УДК 530.145 + 530.12

А. К. ГОРБАЦЕВИЧ

# КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА В ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ РИМАНА—КАРТАНА И ДЕТЕКТИРОВАНИЕ ПОЛЯ КРУЧЕНИЯ

The quantum mechanics for the 1/2-spin particles in curved spacetime with torsion is developed. As an example, an electron in external homogenous magnetic field as a detector of the torsion is investigated, and the expressions for the splitting of its energy levels are given.

## Введение

Интерес к квантовой механике в искривленном пространстве-времени с кручением ($U_4$) обусловлен следующими причинами.

Во-первых, общая теория относительности является неперенормируемой теорией, в то время как калибровочные теории гравитации отчасти свободны от этого недостатка. Однако в последних с неизбежностью появляется кручение (см. [1]).

Во-вторых, поле кручения взаимодействует только с массивными частицами со спином (см. [2], [3]), поэтому его прямое влияние на физические системы может быть обнаружено лишь в квантовомеханических эффектах (см. [4]).

Поскольку вопрос о реальности поля кручения может быть решен только экспериментально, то весьма заманчивым представляется использование простых квантовомеханических систем для его детектирования. В частности, в работе [4] предложены два метода детектирования поля кручения, основанные на прецессии спина нейтральной частицы в поле кручения, а также на интерференции поляризованных нейтральных пучков, один из которых (или оба) взаимодействуют с полем кручения*. Кроме того, в работе [5] рассмотрено влияние поля кручения на энергетические уровни водородоподобного атома и предсказан эффект, названный авторами «торсионным резонансом» (по аналогии с магнитным резонансом). Трудности практического осуществления большинства данных идей связаны с тем, что эффекты, обусловленные полем кручения, в предлагаемых экспериментах не всегда будет легко отделить от эффектов, связанных с внешним магнитным полем. Поэтому обсудим еще одну возможность, где подобные трудности не возникают. Речь пойдет об электроне во внешнем магнитном поле как детекторе кручения пространства-времени. При этом для простоты ограничимся рассмотрением однородного магнитного поля, а не реальных магнитных ловушек типа ловушки Пеннинга (см. [6]).

## ОСНОВЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ В ПРОСТРАНСТВАХ С КРУЧЕНИЕМ

Для квантовомеханического описания электрона во внешнем электромагнитном поле в пространстве-времени с кручением воспользуемся общим подходом, изложенным в [7]. При этом ограничимся случаем минимальной связи и общековариантное уравнение Дирака запишем в следующем виде (см. [8]):

$$\gamma^n\nabla_n\psi + \gamma^k S_{nk}{}^n\psi + \frac{mc}{\hbar}\psi = 0, \qquad (1)$$

где $\nabla_n\psi = \psi_{,n} + \bar{\Gamma}_n\psi$, а биспинорная связность, если ограничиться унимодулярными преобразованиями в спинорном пространстве, может быть представлена в форме **:

* Заметим, что идеи первых экспериментов по проверке принципа эквивалентности в квантовой области также основывались на эффектах прецессии спина и сдвига интерференционных полос.

** Латинские индексы пробегают значения от 1 до 4, греческие — от 1 до 3; сигнатура пространственно-временной метрики — +2.

$$\tilde{\Gamma}_n = \frac{1}{4}\gamma^j\left(\gamma_{j,k} - \tilde{\Gamma}^m_{jk}\gamma_m\right) - \frac{ie}{\hbar c}A_n.$$

Здесь $A_n$ — 4-вектор электромагнитного потенциала; $\gamma_i$ — обобщенные матрицы Дирака (метрический биспинтензор), которые определяются с точностью до унимодулярных преобразований из перестановочных соотношений.

$$\{\gamma_i,\ \gamma_j\} \equiv \gamma_i\gamma_j + \gamma_j\gamma_i = 2g_{ij}; \tag{3}$$

$\tilde{\Gamma}^k_{jm}$ — коэффициенты аффинной связности в пространстве $U_4$,

$$\tilde{\Gamma}^k_{jm} = \left\{ {k \atop jm} \right\} - \left( S_{jm}{}^k + S_{mj}{}^k + S_{jm}{}^k \right), \tag{4}$$

$$\left\{ {k \atop jm} \right\} \equiv \frac{1}{2}g^{ki}\left(g_{ji,m} + g_{mi,j} - g_{jm,i}\right), \tag{5}$$

