16. Иваницкая О. С. Обобщенные преобразования Лоренца и их применение. Мн., 1969.
17. Она же. Лоренцев базис и гравитационные эффекты в эйнштейновой теории тяготения. Мн., 1979.
18. Лапковский А. К. Релятивистская кинематика, неевклидовы пространства и экспоненциальное отображение. Мн., 1985.
19. Богуш А. А. Введение в полевую теорию элементарных частиц. Мн., 1981.
20. Bogush A. A., Fedorovych A. M., Zhirkov L. F. Group-Theoretical Methods in Physics. London, 1987. P. 271.
21. Богуш А. А. Введение в калибровочную полевую теорию электрослабых взаимодействий. Мн., 1987.
22. Bogush A. A. Symmetry Methods in Physics. Dubna. 1994. V. 1. P. 16.
23. Кувшинов В. И., Тхо Н. В. // Физика элементарных частиц и атомного ядра. Дубна, 1994. Т. 25. Вып. 3. С. 603.
24. Фаддеев Л. Д., Решетихин Н. Ю., Тахтаджян Л. А. // Алгебра и анализ. 1989. Т. 1. № 1. С. 178.
25. Takhtajan L. A. // Adv. Study in Pure Math. 1989. V. 19. P. 435.
26. Woronowicz S. L. // Publ. RIMS. Kyoto. 1987. V. 23. № 1. P. 117.
27. Богуш А. А. // Докл. АН Беларуси. 1994. Т. 38. № 1. С. 40.
28. Он же // Весці АН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 1994. № 4. С. 45.
29. Он же // Докл. АН Беларуси. 1993. Т. 37. № 6. С. 28.
30. Федоров Ф. И., Тхарев Е. Е. // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1967. № 1. С. 101.

Поступила в редакцию 15.05.95.

УДК 535

Л. М. БАРКОВСКИЙ

СВЕТОВЫЕ ИНВОЛЮЦИИ В КРИСТАЛЛАХ

Branches of operator of refraction indices N in anisotropic media have been considered. The important role of involution operators in spectral decompositions of N is revealed. These operators characterize the set of isometries, being generators of involutive algebras Li. They describe in concentrated form symmetric properties of light evolition operator in different conditions of wave excitation in a medium.

Инволюцией называется такая операция, квадрат которой является тождественным преобразованием. В геометрическом смысле инволютивное движение меняет местами точку и ее образ, прямую и ее образ. Из $z\mathbf{a} = \mathbf{b}$ следует $z\mathbf{b} = z^2\mathbf{a} = \mathbf{a}$. Инволюционные операторы широко используются в квантовой механике и статистической физике [1, 2], в двухмерной, трехмерной и многомерной кристаллографии, теории суперструн [3–6]. Важную роль они играют и в теории распространения света и связаны с обратимостью волн [7–12]. В большом числе случаев задача решения волнового уравнения Гельмгольца для изотропных, анизотропных и гиротропных сред сводится к извлечению квадратного корня из оператора, который в зависимости от представления является тензором или спинором волны.

В других случаях необходимо решить полное квадратное операторное уравнение [9,10]. Операция извлечения квадратного корня из трехмерного тензора обобщает известную арифметическую операцию, геометрическую интерпретацию которой впервые дал Декарт. В [13] он изложил метод геометрического построения корней алгебраических уравнений с помощью окружностей и прямых линий. Эволюция оптических полей в кристаллах локально описывается оператором показателя преломления (ОПП), являющегося решением квадратного дисперсионного уравнения и для которого при любых направлениях фазовой нормали $\mathbf{n}$ в [7—10] были найдены общие спектральные разложения по проекционным поляризационным операторам собственных волн. Эти проекционные операторы осуществляют «объективное» разложение произвольных электромагнитных полей на составляющие (спектральные) собственных волн для заданной среды.

Наш подход базируется на хорошо известной спектральной теории операторов, применяемой в различных динамиках [1, 2, 14—18]. Проекционные и инволюционные операторы широко используются также в проективной и дифференциальной геометрии, в топологии. Квадрат проекционного оператора по определению равен самому оператору, а квадрат инволюционного — единичному оператору. К инволюционным относятся операторы отражения в плоскости, инверсии, поворота на 180°, обращения, эрмитовского сопряжения, матрицы Паули и Дирака и др. Эти операторы характеризуют дискретные и непрерывные группы симметрии динамических систем. Закономерно, что они появляются и в оптике кристаллов, открывающей удивительный мир симметрий, доступный теоретическому описанию и одновременно зрительному восприятию, благодаря многочисленным оптическим эффектам.

