

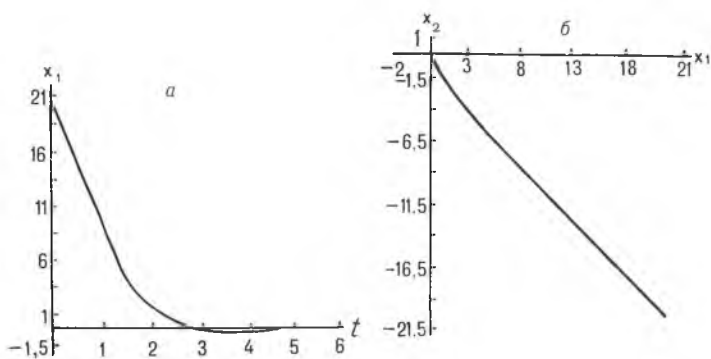


Рис. 3

На рис. 2,б изображены соответствующие фазовые траектории системы. Результаты для траектории, выходящей из точки β и стабилизируемой обратной связью (4) при $\theta = 1$, изображены на рис. 3,а и 3,б.

1. Цянь Сюэ-Сэнь. Техническая кибернетика. М., 1956.
2. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М., 1966.
3. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г. Математическая теория оптимальных процессов. М., 1976.
4. Лето А. М. Аналитическое конструирование регуляторов // Автоматика и телемеханика. 1960. Т. 21. Вып. 4.
5. Калман Р. Е. Об общей теории систем управления // Труды I конгресса ИФАК. М., 1961. Т. 1.
6. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Костюкова О. И. Оптимизация линейной системы управления в режиме реального времени // Изв. АН РФ. Техническая кибернетика. 1992. № 4.

Поступила в редакцию 16.09.94.

УДК 519.2

Д. В. РУСАК

ОБНАРУЖЕНИЕ СЛОЖНОЙ «РАЗЛАДКИ» ПО КОВАРИАЦИОННОЙ МАТРИЦЕ В МНОГОМЕРНЫХ ГАУССОВСКИХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ

The problem of detection complex change moment in the covariance matrix for multivariate gaussian sequence with unknown mean vector is investigated. The decision rule for statistical detection of a change in the covariance matrix was constructed by means of generalized likelihood ratio statistic asymptotic expansion.

При решении задач статистического регулирования технологических процессов, описываемых независимой последовательностью многомерных гауссовских наблюдений, обычно предполагается, что «разладка» происходит в векторе математического ожидания [1, 2]. Однако подобно тому, как при анализе последовательности одномерных гауссовских наблюдений возникает необходимость контролировать дисперсию (контрольной картой среднеквадратических отклонений), в многомерном случае становится актуальной задача обнаружения «разладки» по ковариационной матрице. Исследование в этом направлении проводилось [см. 3]. На основе методов многомерного статистического анализа для двух простейших моделей «разладок» (скачкообразного и пропорционального изменения ковариационной матрицы) был разработан контролирующий алгоритм кумулятивных сумм [3]. В случае же произвольных изменений ковариационной матрицы, или так называемой сложной «разладки», задача до сих пор не имела решения.

Пусть в момент времени $t \in \{1, 2, \dots\}$ наблюдается случайная N -мерная выборка объема n_t

$$X^{(t)} = \{x_1^{(t)}, x_2^{(t)}, \dots, x_{n_t}^{(t)}\} \in \mathbb{R}^N$$

из некоторого невырожденного гауссовского распределения с N -мерной плотностью

$$p_N (x | \mu^{(t)}, \Sigma^{(t)}) =$$

$$= (2\pi)^{-N/2} |\Sigma^{(t)}|^{-1/2} \exp \left\{ - (x - \mu^{(t)})^T (\Sigma^{(t)})^{-1} (x - \mu^{(t)}) / 2 \right\}.$$

