

$$+ \frac{2\pi}{T} \int_{-\pi}^{\pi} W(\lambda_1 - \mu) W(\lambda_2 - \mu) Df(\mu) d\mu + o(T^{-1}) = I_1 + I_2 + o(T^{-1}),$$

где $\bar{\Pi}^2 = \{\mu_1 \in \Pi, \mu_2 \in \Pi, \mu_1 \neq \mu_2\}$.

Аналогично, как и при доказательстве теоремы 2, можно показать, что

$$|I_1| = \begin{cases} o\left(\frac{1}{N^{2\alpha}}\right), & \text{при } 0 < \alpha < \frac{1}{2} \\ o\left(\frac{1}{N}\right), & \text{при } \frac{1}{2} < \alpha < 1, \end{cases}$$

$$|I_2| = o(T^{-1}).$$

Теорема доказана.

В [1] показано, что

$$\lim_{T \rightarrow \infty} Df(\lambda) = \frac{f^2(\lambda)}{L},$$

а для оценки $\bar{f}(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$, задаваемой (2), имеет место соотношение (13), т. е. при $T \rightarrow \infty$ оценка $f(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$, является состоятельной.

1. Труш Н. Н., Мирская Е. И. // Проблемы компьютерного анализа данных и моделирования: Сб. науч. ст. Мн., 1991. С. 180.

2. Welch P. D. // IEEE Trans. Audio Electroacou. 1967. AU-15. № 2. P. 70.

3. Труш Н. Н., Мирская Е. И. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1.1993. № 3. С. 35.

4. Мирская Е. И. // Актуальные проблемы информатики: математическое, программное и информационное обеспечение: 18—20 мая 1994 г. Мн., 1994. С. 163.

Поступила в редакцию 30.08.94.

УДК 517.977

И. Ю. СЫРОИД

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОГО МЕТОДА СТАБИЛИЗАЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

The third order system stabilization results obtained by PC with the aid of the feedback constructed by means of the optimal control synthesis in the special auxiliary problem are adduced.

Стабилизация и улучшение характеристик переходных процессов относятся к центральным проблемам теории управления [1]. Цель работы — на конкретной системе 3-го порядка представить результаты экспериментальной проверки на ПЭВМ одного нового метода стабилизации. В отличие от наиболее распространенных методов стабилизации, основанных на теории устойчивости [2], предлагаемый метод базируется на теории оптимального управления [3]. Он отличается от метода Летова — Калмана [4, 5] из теории оптимального управления, в котором не учитываются прямые ограничения на управление.

Задача стабилизации динамической системы

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad (x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}) \quad (1)$$

с помощью ограниченного управления состоит в построении такой функции $u(x)$, $|u(x)| \leq 1$, $x \in \mathbb{R}^n$; $u(0) = 0$, при которой замкнутая система $\dot{x} = Ax + bu(x)$ имеет решения $x(t)$, $t \geq 0$, в окрестности начала координат и состояние $x = 0$ является асимптотически устойчивым.

Пусть $X_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^n: -\epsilon e \leq x \leq \epsilon e\}$, $e = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$. Выберем $\theta: 0 < \theta < +\infty$, и в классе кусочно-непрерывных функций $u(t)$, $t \in T = [0; \theta]$, рассмотрим вспомогательную задачу оптимального управления:

$$\rho_\theta(z) = \min \rho,$$

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad x(0) = z,$$

$$x(\theta) \in X, \quad (2)$$

$$|u(t)| \leq 1, \quad t \in T.$$

Пусть $u^0(t|z)$, $t \in T$, — оптимальное программное управление задачи (2);

$$C = \bigcup_{t > 0} C(t^*) \quad \text{— множество управляемости,}$$

$$\text{где } C(t^*) = \{z \in \mathbb{R}^n: \rho_{t^*}(z) = 0\}.$$

Определение. Функция

$$u_z^0(z) = u^0(0|z), \quad z \in C, \quad (3)$$

называется оптимальным управлением типа обратной связи [3].

Предлагаемый метод стабилизации системы (1) состоит в использовании (3) для построения стабилизирующей обратной связи вида:

$$u(x) = \begin{cases} u_z^0(x), & \text{если } \rho_\theta(x) \geq \varepsilon; \\ u_{\theta(x)}^0(x), & \text{если } 0 < \rho_\theta(x) < \varepsilon, \end{cases} \quad (4)$$

где $\varepsilon > 0$ — произвольное достаточно малое число, $\theta(x)$ — такое число $0 < \theta(x) < \theta$, что $\rho_{\theta(x)}(x) \geq \varepsilon$.

