

$$E\left(\prod_{i=1}^{l} n_{j(i),t}^{k(i)}\right)=\sum_{\substack{s(i)=1\\ i=\overline{1,l}}}^{k(i)}\ \sum_{\substack{\nu(i)=0\\ i=\overline{1,l}}}^{s(i)-1}\left(\prod_{i=1}^{l}(-1)^{\nu(i)}C_{s(i)-1}^{\nu(i)}\times\right.$$

$$\left.\times(s(i)-\nu(i))^{k(i)-1}\frac{1}{(s(i)-1)!}q_{j(i),t}^{s(i)}\right)(N)_{\sum_{i=1}^{l}s(i)}.$$

Используя лемму 2 и почти дословно повторяя доказательство этой теоремы из [3], последний результат можно записать в виде следующего соотношения.

Теорема 1. Для любых $t=\overline{1,T}$; $j(i)$, $i=\overline{1,l}$; $k(i)$, $i=\overline{1,l}$, $1\leqslant l\leqslant r$ имеет место равенство

$$E\left(\prod_{i=1}^{l} n_{j(i),t}^{k(i)}\right)=\sum_{\substack{s(i)=0\\ i=\overline{1,l}}}^{k(i)-1}\times$$

$$\times\left(\prod_{i=1}^{l}M_{s(i)}\left((k(i)-s(i)),\ldots,1\right)q_{j(i),t}^{k(i)-s(i)}\right)\times$$

$$\times(N)_{\sum_{i=1}^{l}(k(i)-s(i))}.$$

Перейдем сейчас к вопросу вычисления смешанных моментов. Для удобства введем сложные индексы, смысл которых понимается достаточно легко.

Теорема 2. Для любых $t=\overline{1,T}$; $\tau=1,2,3,\ldots$, $t+\tau\leqslant T$; $j(1,i_1)$; $i_1=\overline{1,m_1}$; $j(2,i_2)$; $i_2=\overline{1,m_2}$; $k(1,i_1)$; $i_1=\overline{1,m_1}$; $k(2,i_2)$; $i_2=\overline{1,m_2}$; m_1, $m_2=\overline{1,r}$ имеет место равенство

$$E\left(\prod_{i_1=1}^{m_1} n_{j(1,i_1),t}^{k(1,i_1)}\prod_{i_2=1}^{m_2} n_{j(2,i_2),t+\tau}^{k(2,i_2)}\right)=\prod_{i_2=1}^{m_2}\ \sum_{\alpha(2,i_2)=1}^{\min(r,k(2,i_2))}\times$$

$$\times\sum_{\substack{j(2,i_2,1),\ldots,j(2,i_2,\alpha(2,i_2))=1\\ j(2,i_2,1)\neq\ldots\neq(2,i_2,\alpha(2,i_2))}}^{r}\ \sum_{k(2,i_2,1)+\ldots+k(2,i_2,\alpha(2,i_2))=k(2,i_2)}\times$$

$$\times\frac{k(2,i_2)!}{\left(\prod_{\nu(2,i_2)=1}^{\alpha(2,i_2)}k(2,i_2,\nu(2,i_2))!\right)}\prod_{\nu(2,i_2)=1}^{\alpha(2,i_2)}\ \sum_{z(2,i_2,\nu(2,i_2))=0}^{k(2,i_2,\nu(2,i_2))-1}\times$$

$$\times M_{z(2,i_2,\nu(2,i_2))}\Big(\big(k(2,i_2,\upsilon(2,i_2))-z(2,i_2,\upsilon(2,i_2))\big),\dots,1\Big)\times$$

$$\times\left(q_{j(2,i_2,\nu(2,i_2)),t}\ P^{(\tau)}_{j(2,j_2,\nu(2,i_2))j(2,i_2)}\right)^{k(2,i_2,\nu(2,i_2))-z(2,i_2,\nu(2,i_2))}\times$$

$$\times\prod_{i_1=1}^{m_1}\sum_{z(1,i_1)=0}^{k(1,i_1)} M_{z(1,i_1)}\Big((k(1,i_1)-z(1,i_1)+\sum_{\tilde{i}_2=1}^{i_2}\sum_{\tilde{\nu}(2,\tilde{i}_2)=1}^{\alpha(2,\tilde{i}_2)}\times$$

$$\times P^{(0)}_{j(2,\tilde{i}_2,\tilde{\nu}(2,\tilde{i}_2))j(1,i_1)}\big(k(2,\tilde{i}_2,\tilde{\upsilon}(2,\tilde{i}_2))-z(2,\tilde{i}_2,\tilde{\upsilon}(2,\tilde{i}_2))\big)\Big),\dots,\times$$