Наблюдаемая последовательность независимых случайных выборок $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots$ характеризуется последовательностью неизвестных векторов математического ожидания $\mu^{(1)}, \mu^{(2)}, \dots \in R^N$ и последовательностью ковариационных $(N \times N)$ -матриц $\Sigma^{(1)}, \Sigma^{(2)}, \dots$. Ковариационная матрица $\Sigma^{(t)}$ в некоторый неизвестный момент времени $t = t^0$ претерпевает сложную «разладку»:

$$(\mu^{(t)}, \Sigma^{(t)}) \in \begin{cases} \Omega_0, & t = 1, 2, \dots, t^0, \\ \Omega_1, & t = t^0 + 1, t^0 + 2, \dots, \end{cases} \quad (1)$$

где

$$\Omega_0 = \{ \mu \in R^N, \Sigma > 0 : \|\Sigma^{-1} - \Sigma_0^{-1}\| = \delta, 0 \leq \delta \leq \delta_+ \} \text{ и}$$

$$\Omega_1 = \{ \mu \in R^N, \Sigma > 0 : \|\Sigma^{-1} - \Sigma_0^{-1}\| > \delta_+ \} -$$

области значений параметров до и после «разладки» соответственно; $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1$ — параметрическое пространство; $\Sigma > 0$ — символ положительной определенности матрицы; Σ_0 — некоторое заданное «номинальное значение» ковариационной матрицы; $\delta_+ > 0$ — максимально допустимый уровень отклонения обратной ковариационной матрицы (матрицы точности) Σ^{-1} от «номинального значения» Σ_0^{-1} по евклидовой матричной норме $\|\cdot\|$.

Определим в соответствии с моделью (1) сложные параметрические гипотезы $H_{0t}: (\mu^{(t)}, \Sigma^{(t)}) \in \Omega_0$, $H_{1t}: (\mu^{(t)}, \Sigma^{(t)}) \in \Omega_1$. Тогда задача обнаружения момента «разладки» по ковариационной матрице состоит в построении решающего правила (РП) последовательной проверки статистических гипотез H_{0t} , H_{1t} для моментов времени $t = 1, 2, \dots$.

Определим в момент времени $t \in \{1, 2, \dots\}$ статистику логарифма отношения правдоподобия:

$$\mu_t = \ln \frac{(\mu^{(t)}, \Sigma^{(t)})_{\sup} L(\mu^{(t)}, \Sigma^{(t)})}{(\mu^{(t)}, \Sigma^{(t)})_{\inf} L(\mu^{(t)}, \Sigma^{(t)})}, \lambda_t \in]-\infty, 0], \quad (2)$$

где $L(\mu^{(t)}, \Sigma^{(t)})$ — функция правдоподобия, полученная по случайной выборке $X^{(t)}$. Примем обозначения: $O_{N \times N}$ — $(N \times N)$ -матрица, все элементы которой равны нулю; $1_{N \times N}$ — $(N \times N)$ -матрица, все элементы которой равны единице; 1 — единичная $(N \times N)$ -матрица; $\bar{\mu}^{(t)} = 1/n_t \sum_{j=1}^{n_t} x_j^{(t)}$ — оценка максимального правдоподобия (ОМП) математического ожидания $\mu^{(t)}$;

$$\hat{\Sigma}^{(t)} = 1/n_t \sum_{j=1}^{n_t} (x_j^{(t)} - \bar{\mu}^{(t)}) (x_j^{(t)} - \bar{\mu}^{(t)})^T -$$

— ОМП ковариационной матрицы.