Таким образом, проблема стабилизации исходной динамической системы свелась к эффективной реализации управления типа обратной связи (4).

Поскольку, согласно определению (4), стабилизирующая обратная связь строится с помощью решений задачи (2), то укажем метод нахождения $u^0(t|z)$, $t \in T$.

Пусть $x_0(\tau)$ — состояние системы (1), в котором она оказалась в момент τ после действия стабилизирующей обратной связи (4) на промежутке $[0; \tau]$. Оптимальное управление $u^0(t|x_0(\tau))$, $t \in T$, задачи (2) при $z = x_0(\tau)$ имеет вид: $u^0(t|x_0(\tau)) = \text{sign} \Delta^0(t|x_0(\tau))$, $t \in T$, где

$$\Delta^0(t|x_0(\tau)) = v^* H(t); \quad H(t) = F(\theta, t)b;$$

v^* — оптимальный вектор Лагранжа; $F(\theta, t)$, $\theta \geq t \geq 0$, — фундаментальная матрица решений системы $\dot{x} = Ax$.

Отсюда видно, что для работы стабилизатора достаточно знать поведение вдоль $x_0(\tau)$, $\tau \geq 0$, вектора Лагранжа v^* и моментов

$$T_i(\tau) = \{t_i(\tau), i = \overline{1, p(\tau)}\} = \{t \in T: \Delta^0(t|x_0(\tau)) = 0\}. \quad (5)$$

В дальнейшем предположим, что $\forall \tau \geq 0$ имеет место

$$\text{rank}(H_{\text{оп}}(t), t \in T_i(\tau); e(I_{\text{оп}}), e(I_{\text{оп}}^*)) = p(\tau) + 1. \quad (6)$$

$$I_{\text{оп}} = \{i \in \{1, \dots, n\}: -\rho = x_i(\theta)\},$$

$$I_{\text{оп}}^* = \{i \in \{1, \dots, n\}: \rho = x_i(\theta)\}, \quad \text{где } H_{\text{оп}}(t) = (H_i(t), i \in I_{\text{оп}} \cup I_{\text{оп}}^*).$$

Рассмотрим моменты (5), считая их упорядоченными:

$$t_i(\tau) < t_{i+1}(\tau), \quad i = \overline{1, p(\tau)}.$$

Положим, $s_0 = 0$, $t_0(\tau) = 0$, если $t_1(\tau) > 0$;

$$s_0 = 1, \quad \text{если } t_1(\tau) = 0;$$

$$s_i = p(\tau), \quad t_{p(\tau)+1}(\tau) = \theta, \quad \text{если } t_{p(\tau)}(\tau) < \theta;$$

$$s_i = p(\tau) - 1, \quad \text{если } t_{p(\tau)}(\tau) = \theta;$$

$$K(\tau) = \{s_0, s_0 + 1, \dots, s_i\}; \quad K^+(\tau) =$$

$$= \{i \in K(\tau): \Delta^0(t|x_0(\tau)) > 0, t \in]t_i(\tau); t_{i+1}(\tau) [\};$$

$$K^-(\tau) = \{i \in K(\tau): \Delta^0(t|x_0(\tau)) < 0, t \in]t_i(\tau); t_{i+1}(\tau) [\}.$$

Совокупность $S(\tau) = \{K^-(\tau), K^+(\tau), p(\tau), I_{\text{оп}}, I_{\text{оп}}^*\}$ назовем

структурой оптимального коуправления $\Delta^0(t|x_0(\tau))$, $t \in T$, задачи (2). Пусть позиция $\{\tau, x_0(\tau)\}$ такова, что при $\tau = \tau$ справедливы соотношения:

$$t_1(\tau) > 0; t_p(\tau) < \theta; \frac{\partial \Delta^0(t|x_0(\tau))}{\partial t} \Big|_{t=t_i(\tau)} \neq 0, i = \overline{1, p(\tau)}. \quad (7)$$

Положим $p. = p(\tau.)$; $K^- = K^-(\tau.)$; $K^+ = K^+(\tau.)$;

$$k_i = 1, i \in K^+; k_i = -1, i \in K^-.$$

К системе (1) в начальной позиции $x_0(\tau.)$ приложим управление $u^0(0|x_0(\tau))$, в силу чего она станет двигаться по траектории $x_0(\tau)$, $\tau \geq \tau$.

Обозначим через $T^+(\tau.)$ малую правостороннюю окрестность точки τ .