$$\times\sum_{\tilde{i}_2=1}^{i_2}\sum_{\tilde{\nu}(2\tilde{i}_2)=1}^{\alpha(2,\tilde{i}_2)} P^{(0)}_{j(2,\tilde{i}_2,\tilde{\nu}(2,\tilde{i}_2))j(1,i_1)}(k(2,\tilde{i}_2,\tilde{\upsilon}(2,\tilde{i}_2))-$$

$$-z(2,\tilde{i}_2,\tilde{\upsilon}(2,\tilde{i}_2))))\,q_{j(1,i_1)}^{k(1,i_1)-z(1,i_1)}\times$$

$$\times(N)\Big(\sum_{i_1=1}^{m_1}(k(1,i_1)-z(1,i_1))+\sum_{i_2=1}^{m_2}\sum_{\nu(2,i_2)=0}^{\alpha(2,i_2)}\times$$

$$\times\big(k(2,i_2,\upsilon(2,i_2))-z(2,i_2,\upsilon(2,i_2))\big)\Big).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Переходя к условному математическому ожиданию, в принятых выше обозначениях получим

$$E\Big(\prod_{i_1=1}^{m_1} n^{k(1,i_1)}_{j(1,i_1),t}\prod_{i_2=1}^{m_2} n^{k(2,i_2)}_{j(2,i_2),t+\tau}\Big)=E\Big(\prod_{i_1=1}^{m_1} n^{k(1,i_1)}_{j(1,i_1),t}\times \tag{1}$$

$$\times E\Big(\prod_{i_2=1}^{m_2} n^{k(2,i_2)}_{j(2,i_2),t+\tau}/n(t)\Big)\Big)=$$

$$=E\Big(\prod_{i_1=1}^{m_1} n^{k(1,i_1)}_{j(1,i_1),t}E\Big(\prod_{i_2=1}^{m_2}\sum_{\alpha(2,i_2)=1}^{\min(r,k(2,i_2))}\times$$

$$\times\sum_{\substack{j(2,i_2,1),\dots,j(2,i_2,\alpha(2,i_2))=1\\ j(2,i_2,1)\neq\dots\neq j(2,i_2,\alpha(2,i_2))}}^{r}\ \sum_{k(2,i_2,1)+\dots+k(2,i_2,\alpha(2,i_2))=k(2,i_2)}\times$$

$$\times\frac{k(2,i_2)!}{\Big(\prod_{\nu(2,i_2)=1}^{\alpha(2,i_2)}k(2,i_2,\nu(2,i_2))!\Big)}\prod_{\nu(2,i_2)=1}^{\alpha(2,i_2)} n^{k(2,i_2,\nu(2,i_2))}_{j(2,i_2,\nu(2,i_2))j(2,i_2),t+\tau}\Big)\Big).$$

Так как по предположению все N марковских цепей независимы, то случайные величины $n_{j(2,i_2,\nu(2,i_2))j(2,i_2),t+\tau}$ независимы при фиксированном значении i_2 и разных значениях $\upsilon(2,i_2)$. Применяя к правой части (1) теорему 1 с соответствующей заменой $N(t)$, $q_{j(i),t}$, $n_{j(i),t}$ на $n_{j(2,i_2,\nu(2,i_2)),t}$, $P^{(\tau)}_{j(2,i_2,\nu(2,i_2))j(2,i_2)}$, $n_{j(2,i_2,\nu(2,i_2))j(2,i_2),t+\tau}$ и учитывая простейшие соотношения типа:

$$P_{ij}^{(0)}=\begin{cases}1, & \text{если } i=j\\ 0, & \text{если } i\neq j,\ i,\ j=\overline{1,r}\end{cases};$$

$$(n_{i_1,t})_{k_1}\big(n_{i_2,t}-P^{(0)}_{i_1i_2}k_1\big)_{k_2}=$$

$$=\begin{cases}(n_{i_1,t})_{k_1+k_2}, \text{ если } i_1=i_2,\ i_1, & i_2=\overline{1,r}\\ (n_{i_1,t})_{k_1}(n_{i_2,t})_{k_2}, \text{ если } i_1\neq i_2\end{cases}$$