Лемма. Если B — произвольная $(N \times N)$ -матрица, то при $\delta \rightarrow 0$ имеет место асимптотическое разложение

$$\ln |1 + \delta B| = \delta \text{tr}(B) + O(\delta^2).$$

Доказательство леммы основано на выделении из определителя $|1 + \delta B|$ членов порядка малости $O(\delta)$:

$$|1 + \delta B| = 1 + \delta \text{tr}(B) + O(\delta^2).$$

и дальнейшем использовании формулы Тейлора для функции

$$\ln(1 + \delta \text{tr}(B) + O(\delta^2)).$$

Теорема 1. Если наблюдается N -мерная случайная выборка $X^{(t)}$

объема n_t из $N_N(\mu^{(t)}, \Sigma^{(t)})$, $|\Sigma^{(t)}| \neq 0$ и $|\Sigma_0| \neq 0$, то статистика логарифма отношения правдоподобия λ_t для проверки гипотез H_{0t} , H_{1t} допускает асимптотическое представление:

$$\lambda_t = \begin{cases} 0, & \|(\hat{\Sigma}^{(t)})^{-1} - \Sigma_0^{-1}\| \leq \delta_+, \\ (n_t/2)\beta_t, & \|(\hat{\Sigma}^{(t)})^{-1} - \Sigma_0^{-1}\| > \delta_+, \end{cases}$$

где

$$\beta_t = \ln |\Sigma_0^{-1} \hat{\Sigma}^{(t)}| + \text{tr} \left((1 - \Sigma_0^{-1} \hat{\Sigma}^{(t)}) \right) + \delta_+ \|\hat{\Sigma}^{(t)} - \Sigma_0\| + O(\delta_+^2).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимо решить две экстремальные задачи, возникающие в числителе и знаменателе (2). Решение задачи на безусловный максимум в знаменателе известно из многомерного статистического анализа [4]:

$$\left(\mu^{(t)}, \Sigma^{(t)} \right)_{\max} L(\mu^{(t)}, \Sigma^{(t)}) = (2\pi e)^{-n_t N/2} |\hat{\Sigma}^{(t)}|^{-n_t/2}. \quad (4)$$

При решении экстремальной задачи в числителе (2) возникает две ситуации. Если точка глобального максимума $\Sigma^{(t)}$ функции правдоподобия удовлетворяет условию $\|(\hat{\Sigma}^{(t)})^{-1} - \Sigma_0^{-1}\| \leq \delta_+$, то значение максимума в числителе (2) совпадает с (4). В случае, когда $\|(\hat{\Sigma}^{(t)})^{-1} - \Sigma_0^{-1}\| > \delta_+$, имеем задачу на условный максимум, которую с использованием логарифмической функции правдоподобия [4] можно представить в виде:

$$\begin{aligned} & l_0 \left((\Sigma^{(t)})^{-1}, \mu^{(t)} \right) = \\ & = n_t/2 \left(-N \ln(2\pi) + \ln |(\Sigma^{(t)})^{-1}| - \text{tr} \left((\Sigma^{(t)})^{-1} \hat{\Sigma}^{(t)} \right) \right) - \\ & - \left(\hat{\mu}^{(t)} - \mu^{(t)} \right)^T (\Sigma^{(t)})^{-1} (\hat{\mu}^{(t)} - \mu^{(t)}) \rightarrow \max_{\mu^{(t)} \in R^N, \|(\Sigma^{(t)})^{-1} - \Sigma_0^{-1}\| = \delta, 0 \leq \delta \leq \delta_+}. \end{aligned} \quad (5)$$

Поскольку матрица $(\Sigma^{(t)})^{-1}$ неотрицательно определена, то $(\hat{\mu}^{(t)} - \mu^{(t)})^T \times (\Sigma^{(t)})^{-1} (\hat{\mu}^{(t)} - \mu^{(t)}) \geq 0$ и поэтому максимальное значение целевой функции в (5) достигается при $\mu^{(t)} = \hat{\mu}^{(t)}$. Подставляя это оптимальное значение в (5), получаем

$$\begin{aligned} & l_0 \left((\Sigma^{(t)})^{-1}, \mu^{(t)} \right) = \\ & = n_t/2 \left(-N \ln(2\pi) + \ln |(\Sigma^{(t)})^{-1}| - \text{tr} \left((\Sigma^{(t)})^{-1} \hat{\Sigma}^{(t)} \right) \right) \rightarrow \\ & \rightarrow \max_{\|(\Sigma^{(t)})^{-1} - \Sigma_0^{-1}\| = \delta, 0 \leq \delta \leq \delta_+}. \end{aligned} \quad (6)$$