Уместно вспомнить, что вопрос о влиянии геометрии на оптику и обратном влиянии обсуждался в переписке Декарта и Ферма [13]. Инволюционные и проекционные преобразования издавна играют важную роль в теории внешних форм и интегрирования дифференциальных систем в инволюции (группы Ли) [19—22]. В рассматриваемом здесь случае они связаны с подпространствами плоских волновых фронтов. Любая поверхность в трехмерном пространстве может описываться двояко — внутренним или внешним способом [21, 22]. В последнем случае учитывается погружение в трехмерное пространство. Внутренний подход инициировал описание оптических свойств в двухмерном подпространстве волнового фронта с привлечением двухмерных тензоров, матриц, спиноров [3, 11, 12, 23—25]. В двухмерном локальном описании и типы поляризации изображаются плоскими фигурами. В трехмерном же пространстве им отвечают синусоида, круговая и эллиптическая спирали, геликоиды. Распространение света описывается как процесс перемещения и вращения волнового фронта.

В гамильтоновой механике движение механических систем трактуется как постепенное развертывание контактного преобразования [15]. При внешнем описании распространения поляризованного света векторы электромагнитного поля, как и в электростатике, являются трехмерными векторами полного физического пространства. Существенную роль при этом описании играют трехмерные векторы лучей и волновых нормалей и тот примечательный факт, что показатель преломления изотропной среды не является скаляром трехмерного пространства.

Прямой ковариантный метод внешнего описания электромагнитных волн в различных сложных средах (бианизотропных, бигиротропных, поглощающих, диспергирующих, модулированных, движущихся) в последние 40 лет был обстоятельно разработан академиком Ф. И. Федоровым с сотрудниками (см. [7—12, 17, 26—28, 32, 34]). Стимулом к разработке такого внешнего способа описания в духе картановских идей внешних форм для систем в инволюции послужил тот же мотив, которым руководствуется большинство исследователей по структурной кристаллографии и минералогии [3—5, 29—31]. Способ описания диктует и выбор математических средств: матриц, кватернионов, тензоров, спиноров, внешних форм, часто называемых направленными числами.

Ф. И. Федоровым в [32, 27] для описания частично поляризованных квазимонохроматических световых пучков был введен тензор пучка Ф (тензор когерентности) в ковариантной на группе SO(3) форме. При этом в трехмерной параметризации этого тензора в явной форме использовался вектор фазовой нормали **n**, точнее антисимметричный псевдотензор второго ранга $\mathbf{n}^{\times}$, дуальный вектору **n** [26, 27]. Степень поляризации, момент импульса, эллиптичность, направление обхода, размер полуосей эллипсов поляризации, интенсивность пучка характеризуются набором SO(3) — инвариантов тензора Ф. Псевдотензор $\mathbf{n}^{\times}$ в обычном декартовом базисе можно рассматривать как «матричный вектор» с компонентами

$$(\mathrm{n}^{\times}) = \mathrm{n}_1\mathrm{L}_1 + \mathrm{n}_2\mathrm{L}_2 + \mathrm{n}_3\mathrm{L}_3, \tag{1}$$

$$\mathrm{L}_1 = \begin{Vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \mathrm{L}_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \mathrm{L}_3 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Здесь n_i ($i = 1, 2, 3$) — компоненты вектора **n**, а особенные антисимметричные векторы L_i матричного базиса определяют вращение с единичной угловой скоростью вокруг координатных осей. Они подчиняются коммутационным соотношениям $[\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_2] = \mathrm{L}_3$, $[\mathrm{L}_2\ \mathrm{L}_3] = \mathrm{L}_1$, $[\mathrm{L}_3, \mathrm{L}_1] = \mathrm{L}_2$.

Базисные спиновые 3×3-матрицы в [1] описывают бесконечно малые вращения пространства E_3. Они известным образом связаны с матрицами Паули и кватернионными единицами Гамильтона [33]. Существенно, что

$$-(\mathbf{n}^{\times})^2 = 1 - \mathbf{n} \times \mathbf{n} = \mathrm{I}, \quad (\mathbf{n}^{\times})^3 = -\mathbf{n}^{\times}, \quad \mathbf{n}^2 = 1, \tag{2}$$

т. е. любые тензор-функции от $\mathbf{n}^{\times}$ могут содержать только слагаемые с тензорами $\mathrm{I} = -(\mathbf{n}^{\times})^2$ и $\mathbf{n}^{\times}$. Оператор $\mathbf{n}^{\times}$ [1] определяет инвариант [32] $M = i\mathrm{Sp}(\mathbf{n}^{\times}\Phi)$, характеризующий момент импульса пучка.