получим

$$E\left(\prod_{i_1=1}^{m_1} n_{j(1,i_1),t}^{k(1,i_1)} \prod_{i_2=1}^{m_2} n_{j(2,i_2),t+\tau}^{k(2,i_2)}\right)= \tag{2}$$

$$=\Big(E\prod_{i_1=1}^{m_1} n_{j(1,i_1),t}^{k(1,i_1)}\Big(\prod_{i_2=1}^{m_2}\sum_{\alpha(2,i_2)=1}^{\min(r,k(2,i_2))}\times$$

$$\times\sum_{\substack{j(2,i_2,1),\dots,j(2,i_2,\alpha(2,i_2))=1\\ j(2,i_2,1)\neq\dots\neq j(2,i_2,\alpha(2,i_2))}}^{r}\ \sum_{k(2,i_2,1)+\dots+k(2,i_2,\alpha(2,i_2))=k(2,i_2)}\times$$

$$\times\frac{k(2,i_2)!}{\Big(\prod_{\nu(2,i_2)=1}^{\alpha(2,i_2)} k(2,i_2,\nu(2,i_2))!\Big)}\prod_{\nu(2,i_2)=1}^{\alpha(2,i_2)}\ \sum_{z(2,i_2,\nu(2,i_2))=0}^{k(2,i_2,\nu(2,i_2))-1}\times$$

$$\times M_{z(2,i_2,\nu(2,i_2))}\Big(\big(k(2,i_2,\upsilon(2,i_2))-z(2,i_2,\upsilon(2,i_2))\big)\dots,1\Big)\times$$

$$\times\Big(P^{(\tau)}_{j(2,i_2,\nu(2,i_2))j(2,i_2)}\Big)^{k(2,i_2,\nu(2,i_2))-z(2,i_2,\nu(2,i_2))}\times$$

$$\times\big(n_{j(2,i_2,\nu(2,i_2)),t}+k(2,i_2,\upsilon(2,i_2))-z(2,i_2,\upsilon(2,i_2))-$$

$$-\sum_{\tilde i_2=1}^{i_2}\ \sum_{\tilde\nu(2,\tilde i_2)=1}^{\alpha(2,\tilde i_2)} P^{(0)}_{j(2,\tilde i_2,\tilde\nu(2,\tilde i_2))j(2,i_2,\nu(2,i_2))}\times$$

$$\times\big(k(2,\tilde i_2,\tilde\upsilon(2,\tilde i_2))-z(2,\tilde i_2,\tilde\upsilon(2,\tilde i_2))\big)\big)_{k(2,i_2,\nu(2,i_2))-z(2,i_2,\nu(2,i_2))}\Big)\Big).$$

Так как правая часть (2) есть не что иное, как сумма произведений случайных величин одного из трех видов:

$$(n_{j(i_1),\theta})_{\beta(i_1)},\quad (n_{j(i_2),\theta})_{\beta(i_2)}\, n_{j(i_2),\theta}^{k(i_2)},\quad n_{j(i_3),\theta}^{k(i_3)},$$

где $\theta=\overline{1,T}$; $i_1, i_2, i_3=\overline{1,r}$, $i_1\neq i_2\neq i_3$, $\beta(\cdot)$, $k(\cdot)$ — некоторые натуральные числа, то, применяя для преобразования случайных величин последних двух видов приведенную выше лемму 2, получим

$$E\left(\prod_{i_1=1}^{m_1} n_{j(1,i_1),t}^{k(1,i_1)} \prod_{i_2=1}^{m_2} n_{j(2,i_2),t+\tau}^{k(2,i_2)}\right)=$$

$$=E\Big(\prod_{i_1=1}^{m_1} n_{j(1,i_1),t}^{k(1,i_1)}\times\Big(\prod_{i_2=1}^{m_2}\sum_{\alpha(2,i_2)=1}^{\min(r,k(2,i_2))}\times$$

$$\times\sum_{\substack{j(2,i_2,1),\dots,j(2,i_2,\alpha(2,i_2))=1\\ j(2,i_2,1)\neq\dots\neq j(2,i_2,\alpha(2,i_2))}}^{r}\ \sum_{k(2,i_2,1)+\dots+k(2,i_2,\alpha(2,i_2))=k(2,i_2)}\times$$

$$\times\frac{k(2,i_2)!}{\Big(\prod_{\nu(2,i_2)=1}^{\alpha(2,i_2)} k(2,i_2,\nu(2,i_2))!\Big)}\prod_{\nu(2,i_2)=1}^{\alpha(2,i_2)}\ \sum_{z(2,i_2,\nu(2,i_2))=0}^{k(2,i_2,\nu(2,i_2))-1}\times$$

$$\times M_{z(2,i_2,\nu(2,i_2))}\Big(\big(k(2,i_2,\upsilon(2,i_2))-z(2,i_2,\upsilon(2,i_2))\big)\ldots,1\Big)\times$$

$$\times\left(P^{(\gamma)}_{j(2,i_2,\nu(2,i_2))j(2,i_2)}\right)^{k(2,i_2,\nu(2,i_2))-z(2,i_2,\nu(2,i_2))}\times$$