Решим задачу (6) с использованием метода множителей Лагранжа. Функция Лагранжа равна

$$\begin{aligned} & L \left((\Sigma^{(t)})^{-1}, \lambda \right) = \\ & = n_t/2 \left(-N \ln(2\pi) + \ln |(\Sigma^{(t)})^{-1}| - \text{tr} \left((\Sigma^{(t)})^{-1} \hat{\Sigma}^{(t)} \right) \right) + \\ & + \lambda \left(\|(\Sigma^{(t)})^{-1} - \Sigma_0^{-1}\| - \delta \right), \end{aligned}$$

где λ — множитель Лагранжа. Дифференцируя эту функцию по λ и по элементам $\bar{\sigma}_{ij}^{(t)}$ матрицы $(\Sigma^{(t)})^{-1}$, имеем для нахождения стационарных точек систему в матричном виде:

$$\begin{cases} \Sigma^{(1)} - \hat{\Sigma}^{(1)} + \frac{2\lambda}{n_1\delta} \left((\Sigma^{(1)})^{-1} - \Sigma_0^{-1} \right) = O_{N \times N}, \\ \| (\Sigma^{(1)})^{-1} - \Sigma_0^{-1} \| = \delta. \end{cases} \quad (7)$$

Ввиду нелинейности системы (7) по $(\Sigma^{(0)})^{-1}$ будем отыскивать решение, применяя метод последовательных приближений [6]:

$$(\Sigma^{(1)})^{-1} = \Sigma_0^{-1} + \delta Z + O(\delta^2) 1_{N \times N}, \quad (8)$$

где Z — неизвестный матричный коэффициент. С учетом невырожденности матрицы Σ_0 и асимптотического разложения обратной матрицы [5] получаем для $\Sigma^{(0)}$ представление

$$\Sigma^{(1)} = (\Sigma_0^{-1} + \delta Z)^{-1} = (1 + \delta \Sigma_0 Z)^{-1} \Sigma_0 = \Sigma_0 - \delta \Sigma_0 Z \Sigma_0 + O(\delta^2) 1_{N \times N}. \quad (9)$$

Подставляя (8), (9) в (7), имеем в результате с точностью до $O(\delta)$

$$\lambda = + \frac{n_1}{2} \| \hat{\Sigma}^{(1)} - \Sigma_0 \|, \quad Z = + \frac{1}{\| \hat{\Sigma}^{(1)} - \Sigma_0 \|} (\hat{\Sigma}^{(1)} - \Sigma_0),$$

и тогда

$$(\Sigma^{(1)})^{-1} = \Sigma_0^{-1} + \frac{\delta}{\| \hat{\Sigma}^{(1)} - \Sigma_0 \|} (\hat{\Sigma}^{(1)} - \Sigma_0) + O(\delta^2) 1_{N \times N} \quad (10)$$

Из непосредственного анализа знака квадратичной формы матрицы вторых производных функции Лагранжа по элементам $\sigma_{ij}^{(1)}$ обратной матрицы $(\Sigma^{(0)})^{-1}$ следует, что максимум в (6) достигается при выборе знака «-» в разложении (10). Подставляя (10) в целевую функцию (6) и осуществляя преобразование с учетом утверждения леммы и свойств следа матрицы, получаем

$$\begin{aligned} l_0 \left((\Sigma^{(1)})^{-1}, \mu^{(1)} \right) = \\ = n_1/2 \left(-N \ln(2\pi) + \ln |\Sigma_0^{-1}| - \text{tr} \left(\Sigma_0^{-1} \hat{\Sigma}^{(1)} \right) + \delta \| \hat{\Sigma}^{(1)} - \Sigma_0 \| \right) + \\ + O(\delta^2). \end{aligned}$$

Производя теперь максимизацию по $\delta \in [0, \delta_+]$ согласно (6) и учитывая (4), приходим к (3).