Тензоры Φ в кристаллах были рассмотрены в [7—10]. Были найдены ковариантные выражения для поляризационных проекционных операторов ρ собственных волн в средах, описываемых тензорами диэлектрической ε и магнитной μ проницаемостей и электрической $\alpha^{(e)}$ и магнитной $\alpha^{(m)}$ гирации, впервые произведен корректный учет пространственной дисперсии на расширенной непрерывной операторной группе Ли. В непоглощающих средах операторы ρ в ряде случаев являются самосопряженными и по своей структуре эквивалентны тензорам когерентности Φ или поляризационным матрицам плотности.

На базе спектрального подхода в электродинамике анизотропных сред удалось ввести ряд новых динамических характеристик — операторов, обобщающих скалярные фазы, показатели преломления, частоты, импедансы, эйконалы, коэффициенты отражения и пропускания неоднородных сред и дискретных границ и др., применяемые в скалярной оптике. Среди указанных операторов важнейшими являются эволюционные операторы Коши—Грина, описывающие решения волнового уравнения с учетом спина фотона. Здесь существует прямая аналогия с решениями уравнений квантовой механики. Дирак [1] при введении понятий состояния, операторов сдвига, представления и др. широко использовал идеологию поляризационной оптики.

В электродинамике анизотропных сред невозможно ограничиться рассмотрением только самосопряженных операторов эволюции. Некоторые особенности этих операторов были исследованы в работах [10, 23, 24, 27, 34], однако ввиду большого разнообразия поляризационных (спиновых) явлений в материальных средах здесь еще многое предстоит сделать. Необходимо подробнее изучить симметрии волновых уравнений. В настоящее время сравнительно полно исследованы только динамические симметрии уравнений Максвелла для вакуума [35—37]. Нас будут интересовать здесь вопросы ветвления решений волновых уравнений и тесно связанные с ними вопросы обратимости или взаимности эволюционных операторов, которые точно формулируются на языке инволюций.

Рассмотрим случай однородной оптически активной анизотропной (бианизотропной) среды, описываемой уравнениями связи Друде—Борна—Федорова [27, 38, 39]

$$\mathbf{D} = \varepsilon\left(\mathbf{E} + \frac{1}{k}\alpha\mathrm{rot}\mathbf{E}\right), \quad \mathbf{B} = \mu\left(\mathbf{H} + \frac{1}{k}\tilde{\alpha}\mathrm{rot}\mathbf{H}\right), \tag{3}$$

где α — несимметричный тензор гирации, ε и μ — симметричные тензоры. Тильда обозначает транспозицию. Векторы поля **E**, **D**, **B**, **H** при временной зависимости $\exp(-i\omega t)$ связаны уравнениями Максвелла

$$\mathrm{rot}\mathbf{H} = -ik\mathbf{D}, \quad \mathrm{rot}\mathbf{E} = ik\mathbf{B}, \quad k = \frac{\omega}{c}, \tag{4}$$

которые для плоских волн сводятся к операторному уравнению Гельмгольца [9]

$$\left[(\chi + \tilde{\beta}\Lambda\beta)\frac{\partial^2}{\partial\varsigma^2} + k(\tilde{\beta}\Lambda - \Lambda\beta)\frac{\partial}{\partial\varsigma} - k^2\Lambda\right]\mathbf{H}_{\tau} = 0, \tag{5}$$

где $\mathbf{H}_{\tau} = \mathrm{I}\mathbf{H}$ — тангенциальная составляющая комплексного вектора напряженности магнитного поля волны (I — проектор (2)). Переменная дифференцирования ς есть скалярное произведение, задаваемое формулой

$$\varsigma = \mathbf{n}\mathbf{r}, \quad \mathbf{n}^2 = 1, \tag{6}$$

где **n** — нормированный по квадрату на единицу комплексный вектор, а $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки наблюдения. Очевидно, что комплексный $\mathbf{n}$ задает ориентацию комплексной плоскости волнового фронта и ς — комплексная переменная. Для однородной волны $\mathbf{n}$ — действительный вектор, который совпадает с фазовой нормалью ($\mathbf{nr} = \text{const}$ — есть уравнение плоской поверхности). Комплексные волновые фронты используются, в частности, в геометрической теории дифракции (квазиоптике). Здесь мы ограничимся рассмотрением действительных $\mathbf{n}$. Тензоры Λ, χ, и β планарные и выражаются через ε, μ, α следующим образом [9]:

$$\Lambda = (\mathrm{I}\mu^{-1}\mathrm{I})^{-} = -\frac{\mathbf{n}^{\times}\bar{\mu}\mathbf{n}^{\times}}{\mathbf{n}\mu\mathbf{n}}, \ \chi = \mathbf{n}^{\times}\varepsilon^{-1}\mathbf{n}^{\times}, \ \beta = \mathrm{I}\bar{\alpha}\mathbf{n}^{\times}. \tag{7}$$