где $S_{jm}{}^k = \tilde{\Gamma}^k{}_{[jm]}$ — тензор кручения. Вводя ковариантную производную относительно римановой связности $\Gamma^i_{jm}$ $\left(\Gamma^i_{jm} \equiv \left\{ {i \atop jm} \right\}\right)$ и обозначая ее посредством точки с запятой, уравнение Дирака (1) представим в следующем виде:

$$\gamma^n\psi_{;n} - \frac{3i}{2}T^j(\gamma_j\gamma)\psi + \frac{mc}{\hbar}\psi = 0. \tag{6}$$

Здесь

$$T^i = \frac{1}{3!}\varepsilon^{imjl}S_{mjl}, \tag{7}$$

$$\gamma \equiv -\frac{i}{4!}E_{imjl}\gamma^i\gamma^m\gamma^j\gamma^l = \pm\begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \tag{8}$$

где $\varepsilon_{imjl}$ — псевдотензор Леви-Чивита $\left(\varepsilon_{1234} = \sqrt{-\det(g_{ij})}\right)$.

В работе [9] было показано, что уравнения Дирака в форме (6) можно интерпретировать как уравнение движения для вектора состояния в некотором специальном координатном представлении (ему соответствует неортонормированный базис в пространстве состояний [7]), что позволяет находить оператор Гамильтона и реально строить квантовую механику в $U_4$. При этом как выбор $\gamma$-матриц, так и выбор системы координат не влияют на конечный результат. В частности, в случае системы отсчета одиночного наблюдателя (см. [10]), наиболее удобной для описания квантовомеханических систем [7], данная интерпретация приводит к следующему выражению для оператора Гамильтона [9]:

$$H = H_0 + H_T, \tag{9}$$

где оператор $H_0$ описывает дираковский электрон в системе отсчета одиночного наблюдателя без учета взаимодействия с полем кручения (его явное выражение можно найти в [7]), а оператор $H_T$ учитывает поправки, обусловленные кручением.

Напомним, что система отсчета одиночного наблюдателя (СООН) задается времениподобной мировой линией «наблюдателя»

$$x^i = \xi^i(\tau), \tag{10}$$

($\tau$ — собственное время), которая называется базисной. Вдоль базисной линии строится сопутствующая тетрада $h^i{}_{(\sigma)}$ (индексы, заключенные в скобки — тетрадные), определенная в соответствии с условиями

$$h^i{}_{(4)} = \frac{1}{c}u^i,\quad h^i{}_{(m)}h^j{}_{(n)}g_{ij} = \eta_{(m)(n)}, \tag{11}$$

где

$$\eta_{(m)(n)} = \mathrm{diag}(1,\ 1,\ 1,\ -1) \ \text{и}\ u^i = d\varepsilon^i/d\tau$$

— тензор Минковского и 4-скорость «наблюдателя» соответственно. Семейство 3-мерных пространственноподобных гиперповерхностей $f(\tau)$, играющее роль 3-мерного физического пространства, определяется как семейство геодезических* гиперповерхностей, ортогональных в каждый момент собственного времени $\tau$ базисной линии. Поскольку эти геодезические гиперповерхности в общем случае имеют сингулярности, ограничиваются рассмотрением небольшой мировой трубки.

Для арифметизации построенного таким образом семейства гиперповерхностей $f(\tau)$ каждой точке, лежащей на $f(\tau)$, поставим в соответствие три скаляра $X^{(\sigma)}$, совпадающих с вращающимися координатами Ферми [7]. Определяя оператор координаты $\mathbf{X}^{(\sigma)}$ так, чтобы его собственные числа совпадали с $X^{(\sigma)}$, переходя к координатному представлению и ограничиваясь случаем, когда поле кручения является квазиоднородным, получаем для оператора $\mathbb{H}_T$ следующее выражение [9]:

$$\mathbb{H}_T = -3cS_{(\sigma)}T^{(\sigma)} - \frac{3\hbar c}{2}\, T\gamma + O(\rho^3), \tag{12}$$