$$\times\prod_{i_1=1}^{m_1}\sum_{z(1,i_1)=0}^{k(1,i_1)} M_{z(1,i_1)}\Big(\big(k(1,i_1)-z(1,i_1)\big)+\sum_{\tilde i_2=1}^{i_2}\sum_{\tilde\nu(2,\tilde i_2)=1}^{\alpha(2,\tilde i_2)}\times$$

$$\times P^{(0)}_{j(2,\tilde i_2,\tilde\nu(2,\tilde i_2))j(1,i_1)}\big(k(2,\tilde i_2,\tilde\upsilon(2\,\tilde i_2))-z(2,\tilde i_2,\tilde\upsilon(2,\tilde i_2))\big)\Big),\ldots,$$

$$\sum_{\tilde i_2=1}^{i_2}\sum_{\tilde\nu(2,\tilde i_2)=1}^{\alpha(2,\tilde i_2)} P^{(0)}_{j(2,\tilde i_2,\tilde\nu(2,\tilde i_2))j(1,i_1)}\big(k(2,\tilde i_2,\tilde\upsilon(2,\tilde i_2))-$$

$$-z(2,\tilde i_2,\tilde\upsilon(2,\tilde i_2))\big)\big)\big)(n_{j(1,i_1),t})_{k(1,i_1)-z(1,i_1)}\times$$

$$\times(n_{j(2,i_2,\nu(2,i_2)),t}+k(2,i_2,\upsilon(2,i_2))-z(2,i_2,\upsilon(2,i_2))-$$

$$-\sum_{\tilde i_2=1}^{i_2}\sum_{\tilde\nu(2,\tilde i_2)=1}^{\alpha(2,\tilde i_2)} P^{(0)}_{j(2,\tilde i_2,\tilde\nu(2,\tilde i_2))j(2,i_2,\nu(2,i_2))}\times$$

$$\big(k(2,\tilde i_2,\tilde\upsilon(2,\tilde i_2))-z(2,\tilde i_2,\tilde\upsilon(2,\tilde i_2))\big)\big)\big)-\sum_{i_1=1}^{m_1}P^{(0)}_{j(2,i_2,\nu(2,i_2))j(1,i_1)}\times$$

$$\times\big(k(1,i_1)-z(1,i_1)\big)\big)_{k(2,i_2,\nu(2,i_2))-z(2,i_2,\nu(2,i_2))}\big)\big).$$

Применяя к правой части последнего соотношения лемму 1, получаем утверждение теоремы 2.

1. Л и Ц., Д ж а д ж Д., З е л ь н е р А. Оценивание параметров марковских моделей по агрегированным временным рядам. М., 1977.
2. С и н ь к е в и ч Д. В., Т р у ш Н. Н.//Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1992. № 2.
3. О н и же // Там же. 1994. № 2.

Поступила в редакцию 16.12.94.

УДК 512.542

ДЖАРАДИН ДЖЕХАД (ИОРДАНИЯ)

О p-НАСЫЩЕННЫХ ФОРМАЦИЯХ С СИСТЕМАМИ НАСЛЕДСТВЕННЫХ ПОДФОРМАЦИЙ

In this work it hase been proved that the p-saturadet formationis if and only if all it's p-saturated subformationsare S-closed and if each group of Ω is considered to be an extension of a Sylow's p-subgroup by a nilpotent group.

Все рассматриваемые нами группы предполагаются конечными. Напомним, что класс групп называется формацией [1], если он замкнут относительно взятия гомоморфных образов и подпрямых произведений. Формация, состоящая из нильпотентных групп, называется нильпотентной. Формация Ω называется p-насыщенной, если всегда из $G/O_p(G)\cap\Phi(G)\in\Omega$ следует, что $G\in\Omega$.

Согласно теореме П. Неймана [2], всякая нильпотентная формация Ω наследственна (т. е. всегда из $H\leqslant G\in\Omega$ следует, что $H\in\Omega$). В работе [3] А. Н. Скиба доказал следующее обращение этого результата: если у формации Г все ее подформации наследственны, то формация Г нильпотентна.

В данной статье мы докажем следующий аналог этих двух результатов в классе p-насыщенных формаций.

Теорема. Пусть Г — p-насыщенная формация. Тогда и только тогда всякая ее p-насыщенная подформация наследственна, когда каждая группа из Г является расширением p-группы с помощью нильпотентной p′-группы.

Будем базироваться на терминологии, принятой в [4, 5]. Дополнительно будем использовать следующие обозначения: p — некоторое