В (7) показатель степени обозначает псевдообратный тензор, или обратный в подпространстве (плоскости), перпендикулярной $\mathbf{n}$.

Пространственное эволюционное решение уравнения (5) для однородных сред имеет вид

$$\mathbf{H}_{\tau} = e^{ik_0 N\varsigma}\mathbf{H}_{\tau}(0), \tag{8}$$

где $N = N(\omega)$ — ОПП для $\mathbf{H}_{\tau}$ на частоте $\omega = k_0 c$, а $\mathbf{H}_{\tau}(0) = \mathbf{H}_{\tau}(\varsigma)|_{\varsigma=0}$. ОПП для поля $\mathbf{E}$ отличается от N преобразованием подобия. Разложения ОПП по собственным состояниям поляризации были рассмотрены в [7] для различных векторов поля. Для нашего случая $N(\omega)$ имеем

$$N(\omega) = \pm n_{+}(\omega)\rho_{+}(\omega) \pm n_{-}(\omega)\rho_{-}(\omega), \tag{9}$$

$$\rho_{\pm}(\omega) = \frac{\pm(\tau_{\pm t}\mathrm{I} - \tau_{\pm})(\tau_{+} - \tau_{-})}{(\tau_{+}\tau_{-})_t - \tau_{+t}\tau_{-t}}, \quad \tau_{\pm} = \frac{1}{n_{\pm}^2}\mathrm{I} + \frac{1}{n_{\pm}}i\nu + \sigma, \tag{10}$$

где $n_{\pm}(\omega)$ — показатели преломления изонормальных волн с фазовой нормалью $\mathbf{n}$, а $\rho_{\pm}(\omega) = \rho_{\pm}^2(\omega)$, $\rho_{+}\rho_{-} = \rho_{-}\rho_{+} = 0$, $\rho_{+} + \rho_{-} = -\mathbf{n}^{\times 2} = \mathrm{I} = 1 - \mathbf{n}\times\mathbf{n}$, $\rho_{+t} = \rho_{-t} = 1$ — ортогональные поляризационные проекторы.

В (9), (10) использованы обозначения [9]

$$\sigma = \Lambda^{-}(\chi + \tilde{\beta}\Lambda\beta), \ \nu = \beta - \Lambda^{-}\tilde{\beta}\Lambda = \sqrt{\bar{\nu}_t}\,\mathbf{n}^{\times}, \ \nu_t = (\sigma\nu)_t = 0 \tag{11}$$

для коэффициентов дисперсионного уравнения

$$\sigma N^2 + i\nu N + \mathrm{I} = 0, \tag{12}$$

получаемого при подстановке (8) в (5).

Обратные квадраты показателей преломления изонормальных волн даются формулой

$$\frac{1}{n_{\pm}^2} = \frac{1}{2}\left(\bar{\nu}_t - \sigma_t \pm \sqrt{(\bar{\nu}_t - \sigma_t)^2 - 4\bar{\sigma}_t}\right). \tag{13}$$

Тензорный коэффициент в (5) при первой производной — антисимметричный, а две других — симметричные. Отсюда следует, что $n_{\pm}$ в (13) — вещественные. Зависимость $n_{\pm}^{-2}$ от тензоров ε, μ, α и нормали $\mathbf{n}$ довольно сложная и находится в явной форме при подстановке (11) с учетом (7) в (13).