Для $\tau \in T^+(\tau.)$ структура $S(\tau)$ совпадает с $S(\tau.)$, значения

$$t_i(\tau), i = \overline{1, p.}; v.; \rho_0(x_0(\tau)), \quad (8)$$

соответствующие позиции $\{\tau, x_0(\tau)\}$, удовлетворяют определяющим уравнениям:

$$\begin{cases} f(t_i(\tau), i = \overline{1, p.}; x_0(\tau); \rho_0(x_0(\tau))) = 0; \\ q_i(t_i(\tau); v.) = 0, i = \overline{1, p.}; \\ \bar{q}(v.) = 0; \end{cases} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} f(t_i, i = \overline{1, p.}; \kappa; \rho) &= \sum_{i=1}^p \int_{t_i}^{t_{i+1}} H_{оп}(t) k_i dt + \\ &+ \int_0^{t_1} H_{оп}(t) k_0 dt + F_{оп}(\theta, 0) \kappa + \rho \begin{bmatrix} e(I_{оп}) \\ -e(I_{оп}^*) \end{bmatrix}, t_{p+1} = \theta; \\ q_i(t_i; v) &= v' F(\theta, t_i) b, i = \overline{1, p.}; \bar{q}(v) = v' \begin{bmatrix} e(I_{оп}) \\ -e(I_{оп}^*) \end{bmatrix} - 1, \\ F_{оп}(\theta, t) &= (F_{ij}(\theta, t), i \in \{I_{оп} \cup I_{оп}^*\}, j \in \{1, \dots, n\}). \end{aligned}$$

Из (6) и (7) следует, что матрица Якоби $G(t_i(\tau), i = \overline{1, p.}; v.) \Big|_{\tau = \tau}$ не вырождена.

Здесь

$$G(t_i, i = \overline{1, p.}; v) = \begin{bmatrix} B1 & B3 & 0 \\ B2 & 0 & B4 \\ 0 & 0 & B5 \end{bmatrix};$$

$$B1 = 2H_{оп}(t_i) k_{i+1}, i = \overline{1, p.};$$

$$B2 = \text{diag}(-v' F(\theta, t_i) A b), i = \overline{1, p.};$$

$$B3 = (e'(I_{оп}), -e'(I_{оп}^*))';$$

$$B4 = H'_{оп}(t_i), i = \overline{1, p.};$$

$$B5 = (e'(I_{оп}), -e'(I_{оп}^*)).$$

Значит, при $\tau \in T^+(\tau.)$ существует единственное непрерывное решение (8) уравнений (9).

Поведение $t_i(\tau)$, $i = \overline{1, p(\tau)}$; v_z ; $\rho_0(x_0(\tau))$ описывается уравнениями (9) на промежутке $[\tau; \tau]$, где τ — наименьший момент, при котором $S(\tau) \neq S(\tau)$.

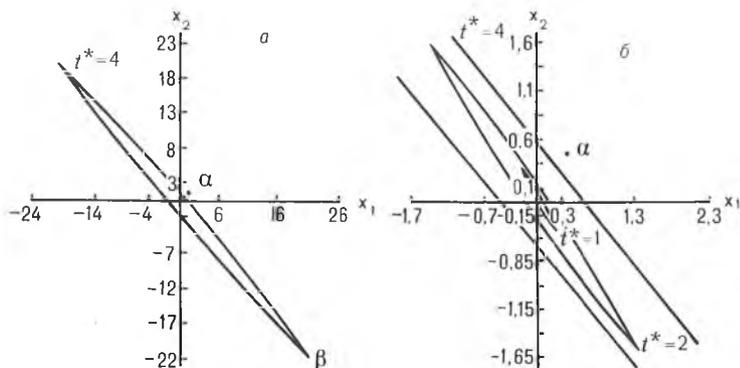


Рис. 1

Определяющие уравнения (9) можно решить в режиме реального времени при помощи метода Ньютона [6]. По результатам решения в том же темпе, согласно формулам (3), (4), строится текущее значение стабилизирующего управления типа обратной связи. Правила изменения структуры описаны в [6].

Проиллюстрируем изложенный метод на задаче стабилизации математического маятника относительно верхнего неустойчивого положения равновесия с помощью инерционного момента, приложенного к нему на оси подвеса.

Составим уравнение первого приближения:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_1 + x_3, \quad \frac{dx_3}{dt} = u.$$

В терминах задачи (2) имеем:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Будем считать, что всегда $x_3(0) = 0$.

