Краткие сообщения

УДК 512:517.53

О. Б. ДОЛГОПОЛОВА

ПОСТРОЕНИЕ ДВУЛИСТНЫХ БЕЗГРАНИЧНЫХ НЕРАЗВЕТВЛЕННЫХ НАКРЫТИЙ РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ РОДА ДВА

In this paper all smooth unlimited coveres of Riemann surface of genus 2 which have two sheets are constructed.

Рассмотрим задачу построения всех двулистных безграничных неразветвленных накрытий римановой поверхности рода два (кренделя), реализованной как правильный восьмиугольник с классическим отождествлением сторон.

Имеется взаимно однозначное соответствие между неразветвленными накрытиями $S_1 \to S$ римановой поверхности S и подгруппами ее фундаментальной группы $\pi(S)$. При этом n-листному накрытию отвечает подгруппа индекса n [1], [2].

Для того чтобы найти все двулистные накрытия римановой поверхности рода два, исследуем ее фундаментальную группу. Это группа с четырьмя образующими a, b, c, d и одним соотношением $[a, b]\cdot[c, d] = 1$. Опишем все ее подгруппы индекса два. Одной из таких подгрупп будет, очевидно, группа, в которую входят слова, обладающие свойством: сумма всех степеней, с которыми входит в слово символ a, четна. Представители классов смежности по этой подгруппе 1 и a. Ее индекс равен двум.

Подгруппу также образуют слова, в которых сумма всех степеней a и b четна. Например, $a^{-1}b^3c^5da^2c$. Сумма $-1+3+2=4$, следовательно, слово принадлежит этой подгруппе. Представители классов смежности по подгруппе 1 и a. Ее индекс равен двум.

Аналогично можно рассмотреть подгруппу, в которой сумма степеней a, b и c делится на два. И, наконец, подгруппу, в которой сумма всех степеней четна. Представителями классов смежности для обеих подгрупп будут 1 и a. Их индекс равен двум.

Группы, получающиеся из описанных путем переименования букв, например группа, в которой сумма степеней c и d четна, также будут являться подгруппами фундаментальной группы индекса два. Заметим, что все эти подгруппы нормальны.

Используя алгоритм, описанный в [3], т.е. рассматривая произвольное транзитивное представление F группы $\pi(S)$, находя подгруппу F, оставляющую на месте 1, и соответствующую ей подгруппу $\pi(S)$, мы приходим к выводу, что других подгрупп индекса два у фундаментальной группы кренделя нет.

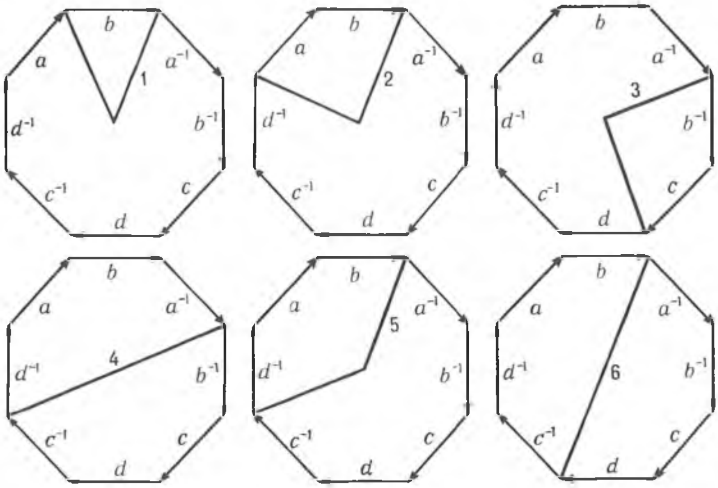
Запишем образующие четырех найденных подгрупп:

1) $\{b, c, d, aba, aca, ada\}$;
2) $\{c, d, a^2, ab, aca, ada\}$;
3) $\{d, ab, ba, ca, a^2, ac\}$;
4) $\{ab, ba, ca, ac, da, ad\}$.

Теорема.

Все двулистные накрытия кренделя получаются путем разрезания его по неразбивающему циклу и склеивания двух таких экземпляров крест на крест.

Чтобы доказать это, нам достаточно указать такие неразбивающие циклы, что накрытия, полученные описанным выше способом, индуцируют все указанные подгруппы фундаментальной группы. Сделаем это графически (см. рисунок).



Цикл 1 соответствует накрытию, индуцирующему подгруппу, в которой сумма степеней a четна.

Цикл 2 соответствует накрытию, индуцирующему подгруппу, в которой сумма степеней a и b четна.

Цикл 3 соответствует накрытию, индуцирующему подгруппу, в которой сумма степеней a и d четна.

Цикл 4 соответствует накрытию, индуцирующему подгруппу, в которой сумма степеней a и c четна.

Цикл 5 соответствует накрытию, индуцирующему подгруппу, в которой сумма степеней a, b и c четна.

Цикл 6 соответствует накрытию, индуцирующему подгруппу, в которой сумма всех степеней четна.

Все остальные накрытия получаются из приведенных путем переименования букв.

Итак, мы описали все подгруппы индекса два фундаментальной группы кренделя и соответствующие им двулистные безграничные неразветвленные накрытия.

1. Спрингер Дж. Введение в теорию римановых поверхностей. М., 1960. С. 99.
2. Шокуров В. В. //Итоги науки и техники ВИНИТИИ: Соврем. пробл. мат. фундам. направления. 1988. № 11. С. 34.
3. Зейферт Г., Трельфалль В. Топология. М., С. 229.

Поступила в редакцию 23.05.94.