где $S_{(\sigma)} = \frac{\hbar}{2}\alpha_{(\sigma)}\gamma$, $\rho = \sqrt{X^{(\sigma)}X_{(\sigma)}}$, а для операторов $\mathbf{T}$ и $\mathbf{T}^{(\sigma)}$ справедливы следующие выражения:

$$\mathbf{T}_{(\sigma)} = (1+\zeta+\theta)T_{(\sigma)} + (1+\zeta)T_{(\sigma);(\nu)}X^{(\nu)} + \\ + \frac{1}{2}T_{(\sigma);(\nu);(\tau)}X^{(\nu)}X^{(\tau)} - \frac{1}{4}\theta_{(\sigma)}T_{(4)}, \tag{13}$$

$$\mathbf{T} = \left(1+\zeta-\frac{1}{3}\theta\right)T_{(4)} + (1+\zeta)T_{(4);(\nu)}X^{(\nu)} + \\ + \frac{1}{2}T_{(4);(\nu);(\tau)}X^{(\nu)}X^{(\tau)} - \frac{5}{4}\theta_{(\sigma)}T^{(\sigma)}. \tag{14}$$

Здесь

$$\zeta = \frac{1}{c^2}W_{(\sigma)}X^{(\sigma)}, \quad W^{(\sigma)} = h_m^{(\sigma)}u^m_{;k}u^k; \tag{15}$$

$$\theta = \frac{1}{2}R_{(4)(\sigma)(4)(\nu)}X^{(\sigma)}X^{(\nu)}, \quad \theta^{(\sigma)} = -\frac{2}{3}R^{(\sigma)}{}_{(\varkappa)(4)(\nu)}X^{(\varkappa)}X^{(\nu)}; \tag{16}$$

— $T_{(i)}$, $T_{(i)(j)}$, $T_{(i)(j)(k)}$, $R_{(i)(j)(k)(l)}$ — тетрадные компоненты псевдовектора кручения $T_i$, его ковариантных производных $T_{i;j}$ и $T_{i;j;k}$, а также тензора кривизны $R_{ijmn}$: $T_{(\sigma)} = (h^i{}_{(\sigma)}T_i)_{x^i=\xi^i}$, $T_{(\sigma);(\nu)} = (h^i{}_{(\sigma)}h^j{}_{(\nu)}T_{i;j})_{x^i=\xi^i}$ и т. д.

Операторы $\alpha_{(\sigma)}$, $\hat{\beta}$, $S_{(\sigma)}$, $X^{(\sigma)}$, $\mathbf{P}_{(\sigma)}$, действующие в пространстве состояний, однозначно выражаются через $\gamma$-матрицы Дирака и характеристики системы отсчета (соответствующие выражения можно найти в [7]). Они удовлетворяют соотношениям [9] (ср. [7])

$$\alpha^+{}_{(\sigma)} = \alpha_{(\sigma)}, \quad \hat{\beta}^{(+)} = \hat{\beta}, \quad S^+{}_{(\sigma)} = S_{(\sigma)}, \tag{17}$$

$$\mathbf{P}^+{}_{(\sigma)} = \mathbf{P}_{(\sigma)}, \quad \left(X^{(\sigma)}\right)^+ = X^{(\sigma)}, \tag{18}$$

$$\left[\mathbf{P}_{(\sigma)}, X^{(\varkappa)}\right] = \frac{\hbar}{i}\delta^{(\varkappa)}{}_{(\sigma)}I, \quad [\mathbf{P}_{(\sigma)}, \mathbf{P}_{(\varkappa)}] = 0, \tag{19}$$

$$\{\alpha_{(\sigma)}, \alpha_{(\varkappa)}\} = 2\delta_{(\sigma)(\varkappa)}I, \quad \hat{\beta}^2 = I, \tag{20}$$

$$[\alpha_{(\sigma)}, \mathbf{P}_{(\nu)}] = 0, \quad [\hat{\beta}, \mathbf{P}_{(\nu)}] = 0, \quad [S_{(\sigma)}, \mathbf{P}_{(\nu)}] = 0, \tag{21}$$

$$[S_{(\sigma)}, S_{(\nu)}] = i\hbar e_{(\sigma)(\nu)}{}^{(\tau)}S_{(\tau)}, \tag{22}$$

из которых следует, что операторы $X^{(\sigma)}$, $\mathbf{P}_{(\sigma)}$ и $S_{(\sigma)}$ формально можно интерпретировать как операторы координаты, импульса и спина.