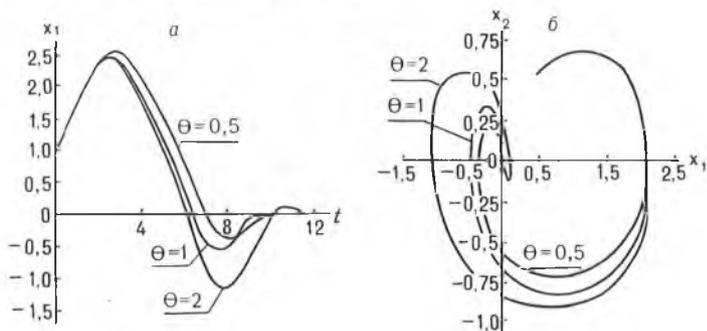


Рис. 2

С целью выяснения возможностей стабилизирующей обратной связи (4) построим проекцию множеств управляемости $S(t^*)$ системы (1) на плоскость (x_1, x_2) для нескольких значений времени t^* (рис. 1, а, б). С помощью обратной связи (4) были стабилизированы траектории системы (1), стартующие из точек $\alpha(0.45; 0.45; 0)$ и $\beta(20.036; -20.78; 0)$ (рис. 1, а, б). На рис. 2, а изображено поведение первой компоненты $x_1(t)$, $t \geq 0$, траектории системы, стартующей из точки α , для трех значений параметра θ , ($\theta = 0.5; 1; 2$).

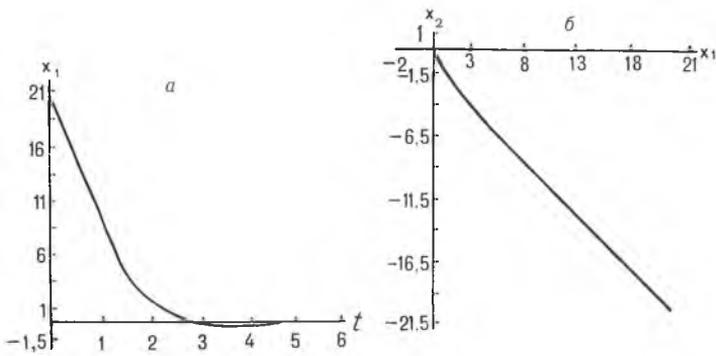


Рис. 3

На рис. 2,б изображены соответствующие фазовые траектории системы. Результаты для траектории, выходящей из точки β и стабилизируемой обратной связью (4) при $\theta = 1$, изображены на рис. 3,а и 3,б.

1. Цянь Сюэ-Сэнь. Техническая кибернетика. М., 1956.
2. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М., 1966.
3. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г. Математическая теория оптимальных процессов. М., 1976.
4. Лето в А. М. Аналитическое конструирование регуляторов // Автоматика и телемеханика. 1960. Т. 21. Вып. 4.
5. Калман Р. Е. Об общей теории систем управления // Труды I конгресса ИФАК. М., 1961. Т. 1.
6. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Костюкова О. И. Оптимизация линейной системы управления в режиме реального времени // Изв. АН РФ. Техническая кибернетика. 1992. № 4.

Поступила в редакцию 16.09.94.

УДК 519.2

Д. В. РУСАК

ОБНАРУЖЕНИЕ СЛОЖНОЙ «РАЗЛАДКИ» ПО КОВАРИАЦИОННОЙ МАТРИЦЕ В МНОГОМЕРНЫХ ГАУССОВСКИХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ

The problem of detection complex change moment in the covariance matrix for multivariate gaussian sequence with unknown mean vector is investigated. The decision rule for statistical detection of a change in the covariance matrix was constructed by means of generalized likelihood ratio statistic asymptotic expansion.

При решении задач статистического регулирования технологических процессов, описываемых независимой последовательностью многомерных гауссовских наблюдений, обычно предполагается, что «разладка» происходит в векторе математического ожидания [1, 2]. Однако подобно тому, как при анализе последовательности одномерных гауссовских наблюдений возникает необходимость контролировать дисперсию (контрольной картой среднеквадратических отклонений), в многомерном случае становится актуальной задача обнаружения «разладки» по ковариационной матрице. Исследование в этом направлении проводилось [см. 3]. На основе методов многомерного статистического анализа для двух простейших моделей «разладок» (скачкообразного и пропорционального изменения ковариационной матрицы) был разработан контролирующий алгоритм кумулятивных сумм [3]. В случае же произвольных изменений ковариационной матрицы, или так называемой сложной «разладки», задача до сих пор не имела решения.

Пусть в момент времени $t \in \{1, 2, \dots\}$ наблюдается случайная N -мерная выборка объема n_t

$$X^{(t)} = \{x_1^{(t)}, x_2^{(t)}, \dots, x_{n_t}^{(t)}\} \in \mathbb{R}^N$$

из некоторого невырожденного гауссовского распределения с N -мерной плотностью