Обозначим ветви ОПП N_{++}, N_{--}, N_{+-}, N_{-+}, соответственно относящиеся к одинаковым и различным знакам перед слагаемыми в (10). Воспользовавшись условием полноты трехмерного пространства $\rho_{+} + \rho_{-} = \mathrm{I} = 1 - \mathbf{n}\times\mathbf{n}$ легко видеть, что справедливы представления

$$N_{++} = \bar{n}(\rho_{+} + \rho_{-}) + \Delta\bar{n}(\rho_{+} - \rho_{-}) = \bar{n}\mathrm{I} + \Delta n\Delta\rho,$$

$$N_{+-} = \Delta\bar{n}\mathrm{I} + \bar{n}\Delta\rho, \ N_{--} = -N_{++}, \ N_{-+} = -N_{+-}, \tag{14}$$

где введены обозначения

$$\bar{n} = \frac{1}{2}(n_{+} + n_{-}), \ \Delta\bar{n} = \frac{1}{2}(n_{+} - n_{-}), \tag{15}$$

а

$$\Delta\rho = \rho_{+} - \rho_{-}, \ (\Delta\rho)^2 = \mathrm{I}, \ (\Delta\rho)_t = 0. \tag{16}$$

Соответствующие эволюционные решения принимают вид:

$$H_r^{++}(\varsigma) = e^{ik_0 N_{++}\varsigma} H_r(0) = \left(e^{ik_+\varsigma}\rho_+ + e^{ik_-\varsigma}\rho_-\right) H_r(0),$$

$$H_r^{--}(\varsigma) = e^{ik_0 N_{--}\varsigma} H_r(0) = \left(e^{-ik_+\varsigma}\rho_+ + e^{-ik_-\varsigma}\rho_-\right) H_r(0), \qquad (17)$$

$$H_r^{+-}(\varsigma) = e^{ik_0 N_{+-}\varsigma} H_r(0) = \left(e^{ik_+\varsigma}\rho_+ + e^{-ik_-\varsigma}\rho_-\right) H_r(0),$$

$$H_r^{-+}(\varsigma) = e^{ik_0 N_{-+}\varsigma} H_r(0) = \left(e^{-ik_+\varsigma}\rho_+ + e^{ik_-\varsigma}\rho_-\right) H_r(0).$$

Четыре ветви эволюционного оператора (17) отвечают суперпозициям двух волн, направленных в одну и ту же сторону, и двум суперпозициям встречных собственных волн с ортогональными поляризациями и разными скоростями. В эволюционной формуле (8) вектор состояния поля в начальной точке $H_r(0)$ можно считать заданным «внешними причинами» источником. Из (8), (9) видно, что оператор $\exp(ik_0N\varsigma)$ будет действительно осуществлять перенос состояний, когда, будучи примененным к $H_r(0)$, ведет себя так, как если бы он был простым множителем этой величины, т. е. $H_r(0)$ — собственный вектор оператора $\exp(ik_0N\varsigma)$. Если же исходное состояние $H_r(0)$ в (8) таково, что в среде возбуждается пара волн разных скоростей ($\rho_+H_r(0)\neq 0$, $\rho_-H_r(0)\neq 0$), то состояние поляризации результирующего поля будет непрерывно трансформироваться, пробегая спектр состояний, наглядно изображаемых на сфере Пуанкаре. Отсюда следует, что, имея дело с анизотропной средой, строго говоря, нельзя вести речь о поляризации, скорости распространения поля, волновом фронте безотносительно к начальному состоянию.

Для направлений нормали $\mathbf{n}$, совпадающих с оптическими осями, показатели преломления совпадают $n_+ = n_- = \bar{n}$, и из (9) следует $N_{++} = \bar{n}I = -N_{--}$, $N_{+-} = \bar{n}\Delta\rho = -N_{-+}$. Такие же выражения для ветвей оператора N будут приближенно выполняться в окрестностях оптических осей. Ясно, что при переходе к изотропной среде также будут две группы решений, одна с $N^{(1)} = \pm\bar{n}I$, другая — с $N^{(2)} = \pm\bar{n}\Delta\rho$, причем $N_t^{(1)} = \pm 2\bar{n}$, а $N^{(2)}_t = 0$.

В двухмерном подпространстве, ортогональном $\mathbf{n}$, операторы $I = \rho_+ + \rho_-$ и $\Delta\rho = \rho_+ - \rho_-$ соответственно представляются 2x2-матрицами

$$1_{ab} = \sigma_0 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad (\Delta\rho)_{ab} = \sigma_3 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}, \quad a,\ b = 1,\ 2. \qquad (18)$$