Заметим, что расчет квантовомеханических эффектов не обязательно проводить в том же представлении, которое использовалось для нахождения оператора Гамильтона. В частности, наиболее удобным,

---

* Здесь под геодезическими в $U_4$ понимаются не прямейшие, но экстремали. Данный выбор оправдан с точки зрения физической реализации СООН.

как правило, оказывается представление с ортонормированным базисом в пространстве состояний. В этом случае условие нормировки волновой функции и волновое уравнение выглядят наиболее просто:

$$a)\quad \int_f \psi^+\psi d^3X = 1, \qquad b)\quad i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial\tau} = \hat{H}\psi, \tag{23}$$

где оператор $\hat{H}$ задается выражениями (9) — (14), в которых следует произвести следующую замену:

$$\alpha_{(\sigma)} \to \alpha_{(\sigma)} = \overset{\circ}{\gamma}_4 \overset{\circ}{\gamma}_{(\sigma)}, \quad \hat{\beta} \to \beta = -i\overset{\circ}{\gamma}_4,$$

$$S_{(\sigma)} \to S_\sigma = \frac{\hbar}{2}\alpha_\sigma\gamma, \quad \mathbf{P}_{(\sigma)} \to P_\sigma = \frac{\hbar}{i}\,\frac{\partial}{\partial X^{(\sigma)}}.$$

Здесь $\overset{\circ}{\gamma}_n$ — постоянные матрицы Дирака, удовлетворяющие перестановочным соотношениям

$$\left\{ \overset{\circ}{\gamma}_n, \quad \overset{\circ}{\gamma}_m \right\} = 2\eta_{nm}.$$

Следует отметить, что в общем случае не удается выбрать γ-матрицы так, чтобы общековариантное уравнение Дирака (6) непосредственно приводило к уравнению (23b) (подробнее об этом см. [7], [9]).

## ЭЛЕКТРОН В ОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ КАК ДЕТЕКТОР КРУЧЕНИЯ

Для того чтобы выделить в чистом виде эффекты, обусловленные взаимодействием электрона с полем кручения, рассмотрим несколько идеализированную ситуацию, когда электрон движется в однородных магнитном поле и поле кручения, а гравитационное поле отсутствует*. В этом случае оператор Гамильтона в координатном приближении, описывающий электрон в данных полях, как это следует из выражений (12) — (14), принимает следующий вид:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1, \tag{24}$$

где оператор

$$\hat{H}_0 = c\alpha^\sigma\left(P_\sigma - \frac{e}{c}A_\sigma\right) + mc^2\beta \tag{25}$$

описывает электрон в однородном магнитном поле, а оператор

$$\hat{H}_1 = -\frac{3}{2}c\hbar\left(T_{(4)}\gamma + T_{(\sigma)}\alpha^{(\sigma)}\gamma\right) + O(\rho) \tag{26}$$

— поправки, обусловленные внешним полем кручения. Здесь

$$A_\mu = \frac{1}{2}e_{\mu\tau\nu}B^\tau X^\nu$$

— векторный потенциал, соответствующий однородному магнитному полю $\mathbf{B}$ = const, направленному вдоль оси z: $B^\tau = \{0, 0, B\}$; $e = -e_0$ — заряд электрона. Как известно, собственные значения оператора $\hat{H}_0$,

$$E^0_{np_z} = mc^2\sqrt{1 + \frac{1}{m^2c^2}\left(P_z^2 + 4\hbar\Omega mn\right)}\ , \tag{27}$$

многократно вырождены и зависят от двух квантовых чисел: квантового числа n, принимающего целые значения (n = 0, 1, ...), и квантового числа $P_z$ — проекции импульса на ось z. Здесь $\Omega = \frac{e_0|B|}{2mc}$. Взаимодействие электрона с полем кручения приводит к частичному снятию вырождения: уровни энергии с $n>0$ расщепляются на два подуровня (уровень n = 0 не расщепляется, а смещается), причем в первом порядке по теории возмущений величина этого расщепления задается выражением:

* Учет гравитационного поля в постньютоновском приближении не представляет труда и не приводит к качественному изменению полученных результатов.

$$\Delta E_n = \pm\sqrt{\lambda_n^2 + \varepsilon_n^2}, \tag{28}$$

где введены следующие обозначения:

$$\lambda_n = \frac{3c\hbar}{2} T_{(3)} \frac{mc^2}{E_n \Pi_n} \sqrt{\Pi_n^2 - P_n^2}\ , \tag{29}$$

$$\varepsilon_n = \frac{3c\hbar}{2} \left( \frac{cT_{(4)}\Pi_n}{E_n} + \frac{T_{(3)}P_z}{\Pi_n} \right), \tag{30}$$

$$\Pi_n = \sqrt{P_z^2 + 4m\hbar\Omega n}\ . \tag{31}$$

В наиболее интересном с практической точки зрения случае $P_z = 0$ соотношения (29) и (30) существенно упрощаются и выражение (28) для $\Delta E_n$ принимает вид:

$$\Delta E_n = \pm \frac{3c\hbar mc^2}{2E_n} \sqrt{T^2_{(3)} + \frac{4\Omega\hbar n}{mc^2} T^2_{(4)}}. \tag{32}$$

Заметим, что в нерелятивистском пределе, в котором для $E^0_n$ справедливо выражение $E_n^0 \approx mc^2 + 2\Omega\hbar n$, при выполнении условия $|T_{(4)}| \leqslant |T_{(3)}|$ величина расщепления не зависит (!) от напряженности магнитного поля (от константы $\Omega$):

$$\Delta E_n \approx \pm \frac{3c\hbar}{2} T_{(3)}$$

Данное обстоятельство, как нам представляется, может оказаться решающим при попытке экспериментального обнаружения поля кручения.


1. Пономарев В. Н., Барвинский А. О., Обухов В. Н. Геометродинамические методы и калибровочный подход к теории гравитационных взаимодействий. М., 1985.
2. Hehl F. M. et al. // Rev. Mod. Phys. 1976. V. 48 № 3. P. 393.
3. Yasskin P. B. // Phys. Rev. 1980. V. D 21. P. 2081.
4. Пронин П. И. // Экспериментальные тесты теории гравитации: Сб. ст. М., 1989. С. 146.
5. Багров В. Г., Бухбиндер И. Л., Шапиро И. Л. // Известия вузов. Физика. 1992. № 3. С. 5.
6. Филд Дж., Пикасо Э., Комбли Ф. // УФН. 1979. Т. 127. Вып. 4. С. 553.
7. Горбацевич А. К. Квантовая механика в общей теории относительности. Мн., 1985.
8. Audretsch J. // Phys. Rev. 1981. V. D24. P. 1470.
9. Горбацевич А. К. // Гравитация и электромагнетизм. Сб. ст. Мн., 1988. С. 73.
10. Мицквич Н. В., Ефремов А. П., Нестеров А. И. Динамика полей в общей теории относительности. М., 1985.


Поступила в редакцию 15.05.95.

*УДК 534.213*

А. Н. ФУРС

## ПРИМЕНЕНИЕ ФЕДОРОВСКОЙ ПРОЦЕДУРЫ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В КРИСТАЛЛОАКУСТИКЕ

Approximate solutions of Cristoffel equation for the cubic crystals on the basis of the procedure proposed by F. I. Fedorov are obtained and evaluation of their accuracy is carried out. The solutions yielded by different approximate methods are compared. It is shown that the accuracy of the obtained solutions does not practically depend on the cubic crystal anisotrope.

Основным уравнением, описывающим распространение объемных упругих волн в кристаллах, является уравнение Кристоффеля [1]

$$(\Lambda^n - v^2) = 0, \tag{1}$$

где $\Lambda^n = (\lambda_{iklm} n_k n_l)$ — тензор Грина — Кристоффеля, $\mathbf{n}$, $v$ и $\mathbf{u}$ — фазовая