С целью построения РП для проверки H_{0t} , H_{1t} найдем асимптотические распределения основных статистик β_t и $\gamma_t = \| (\hat{\Sigma}^{(1)})^{-1} - \Sigma_0^{-1} \|^2$ в (3).

Пусть $u(1), u(2), \dots, u(m_t), \dots \in \mathbb{R}^p$ — последовательность случайных p -векторов ($p = (N+1)N/2$, $m_t = n_t - 1$):

$$u(m_t) = \text{vec}(U(m_t)),$$

где $U(m_t) = \frac{n_t}{m_t} \hat{\Sigma}^{(1)}$, $\text{vec}(U(m_t)) = (u_{ij}(m_t))$, $i, j = \overline{1, n_t}$, $i \geq j$ — векторное представление симметричной $(N \cdot N)$ -матрицы $U(m_t)$. Обозначим: $V(m_t) = \sqrt{m_t} (U(m_t) - \Sigma^{(1)})$; $v(m_t) = \text{vec}(V(m_t))$; $b^{(0)} = \text{vec}(\Sigma^{(0)})$; $b_0 = \text{vec}(\Sigma_0)$; $\bar{b}^{(0)} = \text{vec}((\Sigma^{(0)})^{-1})$; $\bar{b}_0 = \text{vec}(\Sigma_0^{-1})$; $T^{(0)}$ — ковариационную (р·р)-матрицу с элементами, определяемыми по формуле:

$$T^{(1)}_{(i,j)(k,l)} = \text{cov}(v_{ij}(m_t), v_{kl}(m_t)) = \sigma_{ik}^{(1)} \sigma_{jl}^{(1)} + \sigma_{il}^{(1)} \sigma_{jk}^{(1)}, \quad (i \leq j, k \leq l).$$

Теорема 2. Если $\hat{\Sigma}^{(0)}$ — выборочная ковариационная матрица (ВКМ), вычисленная по выборке $X^{(0)}$ объема $n_t = m_t + 1$ из $N_N(\mu^{(0)}, \hat{\Sigma}^{(0)})$, $|\Sigma^{(0)}| \neq 0$ и $\Sigma^{(0)} \neq \Sigma_0$, то при $n_t \rightarrow \infty$ и справедливой H_{0t} статистики β_t и γ_t распределены асимптотически нормально:

$$L \left\{ \frac{\sqrt{m_t} (\beta_t - a_1(\Sigma^{(1)}))}{\sigma_1(\Sigma^{(1)})} \right\} \rightarrow N_1(0, 1), \quad (11)$$

$$L \left\{ \frac{\sqrt{m_t} \left(\gamma_t - a_2 \left(\Sigma^{(t)} \right) \right)}{\sigma_2 \left(\Sigma^{(t)} \right)} \right\} \rightarrow N_1 (0, 1), \quad (12)$$

$$a_1 \left(\Sigma^{(t)} \right) = \ln |\Sigma_0^{-1} \Sigma^{(t)}| + \text{tr} \left(1 - \Sigma_0^{-1} \Sigma^{(t)} \right) + \delta_+ \|\Sigma^{(t)} - \Sigma_0\| + O \left(\delta_+^2 \right),$$

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 \left(\Sigma^{(t)} \right) &= \left(\bar{b}^{(t)} - \bar{b}_0 \right)^T T^{(t)} \left(\bar{b}^{(t)} - \bar{b}_0 \right) + \\ &+ \frac{2\delta_+}{\|\Sigma^{(t)} - \Sigma_0\|} \left(\bar{b}^{(t)} - \bar{b}_0 \right)^T T^{(t)} \left(b^{(t)} - b_0 \right) + \\ &+ \frac{\delta_+^2}{\|\Sigma^{(t)} - \Sigma_0\|^2} \left(b^{(t)} - b_0 \right)^T T^{(t)} \left(b^{(t)} - b_0 \right) + O \left(\delta_+^3 \right), \end{aligned}$$

$a_2 \left(\Sigma^{(t)} \right) = \left\| \left(\Sigma^{(t)} \right)^{-1} - \Sigma_0^{-1} \right\|^2$, $\sigma_2^2 \left(\Sigma^{(t)} \right)$ — асимптотическая дисперсия, для которой найдено явное выражение.

