1. Ш е м е т к о в Л. А. Формации конечных групп. М., 1978.
2. Ш е м е т к о в Л. А., С к и б а А. Н. Формации алгебраических систем. М., 1989.
3. С к и б а А. Н., Т а р г о н с к и й Е. А. // Мат. заметки. 1987. Т. 41. № 4. С. 490.
4. С к и б а А. Н. // Изв. вузов. Сер. Математика. 1991. № 4. С. 63.
5. А н и с ь к о в В. В. Общие свойства локальных функций с заданным X-дефектом. Гомель, 1994.

Поступила в редакцию 19.10.94.

УДК 517.925

В. А. ГАЙКО

БИФУРКАЦИИ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ И КЛАССИФИКАЦИЯ СЕПАРАТРИСНЫХ ЦИКЛОВ ДВУМЕРНЫХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

A new approach to the studying of limit cycle bifurcations and classification of separatrix cycles of the polynomial systems is given.

Будем рассматривать динамические системы вида

$$\frac{dx}{dt} = P_n(x, y), \ \frac{dy}{dt} = Q_n(x, y), \tag{1}$$

где $P_n(x, y)$, $Q_n(x, y)$ — полиномы действительные переменных x, y с действительными коэффициентами и степени не выше n. Такие системы могут использоваться как математические модели различных процессов в физике, химии, биологии, в теории вычислительных систем. Однако многие вопросы качественного исследования систем (1) до сих пор остаются открытыми, главный среди них — вопрос о максимальном количестве и взаимном расположении предельных циклов (16-я проблема Гильберта).

Как известно [1], основными источниками рождения предельных циклов являются особые точки типа центр или фокус (бифуркация Андронова — Хопфа) и особые (сепаратрисные) циклы системы. В отличие от локальной бифуркации Андронова — Хопфа, бифуркация рождения предельного цикла из сепаратрисного изучена недостаточно полно. Она носит глобальный характер и имеет принципиальное значение как для вопроса о предельных циклах, так и для качественного исследования системы в целом [2].

В последнее время интерес к исследованию сепаратрисных циклов значительно возрос. В работе [3], например, дается классификация сепаратрисных циклов и исследуется их цикличность, т. е. возможность рождения предельных циклов, для простейшего случая полиномиальных систем, когда $n = 2$. Аналогичная классификация для сепаратрисных циклов в смысле Дюлака [4] была проведена автором в работах [5—7]. Приведенный в этих работах подход отличается простотой и наглядностью. Кроме указанной классификации, он позволяет получить также разбиение пространства параметров системы на области, каждой из которых соответствует определенный вид сепаратрисного цикла, а также решить многие задачи качественного исследования в целом, теории бифуркаций и, главное, может быть использован для исследования более общих полиномиальных систем.

Изложим вкратце основные идеи этого подхода на примере квадратичной системы

$$\frac{dx}{dt} = P_2(x, y), \ \frac{dy}{dt} = Q_2(x, y) \tag{2}$$

и соответствующего ей уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q_2(x, y)}{P_2(x, y)}. \tag{3}$$

Применяя метод двух изоклин Н. П. Еругина [2], опишем все случаи взаимного расположения изоклин уравнения (3) [7]. Полученные изоклинные «портреты» являются своеобразным каркасом интегральных кривых уравнения: по ним с точностью до некоторого числа предельных циклов и различения центра и фокуса можно получить все топологически различные качественные картины поведения интегральных кривых. Таким образом можно провести грубую классификацию всех полиномиальных систем.

С помощью изоклин также можно получить наиболее простые (канонические) системы и потом использовать их в самых различных целях: для изучения бифуркаций предельных циклов различных видов и различной коразмерности, решения проблемы центра — фокуса, классификации сепаратрисных циклов. В этом случае мы будем иметь дело уже с негрубыми структурами и сможем проводить более тонкие качественные исследования полиномиальных систем (1).

Для квадратичной системы (2), в частности, имеет место следующая

Теорема. Система (2) с предельными (сепаратрисными) циклами приводится к системе одного из видов:

$$\frac{dx}{dt} = -(x+1)y + \alpha Q(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \qquad (4)$$

$$\text{или } \frac{dx}{dt} = -y + \alpha y^2, \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y),$$

где $Q(x, y) = x + \lambda y + ax^2 + b(x+1)y + cy^2$.

Система (4) будет основной при изучении предельных и сепаратрисных циклов. Классификацию сепаратрисных циклов с помощью этой системы удобно проводить по числу и характеру ее особых точек в конечной части плоскости. Можно выделить такие случаи особых точек: 1) три седла и одно антиседло; 2) три антиседла и одно седло; 3) два седла и два антиседла; 4) простое седло и антиседло; 5) два простых антиседла. Это невырожденные случаи, и еще: 6) вырожденные случаи.

Положим $\alpha = b = \lambda = 0$. Получим центр в начале координат и симметрию векторного поля системы. Вопрос о сепаратрисных циклах (4) в этом случае не вызывает никаких затруднений: они ограничивают области центров на плоскости x, y. А плоскость параметров a, c, в свою очередь, разбивается на области так, что каждой из них соответствует определенный вид сепаратрисного цикла. Отталкиваясь от этих областей, в каждом из случаев 1) — 6) будем последовательно изменять оставшиеся параметры λ, b и α.

Достоинством системы (4) является то, что изменение любого из этих параметров вызывает поворот ее векторного поля [8]: при изменении α и b — на всей плоскости x, y, при изменении λ — в каждой из полуплоскостей $x < -1$, $x > -1$ (в противоположных направлениях). Это значительно облегчает работу по определению возможных видов сепаратрисных циклов и отысканию соответствующих областей в пространстве параметров системы (4).

Как изучаются бифуркации предельных циклов с помощью системы показано в [9], а в [10] для этих целей строится другая каноническая система и приводятся примеры систем с различным количеством предельных циклов.

1. Ye Yanqian. Theory of limit cycles. Transl. of Math. Monogr. 66. AMS., Providence, 1986.
2. Е р у г и н Н. П. // Прикл. матем. и мех. 1950. Т. 14. Вып. 5. С. 459.
3. D u m o r t i e r F. R o u s s a r i e R., R o u s s e a u C. // J. of Differ. Equat. 1994. V. 112. № 2. P. 86
4. Д ю л а к Г. О предельных циклах. М., 1980. С. 16.
5. Г а й к о В. А. // Докл. АН Беларуси. 1993. Т. 37. № 3. С. 18.
6. G a i k o V. A. // Nonlin. Phen. in Compl. Syst. St. Petersburg, 1993. P. 60.
7. G a i k o V. A. // Adv. in Synerg. 1994. V. 2. P. 104.
8. D u f f G. F. D. // Ann. of Math. 1953. V. 57. № 1. P. 16.
9. Г а й к о В. А., Ч е р к а с Л. А. // Вопр. качеств. теории дифференц. уравнений. Новосибирск, 1988. С. 17.
10. Ч е р к а с Л. А., Г а й к о В. А. // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23. № 9. С. 1544.

Поступила в редакцию 21.11.94.