Видим, что $\Delta\rho$ есть одна из матриц Паули (σ_3). Известно, что две другие матрицы σ_1, σ_2 вместе с σ_3 и σ_0 являются базисом пространства 2x2-матриц и подобны σ_3 [40]. Подстановка ρ_+ и ρ_- (10) в (16) дает ковариантную на группе SO (3) связь инволюционного оператора $\Delta\rho$ с материальными тензорами и нормалью $\mathbf{n}$

$$\Delta\rho = \frac{\left[-(\bar{v}_t + \sigma_t)I + ip\sqrt{\bar{v}_t}\,n^\times + 2\sigma\right]\left(pI + i\sqrt{\bar{v}_t}\,n^\times\right)}{l\left(\bar{v}_t - p^2\right)}, \qquad (19)$$

где $p = \frac{1}{n_+} + \frac{1}{n_-}$, $l = \frac{1}{n_+} - \frac{1}{n_-}$. Оператору $\Delta\rho$ отвечает зеркальное отражение в некоторой касательной к $\mathbf{n}$ плоскости, или поворот вокруг $\mathbf{n}$. Выражение (19) упрощается для неактивных (нехиральных) анизотропных сред или биизотропных (хиральных), когда ε и μ — скаляры, а α — псевдоскаляр. Для этих двух случаев соответственно (19) переходит в

$$\Delta\rho = \left(\frac{1}{n_+^2} - \frac{1}{n_-^2}\right)^{-1}\left[\left(\mathbf{n}^\times\varepsilon^{-1}\mathbf{n}^\times\mu^{-1}I\right)_t I - 2I\mu^{-1}\mathbf{n}^\times\varepsilon^{-1}\mathbf{n}^\times\right] \qquad (20)$$

и

$$\Delta\rho = -in^\times. \qquad (21)$$

Псевдотензор $\Delta\rho$ (21) является генератором непрерывной группы вращений [17] вокруг $\mathbf{n}$.

Легко видеть, что для $\Delta\rho$ можем записать

$$\Delta\rho = I - 2\rho_- = -I + 2\rho_+. \qquad (22)$$

Оператор $\Delta\rho$ осуществляет несобственое ортогональное преобразование (его детерминант в представлении (18) равен -1). Это преобразование есть зеркальное отражение в плоскости, касательной к $\mathbf{n}$.

Поясним это подробнее на примере двухосных немагнитных неактивных кристаллов. Для них обратный тензор диэлектрической проницаемости допускает каноническое представление [26]

$$\varepsilon^{-1} = a + b\,(\mathbf{c}_1 \times \mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_2 \times \mathbf{c}_1), \tag{23}$$

где $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$ $(\mathbf{c}_1^2 = \mathbf{c}_2^2 = 1)$ — единичные вещественные векторы бинормалей, а параметры a и b являются линейными функциями собственных значений $\frac{1}{\epsilon_1}$, $\frac{1}{\epsilon_2}$, $\frac{1}{\epsilon_3}$ тензора ε^{-1}: $a = \frac{1}{\epsilon_2}$, $b = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\epsilon_3} - \frac{1}{\epsilon_1} \right)$. Подстановка (23) в (20) дает

$$\Delta\rho = I - 2\mathbf{h}_- \times \mathbf{h}_- = -I + 2\mathbf{h}_+ \times \mathbf{h}_+ , \quad \mathbf{h}_\pm = \frac{\mathbf{e}_1 \pm \mathbf{e}_2}{\sqrt{2\,(1 \pm \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2)}}, \tag{24}$$

$$\mathbf{h}_\pm^2 = 1, \quad \mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{c}_1}{\sqrt{1 - (\mathbf{n}\mathbf{c}_1)^2}}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{c}_2}{\sqrt{1 - (\mathbf{n}\mathbf{c}_2)^2}}.$$

Единичные векторы $\mathbf{h}_\pm$ задают направления колебаний напряженностей магнитного поля собственных волн с заданной нормалью $\mathbf{n}$. Они направлены вдоль диагоналей ромба, построенного на единичных векторах $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, что является выражением известной теоремы Френеля [26].