Д о к а з а т е л ь с т в о. ВКМ $\hat{\Sigma}^{(t)}$ является состоятельной оценкой параметра ковариационной матрицы, т. е. при $n_t \rightarrow \infty$

$$\hat{\Sigma}^{(t)} \xrightarrow{P} \Sigma^{(t)}.$$

По теореме об асимптотической нормальности ВКМ [4] имеет место также сходимость

$$L \left\{ \sqrt{m_t} \left(u \left(m_t \right) - b^{(t)} \right) \right\} \rightarrow N_p \left(0, T^{(t)} \right).$$

Из соотношения (3) видно, что статистика β_t есть функция

$$f(U) = N \ln \frac{m_t}{n_t} + \ln |\Sigma_0^{-1} U| + \text{tr} \left(1 - \frac{m_t}{n_t} \Sigma_0^{-1} U \right) + \delta_+ \left\| \frac{m_t}{n_t} U - \Sigma_0 \right\| + O \left(\delta_+^2 \right).$$

Устремляя n_t к бесконечности, получаем предельное функциональное преобразование относительно U :

$$a_1(U) = \ln |\Sigma_0^{-1} U| + \text{tr} \left(1 - \Sigma_0^{-1} U \right) + \delta_+ \|U - \Sigma_0\| + O \left(\delta_+^2 \right).$$

В силу того, что U — симметричная $(N \cdot N)$ -матрица, можно считать функцию $a_1(\cdot)$ зависимой не от всех элементов матрицы U , а только от p компонент ее векторного представления u . Выполнены все условия теоремы о функциональном преобразовании асимптотически нормальной последовательности [4]. Следовательно, при $m_t \rightarrow \infty$

$$L \left\{ \sqrt{m_t} \left(\beta_t - a_1 \left(\Sigma^{(t)} \right) \right) \right\} \rightarrow N_1 \left(0, \sigma_1^2 \left(\Sigma^{(t)} \right) \right). \quad (13)$$

Согласно [4], дисперсия в (13) вычисляется по формуле:

$$\sigma_1^2 \left(\Sigma^{(t)} \right) = \Phi_{b,t}^T T^{(t)} \Phi_{b,t},$$

где

$$\Phi_{b,t} = \nabla_u a_1(u) |_{u=b^{(t)}} \bar{b}^t - \bar{b}_0 + \frac{\delta_+}{\|\Sigma^{(t)} - \Sigma_0\|} \left(b^{(t)} - b_0 \right) + O \left(\delta_+^2 \right).$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 \left(\Sigma^{(t)} \right) &= \left(\bar{b}^{(t)} - \bar{b}_0 \right)^T T^{(t)} \left(\bar{b}^{(t)} - \bar{b}_0 \right) + \\ &+ \frac{2\delta_+}{\|\Sigma^{(t)} - \Sigma_0\|} \left(\bar{b}^{(t)} - \bar{b}_0 \right)^T T^{(t)} \left(b^{(t)} - b_0 \right) + \\ &+ \frac{\delta_+^2}{\|\Sigma^{(t)} - \Sigma_0\|^2} \left(b^{(t)} - b_0 \right)^T T^{(t)} \left(b^{(t)} - b_0 \right) + O \left(\delta_+^3 \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Если воспользоваться разложением решающей статистики (3) с точностью до $O \left(\delta_+^3 \right)$, можно показать, что главный член в разложении дис-

персии выделен точно, а остаток $O(\delta_+^2) = 0$, Поэтому, осуществляя нормировку статистики слева в (13) на $\sigma_1(\Sigma^0)$, получаем справедливость (11). Доказательство (12) проводится аналогично.