Инволюции $X = \pm(\epsilon\mu)^{-1/2} N$ светового пучка в изотропной среде

Ветви ОПП на SO (3)	Векторные параметры зеркал	Ветви ОПП на SU (2)	Связи матричных элементов ОПП с компонентами векторов S, C, S′ и C′
$X = i\mathbf{n}^{\times}$	$\mathbf{S} = 0,\ \mathbf{C} = 0,\ (\mathbf{S}' = 0,\ \mathbf{C}' = 0)$	$\begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix}$	—
$X = -(\mathbf{n}^{\times})^2$	$\mathbf{S} = 0,\ \mathbf{C} = 0,\ (\mathbf{S}' = 0,\ \mathbf{C}' = 0)$	$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$	—
$X = -(\mathbf{n}^{\times})^2 - 2\mathbf{S} \times \mathbf{C}$	$\mathbf{SC} = 1 > 0,\ \mathbf{Sn} = \mathbf{Cn} = 0$	$\begin{Vmatrix} \sqrt{1-bc} & b \\ c & -\sqrt{1-bc} \end{Vmatrix}$	$b = -2S_1C_2,\ C = -2S_2C_1,\ S_3 = C_3 = 0,\ S_1C_1 + S_2C_2 = 1$
$X = -(\mathbf{n}^{\times})^2 + 2\mathbf{S}' \times \mathbf{C}'$	$\mathbf{S}'\mathbf{C}' = -1 < 0,\ \mathbf{S}'\mathbf{n} = \mathbf{C}'\mathbf{n} = 0$	$\begin{Vmatrix} \sqrt{1-b'c'} & b' \\ c' & -\sqrt{1-b'c'} \end{Vmatrix}$	$b' = 2S_1'C_2',\ C = 2S_2'C_1',\ S_3' = C_3' = 0,\ S_1'C_1' + S_2'C_2' = -1$
$X = -(\mathbf{n}^{\times})^2 - 2\mathbf{S} \times \mathbf{S}^*$	$\lvert\mathbf{S}\rvert^2 = 1 > 0,\ \mathbf{Sn} = \mathbf{S}^*\mathbf{n} = 0$	$\begin{Vmatrix} \sqrt{1-\lvert b\rvert^2} & \\ b^* & -\sqrt{1-\lvert b\rvert^2} \end{Vmatrix}$	$b = -2S^*{}_1S_2,\ \lvert S_1\rvert^2 + \lvert S_2\rvert^2 = 1$
$X = -(\mathbf{n}^{\times})^2 - 2\mathbf{S} \times \mathbf{S}$	$\mathbf{S}^2 = 1 > 0,\ \mathbf{Sn} = 0,\ \mathbf{S} = \mathbf{S}^*$	$\begin{Vmatrix} \sqrt{1-b^2} & b \\ b & -\sqrt{1-b^2} \end{Vmatrix}$	$b = 2S_1S_2,\ S^2{}_1 + S^2{}_2 = 1$

Видим, что оператор $\Delta\rho$ (24) является оператором отражения от плоского зеркала, пространственная ориентация которого задается единичным вектором нормали $\mathbf{h}_-$. Для любого вектора $\mathbf{A}$ сказанное поясняется выражением $\mathbf{A}_{отр.} = \Delta\rho\mathbf{A} = I\mathbf{A} - 2(\mathbf{h}_-\mathbf{A})\mathbf{h}_-$ и $\mathbf{A}_{отр}$ не изменяется при замене $\mathbf{h}_-$ на $-\mathbf{h}_-$, т. е. если $\mathbf{A}$ и $\mathbf{h}_-$ лежат по одну сторону от поверхности зеркала (над зеркалом), то $\mathbf{A}_{отр.}$ будет с противоположной стороны (под, за зеркалом). Поворот зеркала на 180° такой, что $\mathbf{h}_- \to -\mathbf{h}_-$, при неизменном $\mathbf{A}$ не изменяет положение $\mathbf{A}_{отр.}$, которое было до поворота. Это указывает на то, что по отношению к операции отражения плоскость зеркала является неориентированной (подобной ленте Мёбиуса).

Таким образом, в двухосном кристалле при произвольных ориентациях $\mathbf{n}$, кроме частных случаев, относящихся к направлениям бинормалей ($\mathbf{n} = \mathbf{c}_a$, $a = 1,2$), в структуре ветвей ОПП всегда имеются два инволюционных оператора отражения от двух взаимно перпендикулярных плоскостей, проходящих через $\mathbf{n}$ и диагонали ромба, построенного на единичных векторах $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ (24). В случае изотропных сред для каждого $\mathbf{n}$ таких зеркальных плоскостей не две, а бесконечное множество, характеризующее непрерывные группы изометрий Кокстера (калейдоскопические группы) [5, 20]. При внешнем описании этим группам отвечают непрерывные группы Ли вращений вокруг $\mathbf{n}$, а ветви N см. в таблице.

Работа финансировалась Фондом фундаментальных исследований Республики Беларусь (проект Ф49-49).

1. Дирак П. А. М. Принципы квантовой механики. М., 1960.
2. Вигнер Е. Теория групп. М., 1961.
3. Сиротин Ю. И., Шаскольская М. П. Основы кристаллофизики. М., 1975.
4. Копцик В. А. // Проблемы современной кристаллографии. М., 1975. С. 42.
5. Conway J. H., Sloane N. J. A. Sphere Packings, Lattices and Groups. New York, 1988.
6. Грин М., Шварц Дж., Виттен Э. Теория суперструн: В 2 т. М., 1990. Т. 1, 2.
7. Барковский Л. М. // Кристаллография. 1973. Т. 18. № 3. С. 465.
8. Barkovsky L. M., Fedorov F. I. // J. Mod. Opt. 1993. V. 40. № 6. P. 1015.
9. Барковский Л. М., Борздов Г. Н., Федоров Ф. И. // Докл. АН БССР. 1975. Т. 19. № 4. С. 305.
10. Федоров Ф. И., Барковский Л. М., Борздов Г. Н. // Докл. АН БССР. 1982. Т. 26. № 8. С. 684; Волновые операторы в оптике. 1983. Препринт № 304. ИФ АН БССР. Мн., 45 с.; Эволюционные операторы в электродинамике диспергирующих сред. Препринт № 463. ИФ АН БССР. Мн., 1987. 45 с.
11. Barkovsky L. M., Maletz A. V. // J. Opt. Soc. Am. B. 1994. V. 11. № 8. P. 1491.
12. Ханг Фо Тхи Нгует, Барковский Л. М. // Оптика и спектр. 1989. Т. 67. № 3. С. 269.
13. Декарт Р. Геометрия с приложением избранных работ П. Ферма и переписки Декарта. М.; Л., 1938.
14. Халмаш П. Конечномерные векторные пространства. М., 1963.
15. Уиттеккер Е. Т. Аналитическая динамика. М.; Л., 1937.
16. Федоров Ф. И. // ЖЭТФ. 1958. Т. 35. № 2. С. 493.
17. Он же. Группа Лоренца. М., 1979.
18. Thaller B. The Dirac Equation. Berlin, 1992.
19. Бахман Ф. Построение геометрии на основе понятия симметрии. М., 1969.
20. Кокстер Х. С. М. Действительная проективная плоскость. М., 1959.
21. Каган В. Ф. Основы теории поверхностей в тензорном изложении: В 2 т. М.; Л., 1947. Т. 1, 2.
22. Картан Э. Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения. М., 1962; Он же. Риманова геометрия в ортогональном репере. М., 1960.
23. Ramachandran G. N., Ramaseshan S. Crystal Optics / Ed. by S. Flugge // Encyclopedia of Physics. Berlin; Gottingen; Heidelberg, 1961. V. 25/1.
24. Theocaris P. S., Gdoutos E. E. Matrix Theory of Photoelasticity. Berlin; New York, 1979.
25. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М., 1956.
26. Федоров Ф. И. Оптика анизотропных сред. Мн., 1958.
27. Он же. Теория гиротропии. Мн., 1976.
28. Федоров Ф. И., Филиппов В. В. Отражение и преломление света прозрачными кристаллами. Мн., 1976.
29. Бюргер М. Структура кристаллов и векторные пространства. М., 1961.
30. Минералогическая энциклопедия / Под ред. К. Фрея. Л., 1985.
31. Универсальный столик Е. С. Федорова / Под ред. А. Н. Заварицкого. М., 1953.
32. Федоров Ф. И. // Журн. прикл. спектр. 1965. Т. 2. № 6. С. 523; Он же // Журн. прикл. спектр. 1966. Т. 4. № 1. С. 58.
33. Картан Э. Теория спиноров. М., 1947.
34. Борздов Г. Н. // Кристаллография. 1990. Т. 35. № 3. С. 535.
35. Федоров Ф. И. // Докл. АН СССР. 1952. Т. 82. № 1. С. 37.
36. Круглов С. И., Плетюхов В. А., Стражев В. И. О поляризационной симметрии уравнений Максвелла. Препринт № 226. ИФ АН БССР. Мн., 1980.
37. Фущич В. И., Никитин А. Г. Симметрия уравнений квантовой механики. М., 1990.
38. Fedorov F. I.// The Radioscientist. 1994. V. 5. № 1. P.21.
39. Chiral'94: 3rd International Workshop on Chiral, Bi-isotropic and Bi-anisotropic Media. May, 18-20, 1994/F. Mariotte, Jean-Paul Parneix. Perigneux (France), 1994.
40. Блум К. Теория матрицы плотности и ее приложения. М., 1983.

Поступила в редакцию 15.05.95.