Для построения РП, основанного на статистике (3), воспользуемся принципом Неймана — Пирсона. Введем обозначения: Z — симметричная положительно-определенная $(N \times N)$ -матрица; T^0 — $(p \times p)$ -матрица, элементы которой определяются по формуле:

$$T^0_{(i,j)(k,l)} = \sigma_{ik}^0 \sigma_{jl}^0 + \sigma_{il}^0 \sigma_{jk}^0, \quad (i \leq j, k \leq l);$$

$$f(Z) =$$

$$= \left(\text{vec}(Z) - \frac{1}{\|\Sigma_0 Z \Sigma_0\|} \text{vec}(\Sigma_0 Z \Sigma_0) \right)^T T^0 \left(\text{vec}(Z) - \frac{1}{\|\Sigma_0 Z \Sigma_0\|} \text{vec}(\Sigma_0 Z \Sigma_0) \right);$$

$\Phi^{-1}(\cdot)$ — квантиль стандартного нормального распределения; $d_i = 0$, $d_i = 1$ — решения в пользу принятия гипотез H_{0i} , H_{1i} соответственно.

Теорема 3. Пусть Z^* — решение экстремальной задачи на условный максимум

$$f(Z) \rightarrow \max_{Z, \|Z\| = 1},$$

тогда для РП проверки гипотез H_{0i} , H_{1i} :

$$d_i = d_i(X^{(i)}) = \begin{cases} 0, & \|\hat{\Sigma}^{(i)}^{-1} - \Sigma_0^{-1}\| \leq \delta_+, \\ 0, & \|\hat{\Sigma}^{(i)}^{-1} - \Sigma_0^{-1}\| > \delta_+, \quad (n_i/2)\beta_i \geq \Delta_i, \\ 1, & \|\hat{\Sigma}^{(i)}^{-1} - \Sigma_0^{-1}\| > \delta_+, \quad (n_i/2)\beta_i < \Delta_i, \end{cases} \quad (15)$$

$$\Delta_i = (-\delta_+/2) (n_i f(Z^*))^{1/2} \Phi^{-1}(1 - \varepsilon)$$

при $n_i \rightarrow \infty$ асимптотический размер не превосходит заданного уровня значимости $\varepsilon \in (0, 1)$.

Доказательство основано на построении РП проверки гипотез H_{0i} , H_{1i} с использованием критерия обобщенного отношения правдоподобия с решающей статистикой (3), причем порог Δ_i находится из условия равенства оценки сверху размера РП заданному уровню значимости $\varepsilon \in (0, 1)$.

Замечание 1. В предположении независимости статистик β_i и γ_i можно построить РП (15), порог которого равен

$$\Delta_i = (-\delta_+/2) (n_i f(Z^*))^{1/2} \Phi^{-1}(1 - 2\varepsilon).$$

Замечание 2. Решение экстремальной задачи, определенной в условии теоремы 3, находится с использованием численного метода Ньютона [7].

РП (15) реализовано в виде программы на языке Паскаль версии 5.0 для IBM PC/AT, исследовано методом статистического моделирования и показало достаточную эффективность.

1. Lowry C. A., Woodall W. H., Champ C. W., Rigdon S. E. // Technometrics. 1992. V. 34. P. 46.

2. Crosier R. B. // Ibid. 1988. V. 30. P. 291.

3. Филаретов Г. Ф. // Применение статистических методов в производстве и управлении: Тез. докл. междунар. конф. Пермь, 1990. С. 398.

4. Андерсон Т. // Введение в многомерный статистический анализ. М., 1964.

5. Белман Р. // Введение в теорию матриц. М., 1969. С. 296.

6. Канторович Л. В., Акилов Г. П. // Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., 1959. С. 160.

7. Васильев Ф. П. // Численные методы решения экстремальных задач. М., 1988.

Поступила в редакцию 17.09.94.